Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Periodični autonomni sistemi

Naučni i stručni rad studenta

Novi Sad, 2014.

Predgovor

Diferencijalne jednačine predstavljaju posebnu oblast matematičke analize. Ova oblast je danas mnogo važna jer one predstavljaju jedan od najefikasnijih aparata za rješavanje problema u prirodi i nauci. U nauci problemi se svode na diferencijalne jednačine u svim slučajevima kada nam je potrebno iz lokalnih karakteristika nekih pojava i procesa da izvedemo neke sveukupne (sumarne, integralne) karakteristike tih pojava.

Diferencijalne jednačine srećemo kad god imamo neke složene relacije koje je moguće opisati jednačinama tj. funkcijama i njihovom brzinom promjene u vremenu i prostoru (izražene preko izvoda). Dakle, diferencijalne jednačine nam daju postupak da iz određenih veza odredimo zakon koji karakteriše pojavu u posmatranom fizičkom problemu.

U ovom radu bavićemo se jednim od najzanimljivijih primjera, a to su periodični (oscilatorni) sistemi. Mnogi matematički modeli iz određenih naučnih oblasti često vode do diferencijalnih jednačina koje su nezavisne od vremenske promjenljive t i za takve sisteme kažemo da su *autonomni*. Periodični autonomni sistemi (linearni i nelinearni) javljaju se u astronomiji, biologiji, hemiji, fizici, ekonomiji kao i mnogim drugim oblastima nauke i tehnike.

U Glavi 1 daćemo osnovne definicije i pojmove vezane za obične diferencijalne jednačine, a zatim ćemo dati osnovnu teoremu koja nam obezbjeđuje egzistenciju i jedinstvenost rješenja diferencijalnih jednačina, teorema Picard-Lindelöf-a. Osim toga, daćemo kvalitativnu analizu jedne periodične diferencijalne jednačine i vidjećemo na koji način nam kvalitativna analiza može dati podatke o rješenju i njegovom ponašanju.

U Glavi 2 krenućemo sa linearnim sistemima 1. reda i navesti osnovna tvrđenja vezana za linearne sisteme. Ispitaćemo slučajeve koji mogu nastupiti u dvodimenzionalnom slučaju i skicirati krive rješenja (trajektorije) u faznoj ravni, što je u ovom slučaju $\mathbb{R}^2$. Osim toga, upoznaćemo se sa periodičnim neautonomnim linearnim sistemima i teorijom Floquet-a koja je svojstvena za periodične sisteme. Ispitaćemo i stabilnost periodičnih linearnih neautonomnih sistema i izvesti osnovna tvrđenja.

Glava 3 posvećena je dinamičkim sistemima i definisanju lokalnog toka diferencijalne jednačine. Vidjećemo koja je veza dinamičkog i autonomnog sistema. Uvešćemo osnovne pojmove vezane za dinamički sistem, kao što su krive rješenja (trajektorije ili orbite), zatim ćemo definisati granične skupove, čiju ćemo važnost vidjeti u Glavi 4 kod definisanja graničnih ciklusa. Osim toga, pokazaćemo kako se ponašaju nelinearni sistemi u okolini fiksnih tačaka i pokazati na koji način je moguće linearizovati takve sisteme. Uvešćemo, Liapunov-ljeve funkcije, definisati nekoliko različitih vrsta stabilnosti i pokazati na primjeru kako je moguće pomoću Liapunov-ljeve funkcije pokazati da autonomni sistem nema periodična rješenja (zatvorene orbite).

U Glavi 4 daćemo definiciju jednog od najvažnijih pojmova kada su u pitanju nelinearni autonomni periodični sistemi, definisaćemo granični ciklus. Osim toga daćemo jednu novu vrstu stabilnosti, orbitalnu stabilnost. Neka od najvažnijih pitanja koje se postavljaju kada su u pitanju granični ciklusi jesu njihova egzistencija i njihova stabilnost. S tim u vezi dali smo pet kriterijuma koji nam služe za ispitivanje egzistencije periodičnih orbita i graničnih ciklusa. Na samom kraju rada, pokazaćemo na koji način nam teorija Floquet-a koju smo uveli u Glavi 2, može pomoći pri ispitivanju stabilnosti graničnih ciklusa.

Sadržaj

Predgovor **i**

1 Uvod **2**

1.1 Osnovni pojmovi i definicije 2

1.2 Egzistencija i jedinstvenost rješenja DJ 4

1.3 Kvalitativna analiza periodičnih jednačina 1. reda 7

2 Periodični linearni sistemi **12**

2.1 Autonomni linearni sistemi 1. reda 12

2.1.1 Autonomni linearni sistemi u $\mathbb{R}^2$ 14

2.2 Linearni sistemi 1. reda - opšti slučaj 18

2.3 Periodični linearni sistemi 20

2.4 Stabilnost rješenja linearnih periodičnih sistema 24

3 Dinamički sistemi i lokalni tok **27**

3.1 Dinamički sistemi 27

3.2 Tok autonomne jednačine kao dinamički sistem 28

3.2.1 Maksimalan interval egzistencije rješenja 28

3.2.2 Tok autonomne jednačine, orbite i granični skupovi 29

3.3 Linearizacija nelinearnih autonomnih sistema 31

3.4 Liapunov-ljeve funkcije i stabilnost 32

3.5 Primjena periodičnih sistema u biologiji 36

4 Periodični autonomni sistemi i granični ciklusi **41**

4.1 Granični ciklusi i orbitalna stabilnost 41

4.2 Egzistencija graničnih ciklusa 44
4.2.1 Dulac-ov kriterijum 44
4.2.2 Bendixson-ov kriterijum 46
4.2.3 Poincare-Bendixson-ova teorema 46
4.2.4 Lienard-ova jednačina 47
4.2.5 Gradijentni sistemi 48
4.3 Stabilnost graničnih ciklusa 49

Zaključak **52**

Literatura **53**

Glava 1

Uvod

U ovoj glavi smo dali osnovne definicije i teoreme iz oblasti običnih diferencijalnih jednačina (u daljem tekstu ODJ) koje će biti korišćene u nastavku, a neophodne su nam kako bismo bolje razumjeli rad kao jednu cjelinu. Većina tvrđenja iz ovog dijela su navedena bez dokaza, a mogu se naći u [1].

1.1 Osnovni pojmovi i definicije

Označimo sa U i V proizvoljne otvorene skupove u $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{R}^m$. Tada će $C^k(U,V)$ označavati skup svih funkcija iz U u V koje imaju neprekidne izvode zaključno sa redom $k \in \mathbb{N}_0$.

Opšti oblik ODJ je

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0 \tag{1.1}$$

za nepoznatu funkciju $x \in C^k(J)$, $J \subseteq R$. t je **nezavisna** promjenljiva, a $x(t)$ je **zavisna** promjenljiva. Najviši izvod koji se pojavljuje u F zove se **red** diferencijalne jednačine. **Rješenje** ODJ je funkcija $\phi \in C^k(I)$, $I \subseteq J$, takva da je

$$F\left(t, \phi(t), \ldots, \phi^{(k)}(t)\right) = 0, t \in I.$$

Sledeću teoremu navodimo bez dokaza, koji se može naći u [6] i [18].

Teorema 1. (O implicitnom preslikavanju) *Neka su $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoreni skupovi i $F : U \times V \to \mathbb{R}^m$ tako da važi:*

a) *F je klase C^1 (neprekidno diferencijabilno)*

b) *$F(a,b) = 0$ za neko $(a,b) \in U \times V$*

c) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ *je invertibilno tj.* $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0.$

Tada postoje otvorene okoline U_0 *od* a *u* U *i* V_0 *od* b *u* V *i postoji jedinstvena funkcija* $g : U_0 \to V_0$ *koja je klase* C^1 *tako da važi* $g(a) = b$ *i*

$$\forall (x,y) \in U_0 \times V_0 : y = g(x) \Leftrightarrow F(x, g(x)) = 0.$$

Posmatrajmo sada za početak DJ 1. reda tj.

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0,$$

gdje je t nezavisna promjenljiva i označimo da je $x'(t) = y(t)$. Tada imamo,

$$F(t, x(t), y(t)) = 0, \tag{1.2}$$

jednačinu kojom su implicitno definisane funkcije $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Na osnovu Teoreme 1. znamo da je jednačinom (1.2) funkcija $y = x(t)$ implicitno definisana tamo gdje je $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Tada ponovo iz Teoreme 1. jednačina (1.2) ima bar lokalno rješenje odnosno rješenje u okolini tačke t_0, tj. postoji funkcija f takva da je $y(t) = f(t, x(t))$ ili kad vratimo smjenu,

$$\boxed{\dot{x}(t) = f(t, x(t)).}$$

Pretpostavimo sada u opštem slučaju da je moguće riješiti F za najveći red izvoda odnosno da postoji funkcija f takva da je

$$x^{(k)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)).$$

Ponovo iz teoreme o impicitnom preslikavanju znamo da je ovo moguće bar lokalno u okolini tačke $(t, y) \in U$ ako je $\frac{\partial F}{\partial y_k}(t, y) \neq 0$.

Često nam nije dovoljno da razmatramo samo realne funkcije jedne realne promjenljive, nego posmatramo slučaj $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Ovo nas vodi do **sistema diferencijalnih jednačina**:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= f_1(t, x, x', \ldots, x^{(k-1)}), \\ x_2^{(k)} &= f_2(t, x, x', \ldots, x^{(k-1)}), \\ &\vdots \\ x_n^{(k)} &= f_n(t, x, x', \ldots, x^{(k-1)}). \end{aligned}$$

Za ovakav sistem reći ćemo da je **linearan**, ako je oblika

$$x_i^{(k)} = g_i(t) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} f_{i,j,l}(t) x_l^{(j)}.$$

Kažemo da je sistem **homogen**, ako je $g_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Štaviše, svaki sistem može da se svede na sistem prvog reda uvođenjem smjene $y = (x, x', \ldots, x^{(k-1)})$. Ovo nam daje novi **sistem prvog reda**:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_2, \\
\dot{y}_2 &= y_3, \\
&\vdots \\
\dot{y}_{k-1} &= y_k, \\
\dot{y}_k &= f(t, y).
\end{aligned}$$

Možemo čak da napravimo sistem nezavisnim od t uvođenjem smjene $z = (t, y)$. Tada sistem izgleda:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= 1, \\
\dot{z}_2 &= z_3, \\
&\vdots \\
\dot{z}_k &= z_{k+1}, \\
\dot{z}_{k+1} &= f(z).
\end{aligned}$$

Sistemi kod kojih funkcija f ne zavisi eksplicitno od promjenljive t, kažemo da su **autonomni**.

1.2 Egzistencija i jedinstvenost rješenja DJ

U ovoj glavi ćemo iznijeti osnovna tvrđenja vezana za egzistenciju i jedinstvenost rješenja DJ, ne upuštajući se u detaljne dokaze, a detaljan pregled teorema i dokaza može se naći u [1] i [19].

Definicija 1. Neka je $f : X \to X$ i $X \neq \emptyset$. Elemenat $x \in X$ je **fiksna tačka** preslikavanja f ako je $x = f(x)$.

Primjer 1. Posmatrajmo preslikavanje $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$, zadato sa

$$A(f(x)) = f(0) + \int_0^x f(t)dt.$$

Za funkciju $f(x) = e^x$ koja pripada $C[0, 1]$ važi da je

$$A(e^x) = e^0 + \int_0^x e^t dt = 1 + e^x - 1 = e^x,$$

tj. $f(x) = e^x$ jeste fiksna tačka preslikavanja A.

Definicija 2. Neka je (X, d) metrički prostor, M neprazan podskup od X i $f : M \to X$. Ako je $\lambda \in [0, 1)$ takvo da je

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y), \text{ za sve } x, y \in M,$$

tada je f **λ-kontrakcija** nad M.

Teorema 2. (Banach[1]-ov princip kontrakcije)

*Neka je (X, d) **kompletan**[2] metrički prostor, M neprazan i **zatvoren**[3] podskup od X i $f : M \to M$ λ-kontrakcija nad M. Tada postoji jedinstvena fiksna tačka $x \in M$ preslikavanja f i važi relacija $x = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0)$, gdje je x_0 proizvoljan element iz M.*

Posmatrajmo sada $C(I, \mathbb{R}^n)$ skup svih neprekidnih funkcija iz I u $\mathbb{R}^n$, gdje je I kompaktan interval. Tada, ako definišemo normu vektora sa $\|x\| = \sup_{t\in I} |x(t)|$, lako se pokazuje da je tada $C(I, \mathbb{R}^n)$ kompletan normiran vektorski prostor odnosno $C(I, \mathbb{R}^n)$ je **Banach-ov** prostor.

Posmatrajmo početni problem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

gdje je $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, U otvoren podskup od $\mathbb{R}^{n+1}$ i $(t_0, x_0) \in U$. Kako je funkcija f neprekidna, integraleći obje strane po t, dobijamo ekvivalentnu *integralnu jednačinu*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{1.3}$$

Dakle, naš početni problem ekvivalentan je sa dobijenom integralnom jednačinom. Primjetimo da je $x_0(t) = x_0$ aproksimativno rješenje bar na „malom” intervalu $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Uvrstimo li $x_0(t)$ u (1.4) dobijamo sledeće aproksimativno rješenje

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds.$$

Ponavljajući ovaj postupak, formiramo iterativni niz poznat kao **Picard[4]-ove iteracije** koji je definisan sa

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_{k+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))ds. \end{aligned}$$

Može se pokazati, koristeći Banach-ov princip kontrakcije, da je dati niz sukcesivnih aproksimacija $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentan i da je njegova granica rješenje početnog problema.

[1]Stefan Banach (1892-1945), poljski matematičar
[2]Metrički prostor (X, d) je kompletan, ako za svaki Košijev niz u X, postoji granica tog niza u X.
[3]Svaki zatvoren skup sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.
[4]Emile Picard (1856-1941), francuski matematičar

Preciznije, definišimo preslikavanje

$$K(x(t)) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds$$

i posmatrajmo bez umanjenja opštosti $t_0 = 0$ i slučaj $t \geq 0$.

Prije svega, trebamo Banach-ov prostor. I najlakše nam je da izaberemo $X = C([0,T], \mathbb{R}^n)$ za pogodno izabrano $T > 0$. Dalje, treba nam zatvoren podskup $C \subseteq X$ takav da $K : C \to C$. Izaberimo $C = \overline{B_\delta(x_0)} = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta\}$. Kako je U otvoren i $(0, x_0) \in U$ možemo izabrati $V = [0,T] \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset U$, gdje je $B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$. Tada da bi važilo $K : C \to C$ mora da za svako $x \in C$ i $K(x) \in C$ tj. ako je $\|x - x_0\| \leq \delta$ onda mora da je $\|K(x) - x_0\| \leq \delta$. Ovo će da važi ako i samo ako je $T \leq \frac{\delta}{M}$ gdje je $M = \max_{(t,x)\in V} |f(t,x)|$ što znamo da postoji jer neprekidna funkcija nad kompaktnim skupom dostiže svoj maksimum. Ostalo nam je još da pokažemo još da je $K : C \to C$ kontrakcija, ali prvo definišimo jedan novi pojam.

Definicija 3. Za funkciju f kažemo da je lokalno **Lipschitz**[5] **neprekidna** po drugoj promjenljivoj, uniformno za sve vrijednosti prve promjenljive, ako za svaki kompaktan skup I, broj

$$L = \sup_{(t,x)\neq(t,y)\in I} \left| \frac{f(t,x) - f(t,y)}{x - y} \right|,$$

postoji kao konačna vrijednost. Pisaćemo $f \in Lip(2/1)$.

Sada, za $x, y \in C$ i $x \neq y$ imamo da je

$$\|K(x) - K(y)\| \leq \int_0^t \left| \frac{f(s, x(s)) - f(s, y(s))}{x - y} \right| ds \cdot \|x - y\|$$

pa nam je potreban još jedan uslov, a to je Lipschitz neprekidnost. Tada, pod pretpostavkom da je f Lipšic neprekidna imamo da je

$$\|K(x) - K(y)\| \leq L \cdot T \cdot \|x - y\|.$$

Da bi preslikavanje K bilo kontrakcija potrebno nam je da bude $T < \frac{1}{L}$. Ovim smo pokazali da preslikavanje K zadovoljava sve uslove Banach-ove teoreme, pa postoji jedinstvena fiksna tačka preslikavanja K i to je ujedno i jedinstveno rješenje integralne jednačine odnosno, početnog problema.

Sada, formalno možemo da formulišemo sledeću teoremu.

Teorema 3. (Teorema Picard-Lindelöf[6]-a)

Neka $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, gdje je U otvoren podskup od $\mathbb{R}^{n+1}$ i $(t_0, x_0) \in U$. Ako je $f \in Lip(2/1)$, tada postoji jedinstveno lokalno rješenje $\overline{x}(t) \in C^1(I)$ početnog problema $\dot{x}(t) = f(t, x), x(t_0) = x_0$, gdje je I neki interval oko t_0.

[5] Rudolf Lipschitz (1832-1903), njemački matematičar

[6] Ernst Leonard Lindelöf (1870-1946), finski matematičar

Preciznije, ako je $V = [t_0, t_0 + T] \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset U, T > 0$ *i* $M = \max|f|$ *na* V*, tada postoji rješenje bar za* $t \in [t_0, t_0 + T]$ *i ostaje u* $\overline{B_\delta(x_0)}$*, gdje je* $T_0 = \min\{T, \frac{\delta}{M}\}$*. Analogno važi za* $[t_0 - T, t_0]$*.*

1.3 Kvalitativna analiza periodičnih jednačina 1. reda

Sistem (ili jednačina) je **periodičan** ako postoji netrivijalno periodično rješenje

$$x(t+T) = x(t), \text{ za svako } t \geq 0 \text{ i neko } T > 0.$$

Kada kažemo da je rješenje „netrivijalno” isključili smo konstantna rješenja.

S obzirom da je mali broj DJ rješiv eksplicitno, često nam kvalitativni aspekti rješenja budu od velikog značaja jer možemo saznati kako se ponaša rješenje, da li ostaje u određenoj oblasti, kako izgleda za razne vrijednosti parametra t i mnogo drugih osobina. Štaviše i u situacijama gdje možemo naći rješenje u eksplicitnom obliku, kvalitativna analiza nam može dati bolje informacije o rješenju.

S tim u vezi, razmotrimo sledeći slučaj

$$\dot{x}(t) = f(t,x) = (1 - x(t)) \cdot x(t) - h \cdot (1 - \sin(2\pi t)), h \geq 0$$

i primjetimo da smo član $1 - \sin(2\pi t) \geq 0$ mogli zamijeniti nenegativnom periodičnom funkcijom $g(t)$, a naredna analiza bi ponovo važila.

Neka je $\phi_h(t,x)$ rješenje početnog problema $\dot{y} = f(t,y)$, $y(0) = x$. Zatim uvedimo **Poincare[7]-ovo preslikavanje** sa

$$\boxed{P_h(x) = \phi_h(1,x)}$$

pri čemu smo bez umanjenja opštosti uzeli da je period $T = 1$. U opštem slučaju imamo $P_h(x) = \phi_h(T,x)$. Periodično rješenje ćemo dobiti ako i samo ako je početna tačka npr. x_0, fiksna tačka Poincare-ovog preslikavanja tj. $P_h(x_0) = x_0$, a ovo slijedi iz jedinstvenosti rješenja početnog problema jer $\phi_h(t+1,x)$ ponovo zadovoljava jednačinu $\dot{x} = f(t,x)$ ako $f(t+1,x) = f(t,x)$. Tada $\phi_h(t+1,x_0) = \phi_h(t,x_0)$ ako i samo ako jednakost važi za $t = 0$ tj. $\phi_h(1,x_0) = \phi_h(0,x_0) = x_0$.

Razmotrimo sada osobine preslikavanja P. Označimo

$$\theta(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\phi_h(t,x),$$

[7] Henri Poincare (1854-1912), francuski matematičar

pri čemu x ne zavisi od t odakle diferenciranjem dobijamo

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi_h}(t,x) &= (1-\phi_h(t,x))\cdot\phi_h(t,x) - h\cdot(1-\sin(2\pi t)) \\
\dot{\phi_h}(t,x) &= \phi_h(t,x) - {\phi_h}^2(t,x) - h\cdot(1-\sin(2\pi t)) \\
\dot{\theta}(t,x) &= \theta(t,x) - 2\cdot\phi_h(t,x)\cdot\theta(t,x) \\
\dot{\theta}(t,x) &= (1-2\phi_h(t,x))\cdot\theta(t,x) \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

i kako je $\phi_h(0,x)=x$, tada je $\theta(0,x)=1$, odakle integraleći dobijamo

$$\theta(t,x) = \theta(0,x)\cdot e^{\int_0^t (1-2\phi_h(s,x))ds} = e^{\int_0^t (1-2\phi_h(s,x))ds}$$

pa za $t=1$ dobijamo da je

$$\theta(1,x) = e^{\int_0^1 (1-2\phi_h(s,x))ds}$$

što prema definiciji Poincare-ovog preslikavanja daje

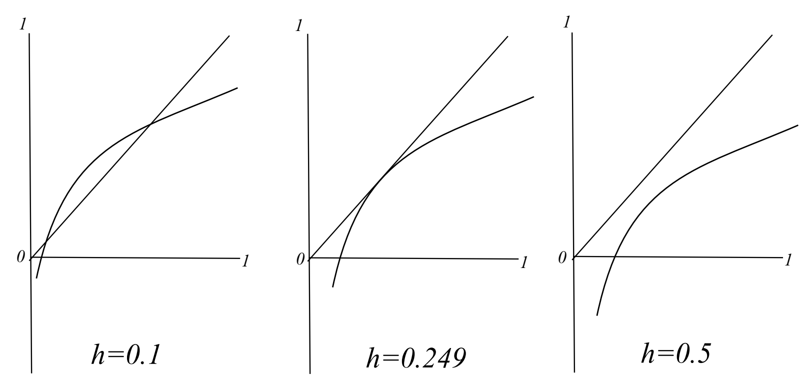
$${P_h}'(x) = \theta(1,x) = e^{1-2\int_0^1 \phi_h(s,x)ds} > 0$$

odakle vidimo da je $P_h(x)$ strogo rastuća funkcija. Štaviše, diferencirajući poslednji izraz po x dobijamo da je

$${P_h}''(x) = {P_h}'(x)\cdot\left(-2\int_0^1 \theta(s,x)ds\right) < 0$$

jer je $\theta(s,x)>0$ i ${P_h}'(x)>0$. Odavde dobijamo da je $P_h(x)$ strogo rastuća i konkavna. Stoga, $P_h(x)$ ima najviše dvije presječne tačke sa pravom $y=x$, jer P je strogo rastuća funkcija i drugi izvod ne mijenja znak, tako da funkcija nijednu pravu ne može presjeći više od dva puta.

U zavisnosti od parametra h vidjećemo da sva tri slučaja (0, 1. ili 2. presječne tačke) mogu nastupiti. *Numeričkim* računanjem Poincare-ovog preslikavanja za različite vrijednosti parametra h vidimo da sva tri slučaja mogu nastupiti što se vidi na slici ispod.



Ispitajmo sada zavisnost preslikavanja P od parametra h, *analitičkim putem.* Pošto u jednačini imamo parametar h, onda će nam i rješenje zavisiti od h. Označimo sa

$$\psi(t,x) = \frac{\partial}{\partial h}\phi_h(t,x)$$

i diferencirajmo po h i dobijamo

$$\dot{\psi}(t,x) = (1 - 2\phi_h(t,x)) \cdot \psi(t,x) - (1 - \sin(2\pi t))$$

i kako je $\psi(0,x) = \frac{\partial}{\partial h}\phi_h(0,x) = 0$ slijedi da je

$$\psi(t,x) = -\int_0^t e^{\int_s^t (1-2\phi_h(r,x))dr} \cdot (1 - \sin(2\pi s))ds < 0$$

pa za $t = 1$ je

$$\frac{\partial}{\partial h}\phi_h(1,x) = \frac{\partial}{\partial h}P_h(x) < 0.$$

Štaviše, za $h = 0$ dobijamo da je

$$\phi_0(1,x) = P_0(x) = \frac{ex}{1 + (e-1)x}$$

i postoje dvije fiksne tačke $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Kako h raste, ove tačke će se u jednom trenutku poklopiti u nekoj tački h_c. Iznad ove vrijednost h_c, $P_h(x)$ „gubi" fiksne tačke i sva rješenja teže u $-\infty$ jer je $P_h(x) < x$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Lema 1. *Važi da je* ${P_h}^n(x) = \phi_h(n,x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz leme slijedi korišćenjem činjenice da je $P_h(x) = \phi(1,x)$, odakle indukcijom po n dolazimo do navedenog tvrđenja.

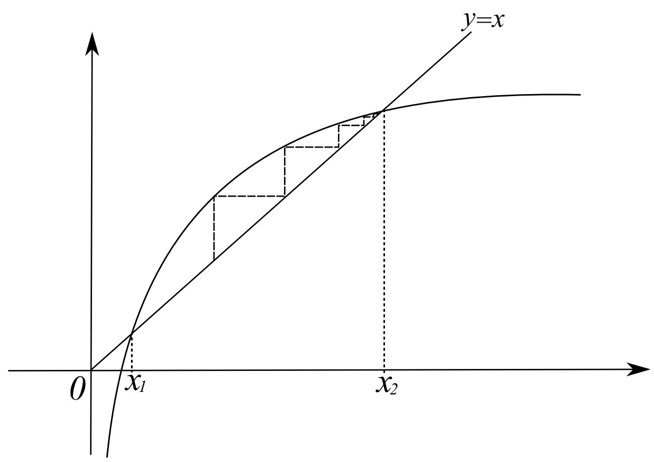
Kako bismo izveli analizu do kraja pretpostavimo za početak da je $h < h_c$ i neka su $x_1 < x_2$ fiksne tačke preslikavanja $P_h(x)$. Definišimo iterativni niz za $P_h(x)$ sa ${P_h}^0(x) = x$ i ${P_h}^n(x) = P_h({P_h}^{n-1}(x))$. Tvrdimo da je tada:

$$\lim_{n\to+\infty} {P_h}^n(x) = \begin{cases} x_2, & x > x_1 \\ x_1, & x = x_1 \\ -\infty, & x < x_1 \end{cases}$$

Razmotrimo sada sve slučajeve.

- $x \in (x_1, x_2)$

  Kako je $P_h(x)$ strogo rastuća, tada za $x_1 < x < x_2$ je $x_1 = P_h(x_1) < P_h(x) < P_h(x_2) = x_2$, a kako je $P_h(x)$ konkavna imamo da je $x < P_h(x)$, što implicira da je ${P_h}^n(x)$ strogo rastući niz koji je ograničen odozgo sa x_2. Tada imamo da je taj niz konvergentan tj. postoji $x_0 \in (x, x_2]$ takvo da je $\lim_{n\to+\infty} {P_h}^n(x) = x_0$. Sada, $P_h(x_0) = P_h(\lim_{n\to+\infty} {P_h}^n(x)) = \lim_{n\to+\infty} {P_h}^{n+1}(x) = x_0$, odakle slijedi da je x_0 fiksna tačka tj. $x_0 = x_2$.



- $x = x_1$ ili $x = x_2$

  U ovom slučaju imamo stacionaran niz jer ${P_h}^0(x_1) = x_1, {P_h}^1(x) = P_h({P_h}^0(x_1)) = P_h(x_1) = x_1, \ldots, {P_h}^n(x_1) = x_1$ odnosno ${P_h}^n(x_2) = x_2, n \in \mathbb{N}$.

- $x > x_2$

  Za $x > x_2$ imamo da je $P_h(x) < x$ tj. grafik funkcije je ispod prave $y = x$. Osim toga, funkcija $P_h(x)$ raste i $x_2 = P_h(x_2) < P_h(x)$, ali zbog konkavnosti imamo da iterativni niz opada, što nam daje opadajući i odozdo ograničen sa x_2 iterativni niz. Tada kao i u prvom slučaju i uz isto obrazlozenje dobijamo da postoji $x_0 \in [x_2, +\infty)$ i da je $x_0 = x_2$.

- $x < x_1$

  I u ovom slučaju kao i u prethodnom imamo da je $P_h(x) < x$. Dalje, za $x < x_1$ je $P_h(x) < P_h(x_1)$. U ovom slučaju je ponovo iz konkavnosti iterativni niz opadajući ali nije ograničen pa dobijamo da je $\lim_{n\to+\infty} {P_h}^n(x) = -\infty$.

Ostaje nam još da vidimo šta se dešava sa rješenjem $\phi_h(t, x)$ kada $t \to +\infty$. Iz prethodnog razmatranja imamo da za $x < x_1$ rješenje $\phi_h(n, x) \to -\infty$ kada $n \to +\infty$ i da za $x > x_1$ imamo da $\phi_h(n, x) \to x_2$ kada $n \to +\infty$ tj. da je

$$\lim_{n\to+\infty} |\phi_h(n, x) - x_2| = 0. \tag{1.5}$$

Ostaje nam još da pokažemo da iz (1.5) slijedi da je

$$\lim_{t\to+\infty} |\phi_h(t, x) - \phi_h(t, x_2)| = 0. \tag{1.6}$$

Ovo je prilično trivijalno, jer iz (1.5) imamo prema definiciji granične vrijednosti niza da

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |\phi_h(n, x) - x_2| < \varepsilon).$$

S druge strane, ako pretpostavimo suprotno, tj. da ne važi (1.6) prema definiciji granične vrijednosti funkcije imamo da

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall M > 0)(\exists t \geq 0)(t \geq M \wedge |\phi_h(t, x) - \phi_h(t, x_2)| \geq \varepsilon).$$

Sada, birajući $t = n_0 + 1 \geq n_0$ dolazimo u kontradikciju sa (1.5).

Slično, kao u prethodnom slučaju kada je bilo $h < h_c$, tako za $h > h_c$ imamo da je $\lim_{n\to+\infty} {P_h}^n(x) = -\infty$ jer je $P_h(x) < x$ za sve $x \in \mathbb{R}$ i za $h = h_c$ imamo da je $\lim_{n\to+\infty} {P_h}^n(x) = \begin{cases} x_2, & x \geq x_2 \\ -\infty, & x < x_2 \end{cases}.$

Mnogi fizički sistemi su modelirani diferencijalnim jednačinama koje imaju periodična rješenja. Kao što smo vidjeli u prethodnom primjeru, kvalitativna analiza nam daje informacije o nizu osobina integralnih krivih kao što su ograničenost, broj i položaj nula, oscilatornost i monotonost.

Glava 2

Periodični linearni sistemi

U ovoj glavi razmatramo linearne sisteme prvog reda (autonomne i neautonomne). Upoznaćemo se sa definicijom integralnih krivih i ispitaćemo krive rješenja u faznoj ravni. Razmatraćemo, prije svega periodične linearne sisteme, dok će nam opšti slučaj linearnih sistema prvog reda služiti kako bismo izveli i dokazali neka od osnovnih teorema vezanih za periodične linearne sisteme. Iznijećemo i upoznati se sa teorijom Floquet-a koja je svojstvena za periodične sisteme, a osim toga ispitaćemo i stabilnost periodičnih neautonomnih sistema.

2.1 Autonomni linearni sistemi 1. reda

Posmatrajmo autonomni linearni sistem 1. reda

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

gdje je A matrica formata $n \times n$. Ako koristimo Picard-ove iteracije dobijamo

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_1(t) &= x_0 + \int_0^t Ax_0(s)ds = x_0 + Ax_0 \int_0^t = x_0 + tAx_0 \\ x_2(t) &= x_0 + \int_0^t Ax_1(s)ds = x_0 + Ax_0 \int_0^t + A^2 x_0 \int_0^t sds = \\ &= x_0 + tAx_0 + \frac{t^2}{2} A^2 x_0 \end{aligned}$$

odakle indukcijom dobijamo

$$x_m(t) = \sum_{j=0}^{m} \frac{t^j}{j!} A^j x_0.$$

Granična vrijednost kada $m \to \infty$ je data sa

$$x(t) = \lim_{m\to\infty} x_m(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j x_0.$$

U jednodimenzionalnom slučaju ($n = 1$) ovaj red je ustvari eksponencijalna funkcija, pa ćemo po analogiji pisati

$$x(t) = e^{tA} x_0,$$

gdje smo definisali **matričnu eksponencijalnu funkciju** sa

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j. \tag{2.2}$$

Uvedemo li sada linearnu smjenu koordinata

$$y = U^{-1} x,$$

tada je matrična eksponencijalna funkcija u novim koordinatama data sa

$$U^{-1} e^A U = e^{U^{-1}AU}.$$

Ovo slijedi iz same definicije (2.2) koristeći da je $U^{-1}A^jU = (U^{-1}AU)^j$. Tada, kako bismo izračunali e^A trebamo smjenu koordinata kojom bismo što je moguće više pojednostavili matricu A.

Teorema 4. *(Jordan[1]-ova kanonička forma)*

Neka je A kompleksna matrica formata $n \times n$. Tada postoji linearna smjena koordinata U takva da se matrica A transformiše u blok matricu,

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{bmatrix}$$

gdje je svaki blok oblika

$$J = \alpha \mathbb{I} + N = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \alpha & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \alpha \end{bmatrix}.$$

Matrica N je matrica sa jedinicama na dijagonali iznad glavne dijagonale i nulama na svim ostalim mjestima.

Vrijednosti α su karakteristične vrijednosti matrice A i novi bazični vektori u_j tj. kolone matrice U sastoje se od uopštenih karakterističnih vektora matrice A.

[1] Camille Jordan (1838-1922), francuski matematičar

Kako bismo izračunali matričnu eksponencijalnu funkciju primjetimo da je

$$e^{U^{-1}AU} = \begin{bmatrix} e^{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_m} \end{bmatrix},$$

pa nam preostaje da izračunamo matričnu eksponencijalnu funkciju za svaki Jordan-ov blok $J = \alpha\mathbb{I} + N$ pojedinačno.

2.1.1 Autonomni linearni sistemi u $\mathbb{R}^2$

U prethodnom poglavlju vidjeli smo da je rješenje autonomnog linearnog sistema 1. reda dato sa

$$x(t) = e^{tA} \cdot x_0.$$

Dakle, preslikavanje e^{tA} obezbjeđuje izomorfizam između svih početnih uslova x_0 i svih rješenja. Stoga, skup svih rješenja je vektorski prostor izomorfan sa $\mathbb{R}^2$.

Definicija 4. Ravan (x_1, x_2) u kojoj se nalaze rješenja naziva se *fazna ravan*. Krive u faznoj ravni koje predstavljaju rješenja početnog problema nazivaju se *trajektorije*. Skup svih trajektorija naziva se *fazni portret*.

Definicija 5. Linearni sistem je *stabilan* ako sva rješenja sistema ostaju ograničena kada $t \to \infty$, a *asimptotski stabilan* ako sva rješenja teže nuli kada $t \to \infty$.

Ovdje ćemo da razmotrimo sve mogućnosti za fazne portrete koje mogu nastupiti za linearni sistem drugog reda[2]

$$\dot{x} = Ax \tag{2.3}$$

tj. kada je $x \in \mathbb{R}^2$ i matrica A je formata 2×2. Osim toga ispitaćemo i stabilnost navedenog sistema. U ovom slučaju možemo zapisati

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = A \cdot x(t).$$

U dvodimenzionalnom slučaju imamo dva karakteristična korijena, α_1 i α_2, koja mogu biti oba realna (pri čemu mogu biti realni i jednaki $\alpha_1 = \alpha_2$ ili realni i različiti $\alpha_1 \neq \alpha_2$) ili su jedan drugom konjugovano-kompleksni (ako je $\alpha_1 = a + ib$ tada je $\alpha_2 = a - ib$).

Opisaćemo sada fazne portrete za sistem

$$\dot{x} = B \cdot x \tag{2.4}$$

[2] Budući da trajektorije ovih sistema mogu biti prikazani kao krive u faznoj ravni moguće je veoma lako vizualizovati njihovo kvalitativno ponašanje. Ključna svojstva sistema višeg reda ovde se mogu lako uočiti i ne mijenjaju se u suštinskom smislu sa povećanjem dimenzije faznog prostora.

gdje matrica $B = U^{-1}AU$ može imati jedan od sledećih oblika:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \text{ ili } B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

u zavisnosti od karakterističnih korijena α_1 i α_2. Fazni portreti za linearni sistem (2.3) su isti kao za linearni sistem (2.4) zbog linearne smjene koordinata. U zavisnosti kojeg je oblika matrica B možemo pokazati da rješenje sa početnim podatkom $x(0) = x_0$ je dato sa

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2 t} \end{bmatrix} \cdot x_0, \quad x(t) = e^{\alpha_1 t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x_0$$

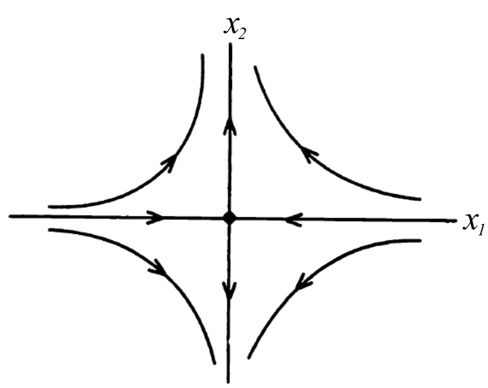
ili

$$x(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} \cdot x_0,$$

respektivno. Sada ćemo predstaviti fazne portrete u zavisnosti od α_1, α_2 i parametara a i b.

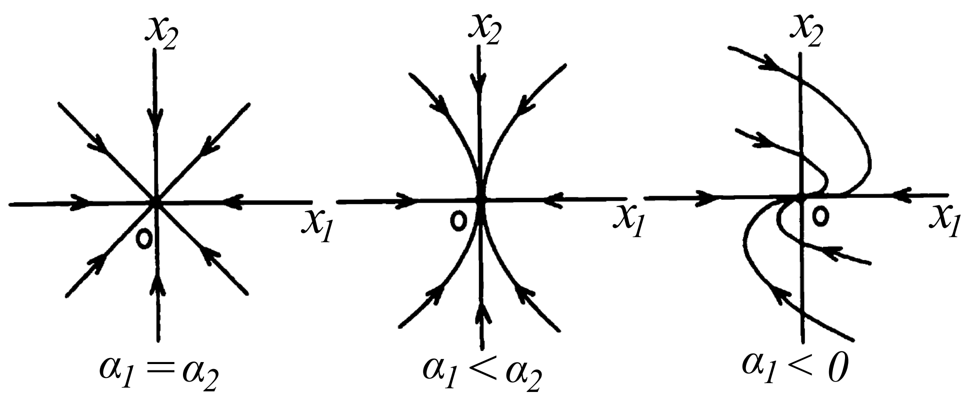
Slučaj I $B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ za $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$.

Fazni portret za linearni sistem (2.4) u ovom slučaju dat je na slici ispod. Kažemo da sistem ima *sedlo u koordinatnom početku*. Ako je $\alpha_2 < 0 < \alpha_1$ samo su strelice na crtežu orijentisane u suprotnom smijeru. Kad god matrica A ima dva realna karakteristična korijena suprotnog znaka $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$ fazni portret za linearni sistem (2.3) je linearno ekvivalentan faznom portretu datom na slici. Sedlo je nestabilan čvor.



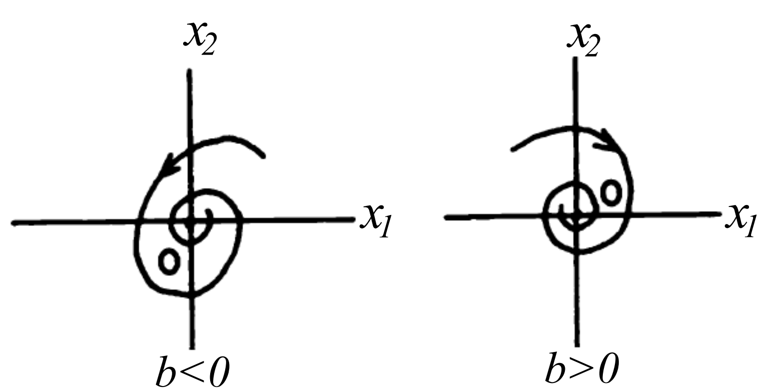
Slučaj II $B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ za $\alpha_1 \le \alpha_2 < 0$ ili $B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}$ za $\alpha_1 = \alpha_2 < 0$.

Fazni portreti u ovom slučaju dati su na slici ispod. U ovom slučaju u tački $(0, 0)$ imamo asimptotski stabilan čvor *ponor*. Ako je $\alpha_2 \ge \alpha_1 > 0$ ili ako je $\alpha_1 > 0$, samo su strelice orijentisane u suprotnom smijeru i tada je $(0,0)$ nestabilan čvor *izvor.* U slučaju kada je $\alpha_1 = \alpha_2 < 0$ asimptotski stabilan čvor se zove *zvjezdasti ponor* i resp. za $\alpha_1 = \alpha_2 > 0$ imamo nestabilan čvor *zvjezdasti izvor.*



Slučaj III $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ za $a < 0$.

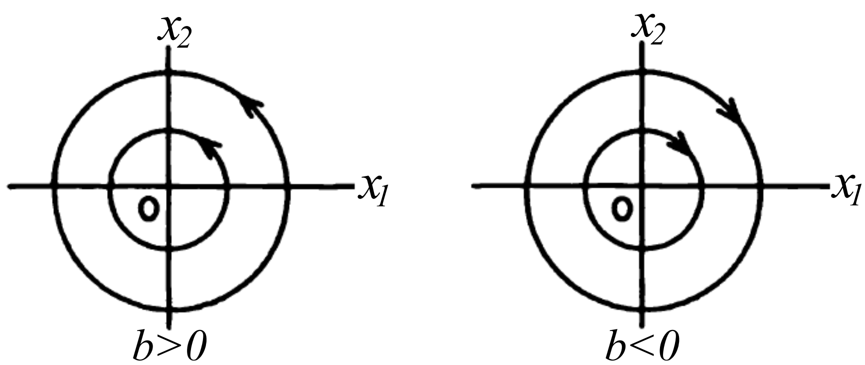
Fazni portreti su dati na slici ispod u zavisnosti od b. U tački $(0,0)$ imamo asimptotski stabilan čvor, *spiralni ponor.* U slučaju kada je $a > 0$ trajektorija se udaljava od koordinatnog početka sa porastom promjenljive t i $(0,0)$ je nestabilan čvor *spiralni izvor.* Kad god, matrica A ima par konjugovano-kompleksnih karakterističnih korijena sa nenula realnim dijelom, $a \pm ib$ sa $a < 0$, fazni portret za linearni sistem (2.3) je linearno ekvivalentan faznom portretu na slici ispod.



Slučaj IV $B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$.

Fazni portreti su dati na slici ispod. U tački $(0,0)$ imamo stabilan čvor, *centar.* Kad god, matrica A ima par čisto imaginarnih kompleksno-konjugovanih karakterističnih korijena,

$\pm ib$, fazni portret za linearni sistem (2.3) je linearno ekvivalentan faznom portretu na slici ispod. Trajektorije sistema (2.3) leže na centralnim elipsama i rješenje $x(t)$ sistema (2.3) zadovoljava $m \leq |x(t)| \leq M$, za sve $t \in \mathbb{R}$.



Primjer 2. Linearni sistem $\dot{x} = A \cdot x$ sa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ima *centar* u tački $(0,0)$ s obzirom da matrica A ima karakteristične korijene $\alpha_{1,2} = \pm 2i$. Računajući dobijamo da je

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

odakle onda dobijamo da je

$$B = U^{-1}AU = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje linearnog sistema $\dot{x} = Ax$ je dato sa

$$x(t) = U \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} U^{-1} \cdot x(0) = \begin{bmatrix} \cos 2t & -2\sin 2t \\ \frac{1}{2}\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

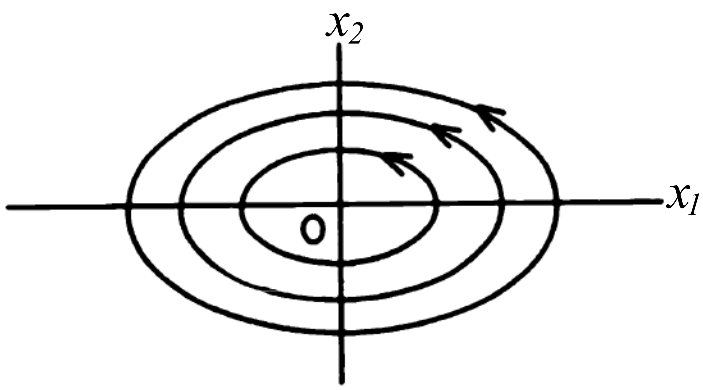
ili ekvivalentno

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \cos 2t - 2c_1 \sin 2t \\ x_2(t) &= \frac{1}{2} c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da rješenje zadovoljava jednakost

$${x_1}^2(t) + 4{x_2}^2(t) = {c_1}^2 + 2{c_2}^2$$

za sve $t \in \mathbb{R}$ tj. trajektorije ovog linearnog sistema leže na elipsi.



2.2 Linearni sistemi 1. reda - opšti slučaj

Podsjetimo se prvo opšteg slučaja za linearne sisteme prvog reda tj. podjsetićemo se definicija i tvrđenja vezanih za linearne sisteme gdje nam koeficijenti matrice A zavise od parametra t. Posmatramo početni problem:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

gdje je $A \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$. Ako označimo sa $f(t, x) = A(t) \cdot x$ imamo za fiksirano t da je

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |A(t) \cdot x - A(t) \cdot y| = |A(t)(x-y)| = \|A(t)\| \cdot |x-y|$$

pa ako izaberemo da je $L(t) = \max_{t \in I} \|A(t)\|$ iz teoreme Picard-Lindelöf-a imamo jedinstvenost rješenja početnog problema. Dakle, važi sledeća teorema.

Teorema 5. *Linearni sistem 1. reda $\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t)$ sa početnim podatkom $x(t_0) = x_0$ ima jedinstveno rješenje. Štaviše, rješenje je definisano za sve $t \in I$.*

Nama je sada bitno da nađemo generalizaciju rješenja tj. tražimo rješenja koja će da važe i za matrice sa konstantnim koeficijentima čije rješenje znamo da je dato sa $x(t) = e^{tA} \cdot x_0$. Krenućemo od činjenice da je linearna kombinacija rješenja ponovo rješenje. Rješenje početnog problema tj. ono koje odgovara početnom podatku $x(t_0) = x_0$ možemo zapisati u obliku

$$\phi(t, t_0, x_0) = \sum_{j=1}^{n} \phi(t, t_0, e_j) \cdot x_{0,j}$$

gdje su e_j kanonički vektori baze tj. $e_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & k \neq k \end{cases}$ i $x_{0,j}$ su komponente vektora x_0 tj. $x_0 = \sum_{j=1}^{n} e_j \cdot x_{0,j}$. Koristeći rješenja $\phi(t, t_0, e_j)$ kao kolone matrice

$$\Pi(t, t_0) = (\phi(t, t_0, e_1), \phi(t, t_0, e_2), \ldots, \phi(t, t_0, e_n)),$$

vidimo da postoji linearno preslikavanje $x_0 \to \phi(t, t_0, x_0)$ dato sa

$$\boxed{\phi(t, t_0, x_0) = \Pi(t, t_0)\cdot x_0.}$$

Lema 2. $\Pi(t, t_0)$ *je rješenje sledećeg matričnog početnog problema* $\begin{cases} X' = A(t) \cdot X \\ X(t_0) = \mathbb{I} \end{cases}$.

Napomena 1. Primjetimo da rezultati egzistencije i jedinstvenosti važe. U suštini, matrica $X(t)$ zadovoljava jednačinu $X' = A(t) \cdot X$ ako i samo ako svaka kolona $x(t)$ matrice $X(t)$ zadovoljava $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$. Osim toga, za svaku konstantu c, $X(t) \cdot c$, rješava jednačinu $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$.

Teorema 6. *Rješenja sistema* $\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t)$ *formiraju* n*-dimenzionalni vektorski prostor. Osim toga, postoji* **glavna matrica rješenja** $\Pi(t, t_0)$ *takva da su rješenja koja zadovoljavaju početni podatak* $x(t_0) = x_0$ *data sa* $\Pi(t, t_0) \cdot x_0$.

Lema 3. *Za glavnu matricu rješenja važi sledeće:*

a) $\Pi(t, t_1) \cdot \Pi(t_1, t_0) = \Pi(t, t_0)$,

b) $(\Pi(t, t_0))^{-1} = \Pi(t_0, t)$.

Definicija 6. Uzimajući n linearno nezavisnih rješenja $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ početnog problema $\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t)$ definišemo **fundamentalnu matricu rješenja**

$$U(t) = [\phi_1(t)|\phi_2(t)| \ldots |\phi_n(t)].$$

Odavde je $\det(U(t)) \neq 0$ i iz činjenice $\dot{U}(t) = A(t) \cdot U(t)$ tj. $A(t) = \dot{U}(t) \cdot (U(t))^{-1}$, imamo da je diferencijalna jednačina jedinstveno određena sa n linearno nezavisnih rješenja.

Definicija 7. Determinanta za $U(t)$ je

$$W(t) = \det U(t) = \det [\phi_1(t)|\phi_2(t)| \ldots |\phi_n(t)]$$

i zovemo je **Wronski[3]-an**.

Napomena 2. Ako su $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ n linearno nezavisnih rješenja početnog problema $\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t)$, tada je $U(t) = [\phi_1(t)|\phi_2(t)| \ldots |\phi_n(t)]$ fundamentalna matrica rješenja ako i samo ako je $W(t) \neq 0$.

Lema 4. *a) Neka su* $U(t)$ *i* $V(t)$ *dvije fundamentalne matrice rješenja, tada uvijek važi* $V(t) = U(t) \cdot U(t_0)^{-1} \cdot V(t_0)$.

b) Svaka glavna matrica rješenja može se izračunati iz fundamentalne matrice rješenja tj. važi veza $\Pi(t, t_0) = U(t) \cdot U(t_0)^{-1}$.

Sledeća lema nam pokazuje da je dovoljno da provjerimo da li uslov $W(t) = \det U(t) \neq 0$ važi za jedno $t \in \mathbb{R}$.

[3] Jozef Maria Hoene-Wronski (1776-1853), poljski matematičar

Lema 5. (Abel[4]-Liouville[5]-ov identitet) *Wronski-an za n rješenja $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ zadovoljava identitet*

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds} \tag{2.5}$$

za sve $t, t_0 \in I$. $tr(A)$ je **trag** *kvadratne matrice A i predstavlja zbir elemenata na glavnoj dijagonali.*

2.3 Periodični linearni sistemi

Posmatrajmo sistem $\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t), A \in C\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ gdje je $A(t)$ periodična tj.

$$A(t+T) = A(t), \quad T > 0.$$

Ovaj uslov periodičnosti implicira da je $x(t+T)$ ponovo rješenje ako je to i $x(t)$.

Lema 6. *Pretpostavimo da je $A(t)$ periodična sa periodom T. Tada za glavnu matricu rješenja važi*

$$\Pi(t+T, t_0+T) = \Pi(t, t_0).$$

Dokaz. Mi imamo da $\Pi(t, T)$ rješava početni problem tj. važi $\begin{cases} \dot{\Pi}(t, t_0) = A(t) \cdot \Pi(t, t_0) \\ \Pi(t_0, t_0) = \mathbb{I} \end{cases}$.
Sada imamo

1) $\frac{d}{dt}\Pi(t+T, t_0+T) = A(t+T) \cdot \Pi(t+T, t_0+T) = A(t) \cdot \Pi(t+T, t_0+T)$,

2) $\Pi(t_0+T, t_0+T) = \mathbb{I}$.

Dakle, pokazali smo da i $\Pi(t+T, t_0+T)$ rješava početni problem, odakle zbog jedinstvenosti rješenja početnog problema, mora biti $\Pi(t+T, t_0+T) = \Pi(t, T)$, što je trebalo pokazati. □

Posmatrajmo šta se dešava ako se pomjerimo za jedan period T, tj. ako posmatramo **matricu monodromije**

$$M(t_0) = \Pi(t_0+T, t_0).$$

Na osnovu prethodne leme imamo da je $M(t_0)$ periodična odnosno $M(t_0+T) = M(t_0)$.

[4]Niels Henrik Abel (1802-1829), norveški matematičar
[5]Joseph Liouville (1809-1882), francuski matematičar

Dalje, imamo da je

$$
\begin{aligned}
\Pi(t_0+kT,t_0) &= \Pi(t_0+kT,t_0+(k-1)T)\cdot\Pi(t_0+(k-1)T,t_0)\\
&= M(t_0+(k-1)T)\cdot\Pi(t_0+(k-1)T,t_0)\\
&= M(t_0)\cdot\Pi(t_0+(k-1)T,t_0)\\
&= M(t_0)\cdot\Pi(t_0+(k-1)T,t_0+(k-2)T)\cdot\Pi(t_0+(k-2)T,t_0)\\
&= M(t_0)\cdot M(t_0+(k-2)T)\cdot\Pi(t_0+(k-2)T,t_0)\\
&= (M(t_0))^2\cdot\Pi(t_0+(k-2)T,t_0)\\
&= (M(t_0))^k\cdot\Pi(t_0,t_0)=(M(t_0))^k\cdot\mathbb{I}=(M(t_0))^k.
\end{aligned}
$$

Vidimo kako ćemo dobiti rješenja u t_0+kT, ali nam treba da nađemo rješenja i u ostalim trenucima. Stoga, treba da damo značenje za $(M(t_0))^k$ u slučaju kada $\frac{t}{T}=k$ nije cijeli broj. Ako je $M(t_0)$ broj, tada je uobičajeno da označimo $(M(t_0))^{\frac{t}{T}}=e^{\frac{t}{T}\cdot\ln(M(t_0))}$. A ovo će nam dati mogućnost da izračunamo $(M(t_0))^{\frac{t}{T}}$ kao $e^{t\cdot Q(t_0)}$, tj. treba da nađemo matricu $Q(t_0)$ takvu da je $M(t_0)=e^{t\cdot Q(t_0)}$ i $Q(t_0+T)=Q(t_0)$. Formalno, možemo zapisati da je $(M(t_0))^{\frac{t}{T}}=e^{t\cdot Q(t_0)}$ odnosno $Q(t_0)=\frac{1}{T}\cdot\ln(M(t_0))$, ali moramo sada dati smisao ovom izrazu.

Lema 7. *Ako je A matrica formata $n\times n$ takva da je $\det A\neq 0$, tada postoji kompleksna matrica B formata $n\times n$ takva da je $e^B=A$.*

Dokaz. Za svaku matricu A, postoji invertibilna matrica U takva da je $U^{-1}AU=J$, gdje je J Jordan-ova kanonička matrica. Ako je $e^B=A$ tada je $e^{U^{-1}AU}=U^{-1}e^BU=U^{-1}AU=J$. Stoga, dovoljno da je pokažemo da važi tvrđenje kada je A u kanoničkoj formi.

Pretpostavimo da je $A=\operatorname{diag}(A_1,\dots,A_s)$, $A_j=\lambda_j\cdot\mathbb{I}_j+N_j$, gdje je N_j nilpotentna matrica, tj.

$$
N_j=\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&1\\0&0&0&\dots&0\end{bmatrix}
$$

gdje je ${N_j}^{n_j}=0$.

Kako je A invertibilna onda je svako $\lambda_j\neq 0$. Ako pokažemo da za svako A_j postoji B_j takvo da je $A_j=e^{B_j}$ slijediće da je $A=e^B$.

Kako je $A_j=\lambda_j\cdot(\mathbb{I}_j+\frac{N_j}{\lambda_j})$, koristeći razvoj funkcije

$$
\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot x^k,|x|<1
$$

imamo da je

$$\begin{aligned} B_j &= \ln A_j = \ln[\lambda_j \cdot (\mathbb{I}_j + \frac{N_j}{\lambda_j})] \\ &= \mathbb{I}_j \cdot \ln \lambda_j + \ln(\mathbb{I}_j + \frac{N_j}{\lambda_j}) \\ &= \mathbb{I}_j \cdot \ln \lambda_j + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \left(\frac{N^k}{\lambda^k}\right). \end{aligned}$$

Kako je ${N_j}^{n_j} = 0$ imamo da je

$$B_j = \ln A_j = \mathbb{I}_j \cdot \ln \lambda_j + \underbrace{\sum_{k=1}^{n_j-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \left(\frac{N^k}{\lambda^k}\right)}_{=M_j} = \mathbb{I}_j \cdot \ln \lambda_j + M_j, j = 1, 2, \ldots, s.$$

Dakle, imamo da je

$$e^{B_j} = e^{\mathbb{I}_j \cdot \ln \lambda_j + M_j} = e^{\ln A_j} = A_j, j = 1, 2, \ldots, s. \tag{2.6}$$

Neka je sada, $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_j)$, gdje je B_j definisano sa (2.6). Time smo dokazali lemu, jer je

$$e^B = \mathrm{diag}(e^{B_1}, e^{B_2}, \ldots, e^{B_s}) = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s) = A.$$

□

Napomena 3. 1) Prethodnom lemom, definisali smo $B = \ln A$ za $A = e^B$ i naravno ovo će da važi ako je $\det A \neq 0$.

2) Matrica B nije jedinstvena jer

$$\begin{aligned} e^{B+2k\pi i \cdot \mathbb{I}_n} &= e^B \cdot e^{2k\pi i \cdot \mathbb{I}_n} = e^B \cdot e^{2k\pi i} \cdot \mathbb{I}_n \\ &= e^B \cdot e^{2k\pi i} = e^B, \text{ za svako } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vratimo se sada našoj temi. Mi smo rekli da je $Q(t_0) = \frac{1}{T} \cdot \ln(M(t_0))$, i kao što smo vidjeli ovo je moguće ako i samo ako je $\det(M(t_0) \neq 0$ prema prethodnoj lemi, kao i to da matrica $Q(t_0)$ nije jedinstvena. Prema Abel-Liouville-ovom identitetu imamo da je $\det(M(t_0)) \neq 0$ što implicira da je determinanta matrica monodromije nezavisna od t_0 i pozitivna jer

$$\det(M(t_0)) = e^{\int_{t_0}^{t_0+T} tr(A(s))ds} = e^{\int_0^T tr(A(s))ds} > 0.$$

Konačno pokažimo da definisanjem

$$\Pi(t, t_0) = P(t, t_0) \cdot e^{(t-t_0) \cdot Q(t_0)}$$

tj.

$$P(t, t_0) = \Pi(t, t_0) \cdot e^{-Q(t_0)(t-t_0)}$$

imamo periodičnost matrice $P(t, t_0)$.

$$\begin{aligned}
P(t+T, t_0) &= \Pi(t+T, t_0) \cdot e^{-Q(t_0)\cdot((t+T)-t_0)} \\
&= \Pi(t+T, t_0) \cdot e^{-Q(t_0)\cdot T} \cdot e^{-Q(t_0)(t-t_0)} \\
&= \left(\Pi(t+T, t_0) \cdot e^{-Q(t_0)\cdot T}\right) \cdot e^{-Q(t_0)(t-t_0)} \\
&= \Pi(t+T, t_0+T) \cdot e^{-Q(t_0)(t-t_0)} \\
&= \Pi(t, t_0) \cdot e^{-Q(t_0)(t-t_0)} = P(t, t_0).
\end{aligned}$$

Time smo dokazali sledeće tvrđenje.

Teorema 7. (Teorema Floquet[6]-a) *Neka je matrica $A(t)$ periodična. Tada je glavna matrica rješenja odgovarajućeg linearnog sistema oblika*

$$\Pi(t, t_0) = P(t, t_0) \cdot e^{(t-t_0)\cdot Q(t_0)}$$

gdje $P(\cdot, t_0)$ ima isti period kao $A(\cdot)$ i važi $P(t_0, t_0) = \mathbb{I}$.

Primjer 3. Razmotrimo sada jednodimenzionalan slučaj tj.

$$\dot{x} = a(t) \cdot x, \text{ gdje je } a(t+T) = a(t).$$

Prvo izračunamo glavnu matricu rješenja i dobijamo da je $\Pi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$. Tada je,

$$M(t_0) = \Pi(t_0+T, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_0+T} a(s)ds} = e^{\int_0^T a(s)ds} := e^{T\cdot\tilde{a}}.$$

Sada,

$$Q(t_0) = \frac{1}{T}\ln(M(t_0)) = \frac{1}{T}\ln e^{\int_0^T a(s)ds} = \frac{1}{T}\int_0^T a(s)ds = \tilde{a}.$$

Konačno dobijamo da je

$$P(t, t_0) = \Pi(t, t_0) \cdot e^{-Q(t_0)\cdot(t-t_0)} = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \cdot e^{-\tilde{a}\cdot(t-t_0)} = e^{\int_{t_0}^{t}(a(s)-\tilde{a})ds}.$$

Posljedica 1. *Transformacija*

$$y(t) = P(t, t_0)^{-1} \cdot x(t)$$

prevodi sistem $\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t)$ i $A(t+T) = A(t)$ u sistem sa konstantnim koeficijentima

$$\dot{y}(t) = Q(t_0) \cdot y(t).$$

Dokaz. Neka je $\Pi(t, t_0) = P(t, t_0) \cdot e^{Q(t_0)\cdot(t-t_0)}$.

Stavimo da je

$$y(t) = P(t, t_0)^{-1} \cdot x(t) = e^{Q(t_0)\cdot(t-t_0)} \cdot x(t_0).$$

[6]Gaston Floquet (1847-1920), francuski matematičar

Tada je

$$\dot{y}(t) = Q(t_0) \cdot e^{Q(t_0)\cdot(t-t_0)} \cdot x(t_0) = Q(t_0) \cdot y(t).$$

Još je,

$$y(t_0) = P(t_0, t_0)^{-1} \cdot x(t_0) = x(t_0).$$

pa dobijamo da je $y(t)$ rješenje za sistem $\dot{y}(t) = Q(t_0) \cdot y(t)$. $\square$

2.4 Stabilnost rješenja linearnih periodičnih sistema

Kako bismo razumjeli ponašanje rješenja trebamo shvatiti Jordan-ovu kanoničku formu matrice $M(\cdot)$. Štaviše možemo izabrati bilo koje t_0 jer su matrice $M(t_0)$ i $M(t_1)$ *slične*[7] jer

$$\begin{aligned} M(t_1) &= \Pi(t_1 + T, t_0 + T) \cdot M(t_0) \cdot \Pi(t_0, t_1) = \\ &= \Pi(t_1, t_0) \cdot M(t_0) \cdot \Pi(t_1, t_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Dakle, karakteristični korijeni i Jordan-ova struktura su nezavisne od t_0, pa isto važi i za $Q(t_0)$.

Definicija 8. Karakteristični korijeni ρ_j matrice $M(t_0)$ zovemo **Floquet-ovi množioci** (ili *karakteristični množioci*), a karakteristične korijene γ_j matrice $Q(t_0)$ zovemo **Floquet-ovi eksponenti** (ili *karakteristčni eksponenti*).

Lema 8. *Vektor u je karakteristični vektor matrice A koji odgovara karakterističnoj vrijednosti α ako i samo ako je u karakteristični vektor matrice e^A koji odgovara karakterističnoj vrijednosti e^α.*

Znamo da je $Q(t_0) = \frac{1}{T} \cdot \ln M(t_0)$ odnosno $M(t_0) = e^{T\cdot Q(t_0)}$ pa iz prethodne leme imamo da važi odnos $\rho_j = e^{T\cdot\gamma_j}$.

Teorema 8. *Periodični linearni sistem je stabilan ako svi Floquet-ovi množioci zadovoljavaju $|\rho_j| \leq 1$ (odnosno ako svi Floquet-ovi eksponenti zadovoljavaju $Re(\gamma_j) \leq 0$) i svi Floquet-ovi množioce sa $|\rho_j| = 1$ (odnosno svi Floquet-ovi eksponenti sa $Re(\gamma_j) = 0$ imaju istu algebarsku i geometrijsku višestrukost.*

Periodični linearni sistem je asimptotski stabilan ako svi Floquet-ovi množioci zadovoljavaju $|\rho_j| < 1$ (tj. svi Floquet-ovi eksponenti $Re(\gamma_j) < 0$).

Dokaz. Znamo da je, linearni sistem *stabilan* ako sva rješenja ostaju ograničena kada $t \to \infty$, a *asimptotski stabilan* ako sva rješenja konvergiraju ka 0 kada $t \to \infty$.

Dokaz teoreme slijedi iz činjenice da je

$$\Pi(t, t_0) = P(t, t_0) \cdot e^{Q(t_0)\cdot(t-t_0)}$$

[7]Matrice A i B su **slične** u oznaci $A \sim B$ ako postoji invertibilna matrica S takva da je $A = S^{-1}BS$.

gdje je $P(t, t_0)$ periodična i neprekidna, pa samim tim i ograničena matrica. Stoga, ograničenost matrice $\Pi(t, t_0)$ za sve t i činjenica da $\|\Pi(t, t_0)\| \to 0$, $t \to \infty$ određena je samo osobinom karakterističnih vrijednosti matrice $Q(t_0)$.

Primjetimo da su zahtjevi u teoremi isti kao zahtjevi za stabilnost i asimptotsku stabilnost linearnog sistema $\dot{x} = Q(t_0) \cdot x$, gdje je $Q(t_0)$ konstantna matrica. Ako je ovaj sistem stabilan (asimptotski stabilan) tada je i originalni periodični sistem stabilan (asimptotski stabilan), pa važi tvrđenje. $\square$

Primjer 4. U ovom primjeru izračunaćemo matricu $M(t_0)$ za sistem $\dot{x} = A(t) \cdot x$ gdje je $A(t)$ periodična sa periodom 1 i data sa

$$A(t) = \begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ A_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \leq t < 1, \end{cases} \quad \text{gdje } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Prvo, $e^{A_1 \cdot t} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $e^{A_2 \cdot t} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}$.

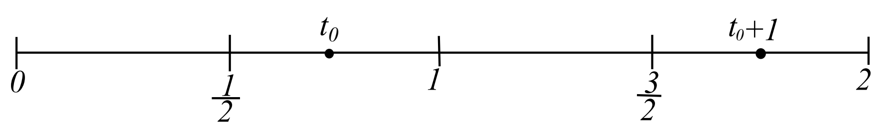
Zatim,

$$\Pi_1(t, t_0) = e^{A_1(t - t_0)} = e^{\alpha(t - t_0)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t - t_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ za } t, t_0 \in [0, \frac{1}{2})$$

i

$$\Pi_2(t, t_0) = e^{A_2(t - t_0)} = e^{\alpha(t - t_0)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t - t_0 & 1 \end{bmatrix} \text{ za } t, t_0 \in [\frac{1}{2}, 1).$$

Izračunajmo sada $M(t_0) = \Pi(t_0 + 1, t_0)$.



- Za $t_0 \in [0, \frac{1}{2})$:

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \Pi(t_0 + 1, t_0) = \Pi_1(t_0 + 1, 1) \cdot \Pi_2\left(1, \frac{1}{2}\right) \cdot \Pi_1\left(\frac{1}{2}, t_0\right) \\ &= e^{A_1(t_0 + 1 - 1)} \cdot e^{A_2(1 - \frac{1}{2})} \cdot e^{A_1(\frac{1}{2} - t_0)} \\ &= e^{A_1 t_0} \cdot e^{A_2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot e^{A_1(\frac{1}{2} - t_0)} \\ &= e^{\alpha} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - t_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{\alpha} \begin{bmatrix} \frac{t_0}{2} + 1 & \frac{1}{2} - \frac{t_0}{2} \cdot (t_0 - \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} - \frac{t_0}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- Za $t_0 \in [\frac{1}{2}, 1)$:

$$\begin{aligned}
M(t_0) &= \Pi(t_0+1, t_0) = \Pi_2\left(t_0+1, \frac{3}{2}\right) \cdot \Pi_1\left(\frac{3}{2}, 1\right) \cdot \Pi_2\left(1, t_0\right) \\
&= e^{A_2(t_0+1-\frac{3}{2})} \cdot e^{A_1(\frac{3}{2}-1)} \cdot e^{A_2(1-t_0)} \\
&= e^{A_2(t_0-\frac{1}{2})} \cdot e^{A_1 \cdot \frac{1}{2}} \cdot e^{A_2(1-t_0)} \\
&= e^{\alpha} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_0 - \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-t_0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= e^{\alpha} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{t_0}{2} & \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{4} + \frac{t_0}{2}(\frac{3}{4} - t_0) & \frac{t_0}{2} + \frac{3}{4} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Interval između t_0 i t_0+1 smo podijelili na 3 intervala sa različitim izrazima zbog $\Pi(t, t_0)$. Njih smo morali kombinovati iz razloga što $A(t)$ nije neprekidna, a sve to kako bismo izračunali $M(t_0)$.

Još ćemo da ispitamo za koje vrijednosti $\alpha \in \mathbb{C}$ je dati sistem stabilan. Kako su matrice $M(t_0)$ za različite t_0 slične dovoljno nam je da ispitamo stabilnost za jedno t_0, pa izaberimo $t_0 = 0$. Tada,

$$M(0) = e^{\alpha} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

Računamo i imamo da je za ovu matricu $M(0)$

$$\begin{aligned}
|\rho \cdot \mathbb{I} - M(0)| = \begin{vmatrix} \rho - e^{\alpha} & \frac{e^{\alpha}}{2} \\ \frac{e^{\alpha}}{2} & \rho - \frac{5e^{\alpha}}{4} \end{vmatrix} &= e^{\alpha}\left((\rho-1)(\rho-\frac{5}{4}) - \frac{1}{4}\right) \\
&= e^{\alpha}\left(\rho^2 - \frac{5}{4}\cdot\rho - \rho + \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
&= e^{\alpha}\left(\rho^2 - \frac{9}{4}\cdot\rho + 1\right).
\end{aligned}$$

Dobijamo da su karakteristični korijeni $\rho_{1,2} = e^{\alpha} \cdot \frac{9 \pm \sqrt{17}}{8}$ pa iz prethodno dokazane teoreme imamo da je sistem stabilan, ako je

$$\begin{aligned}
|\rho_{1,2}| &\leq 1 \\
e^{\alpha}\left(\frac{9}{8} + \frac{\sqrt{17}}{8}\right) &\leq 1 \\
Re(\alpha) &\leq \ln\left(\frac{8}{9+\sqrt{17}}\right) \\
Re(\alpha) &\leq -0.49.
\end{aligned}$$

Glava 3

Dinamički sistemi i lokalni tok

Za početak uvešćemo pojam dinamičkog sistema i nekoliko različitih tipova stabilnosti (obična ili Liapunov-ljeva, asimptotska, eksponencijalna). Definisaćemo lokalni tok diferencijalne jednačine i predstaviti tok autonomne jednačine kao dinamički sistem. Definisaćemo granične skupove i uvešćemo pojam orbite (unaprijed i unazad), kako bismo sve to mogli iskoristiti pri detaljnijoj analizi graničnih ciklusa, o čemu će više biti riječi u narednoj glavi. Na samom kraju pokazaćemo kako koristeći Liapunov[1]-ljevu funkciju možemo pokazati (ne)postojanje periodičnog rješenja.

3.1 Dinamički sistemi

O **dinamičkim sistemima** možemo razmišljati kao o fizičkim sistemima u stanju kretanja, kao npr. kretanje nekoliko planeta pod uticajem njihovih gravitacionih sila. Nas u suštini interesuje njihovo ponašanje na velikom vremenskom intervalu tj. da li će planete možda negdje da se sudare ili da li će sistem u opšem slučaju da postoji na cijelom vremenskom intervalu. Za neke sisteme, odgovor na ova pitanja je prilično jednostavan, ali za mnoge, nauci interesantne sisteme, na veoma malim vremenskim intervalima, mogu da se dešavaju ogromne promjene. Tačnije veoma malim promjenama u početnim uslovima, mogu da odgovaraju ogromne promjene u ponašanju sistema. Na primjer, Edward Lorenz[2]je tvrdio da su meteorološke prilike toliko kompleksni i nepredvidivi sistemi da leptir mahanjem krila može da izazove uragan. Zamislimo slučaj da leptir maše krilima u Pekingu, a da se vreme promijeni u Njujorku. Mahanje leptirovih krila prouzrokuje neznatne poremećaje (vibracije) u atmosferi, ali pretpostavimo da taj, naizgled minorni činilac, može da izazove čitav niz znatnih promjena.

Daćemo sada preciznu definiciju dinamičkog sistema.

[1]Aleksandr Liapunov (1857-1918), ruski matematičar
[2]Edward Lorenz (1917-2008), američki matematičar i meteorolog

Definicija 9. Dinamički sistem je polugrupa $(G, \circ)$ sa jediničnim elementom e koja djeluje na skupu M, tj. postoji preslikavanje

$$\begin{aligned} T : G \times M &\to M \\ (g, x) &\to T_g(x) \end{aligned}$$

za koje važi

$$\begin{aligned} T_e &= \mathbb{I} \\ T_g \circ T_h &= T_{g \circ h}. \end{aligned}$$

Ako je $(G, \circ)$ grupa, govorićemo o *invertibilnim* dinamičkim sistemima. Posebno su interesantni *diskretni* dinamički sistemi gdje je $G = \mathbb{N}_0$ ili $G = \mathbb{Z}$, ali i *neprekidni* dinamički sistemi gdje je $G = \mathbb{R}^+$ ili $G = \mathbb{R}$.

Primjer neprekidnog dinamičkog sistema je tok autonomne diferencijalne jednačine o čemu ćemo više saznati u sledećem poglavlju.

3.2 Tok autonomne jednačine kao dinamički sistem

3.2.1 Maksimalan interval egzistencije rješenja

Posmatraćemo rješenja autonomnog sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Iz teoreme Picard-Lindelöf-a znamo da ako je $f \in C(U)$ gdje je U otvoren i f Lipschitz neprekidna, tada početni problem (3.1) ima jedinstveno rješenje. Ovdje ćemo sada pokazati da je to jedinstveno rješenje definisano na *maksimalnom intervalu egzistencije*. Sada ćemo ispitati postojanje i osnovne osobine maksimalnog intervala egzistencije početnog problema (3.1).

Lema 9. *Neka je U otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ koji sadrži x_0 i pretpostavimo da postoji jedinstveno rješenje početnog problema (3.1). Neka su $\phi_1(t)$ i $\phi_2(t)$ rješenja početnog problema (3.1) na otvorenim intervalima I_1 i I_2, respektivno. Tada $0 \in I_1 \cap I_2$ i ako je I proizvoljan interval koji sadrži 0 i sadržan je u $I_1 \cap I_2$, tada slijedi da je $\phi_1 = \phi_2$ za sve $t \in I$.*

Teorema 9. *Neka je U otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ koji sadrži x_0 i pretpostavimo da postoji jedinstveno rješenje početnog problema (3.1). Tada za svaku tačku $x_0 \in U$, postoji maksimalan interval J na kojem početni problem (3.1) ima jedinstveno rješenje $x(t)$, tj. ako početni problem ima rješenje $y(t)$ na intervalu I tada je $I \subset J$ i $y(t) = x(t)$ za sve $t \in I$. Štaviše, maksimalan interval egzistencije J je otvoren tj. $J = (T_-, T_+)$.*

Definicija 10. Interval $J = (T_-, T_+)$ iz Teoreme 8. zove se **maksimalan interval egzistencije** rješenja $x(t)$ početnog problema (3.1).

Primjer 5. Početni problem

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1$$

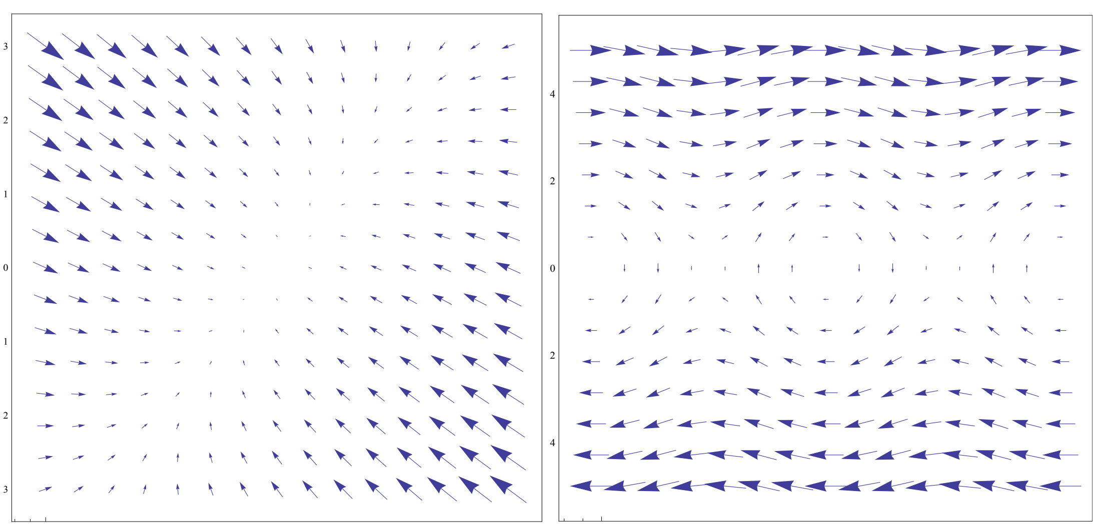
ima rješenje $x(t) = \frac{1}{1-t}$ definisano na maksimalnom intervalu egzistencije $(T_-, T_+) = (-\infty, 1)$.

Teorema 10. *Pretpostavimo da početni problem (3.1) ima jedinstveno lokalno rješenje (tj. da važe uslovi teoreme Picard-Lindelöf-a). Tada postoji jedinstveno maksimalno rješenje definisano na nekom maksimalnom intervalu egzistencije* $I_{(t_0,x_0)} = (T_-(t_0, x_0), T_+(t_0, x_0))$.

Definicija 11. Rješenje definisano u prethodnoj teoremi zove se **maksimalno rješenje**.

3.2.2 Tok autonomne jednačine, orbite i granični skupovi

Kao što smo i do sad naveli posmatramo početni problem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$, s tim što ćemo u daljem radu pretpostaviti da $f \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, pri čemu je M otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Uz ove pretpostavke, sistem se može smatrati kao **vektorsko polje** nad $\mathbb{R}^n$. Rješenja, tj. krive u $M \subseteq \mathbb{R}^n$ su tangente na ovo vektorsko polje u svakoj tački. Koristeći program *Mathematica* na slici ispod dali smo primjer dva vektorska polja i to $f(x, y) = (-3x + \sqrt{2} \cdot y, \sqrt{2} \cdot x - 2y)$ i $f(x, y) = (y, -\sin x)$.



Kao što smo već definisali u poglavlju 3.2.1. rješenja početnog problema (3.1) zovemo **trajektorije** ili **integralne krive**. Na osnovu Teoreme 10. imamo da postoji (jedinstvena) **maksimalna integralna kriva** ϕ_x u svakoj tački x, definisana na maksimalnom intervalu $I_x = (T_-(x), T_+(x))$.

Teorema 11. (Lokalni tok). *Pretpostavimo da $f \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$. Za sve $x \in M$ postoji interval $I_x \subset \mathbb{R}$ koji sadrži nulu i postoji odgovarajuća jedinstvena maksimalna integralna kriva $\Phi(., x) \in C^k(I_x, M)$ u x. Štaviše, skup W definisan sa*

$$W = \bigcup_{x \in M} I_x \times \{x\} \subseteq \mathbb{R} \times M$$

je otvoren i $\Phi \in C^k(W, M)$ je lokalni tok na M, tj.

$$\begin{aligned} \Phi(0, x) &= x, \\ \Phi(t + s, x) &= \Phi(t, \Phi(s, x)), \quad s, s + t \in I_x, \end{aligned}$$

i za sve $x \in M$.

Definicija 12. Tačka $x_0 \in M$ za koju važi da je $f(x_0) = 0$ zovemo **fiksna tačka** (singularna tačka, stacionarna tačka ili tačka ekvilibrijuma) sistema (3.1). U suprotnom, tačka x_0 je **regularna tačka**.

Definicija 13. Orbita unaprijed tačke x je definisana kao

$$\gamma_+(x) = \Phi((0, T_+(x)), x)$$

i analogno **orbita unazad** se definiše kao

$$\gamma_-(x) = \Phi((0, T_-(x)), x).$$

Orbita tačke x definisana je sa

$$\gamma(x) = \gamma_+(x) \cup \{x\} \cup \gamma_-(x) = \Phi(I_x \times \{x\}) \subseteq M.$$

Primjetimo da ako $y \in \gamma(x)$ imamo da

$$\exists t \neq 0 : \Phi(t, x) = y = \Phi(0, y) = \Phi(t - t, y) = \Phi(t, \Phi(-t, y))$$

odakle je $x = \Phi(-t, y)$ pa $x \in \gamma(y)$. Stoga, slijedi da je $\gamma(x) = \gamma(y)$. Dakle, mi imamo relaciju ekvivalenciju na M: $x \simeq y$ ako $\gamma(x) = \gamma(y)$.

Ako je $\gamma(x) = \{x\}$, tada je tačka x fiksna tačka tj. imamo **fiksnu orbitu**. Ako postoji $T > 0$ tako da je $\Phi(T, x) = x = \Phi(0, x)$ reći ćemo da je $x \in M$ **periodična tačka**. Period $T(x)$ tačke x se definiše kao

$$T(x) = \inf\{T > 0 | \Phi(T, x) = x\}.$$

Iz neprekidnosti toka Φ imamo da je $\Phi(T(x), x) = x$ i ponovo iz osobina toka imamo da je $\Phi(2T, x) = \Phi(T, \Phi(T, x)) = \Phi(T, x) = x$. Ako je tačka x periodična tačka, onda je i svaka tačka $y \in \gamma(x)$ periodična sa istim periodom jer

$$y = \Phi(t, x) = \Phi(T(x) + t, x) = \Phi(T(x), \Phi(t, x)) = \Phi(T(x), y)$$

odakle dobijamo da je cijela orbita periodična pa je orbita ustvari *kontura*. Osim fiksnih i periodičnih orbita, imamo još i **nezatvorene orbite** koje nemaju periodičnih tačaka.[3]

[3]Fiksne orbite odgovaraju tačkama sa periodom 0, a periodične orbite tačkama sa pozitivnim periodom.

Definicija 14. (Granični skupovi) Granični skup $\omega_{\pm}(x)$ tačke $x \in M$ je skup tačaka nagomilavanja orbite za $t \to \infty$ tj.

$$\omega_{\pm}(x) = \{y \in M | \exists t_n \to \pm\infty : \Phi(t_n, x) \to y\}.$$

3.3 Linearizacija nelinearnih autonomnih sistema

Posmatrajmo nelinearni autonomni sistem $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$. Dobar početak za analiziranje nelinearnog sistema jeste određivanje fiksnih tačaka i opisivanje ponašanja sistema u njihovoj okolini. Ali prije nego što vidimo kako se ponašaju linearni sistemi u okolini fiksnih tačaka navešćemo sledeću teoremu koja će nam pomoći u tome, a čiji ćemo dokaz izostaviti, a može se naći u [1].

Teorema 12. *Posmatrajmo nehomogeni sistem $\dot{x} = A(t) \cdot x + g(t,x)$. Neka glavna matrica rješenja $\Pi_A(t,s)$ koja odgovara sistemu za $\dot{x} = A(t) \cdot x$ tj. početnom sistemu za $g(t,x) = 0$, zadovoljava ocjenu*

$$\|\Pi_A(t,s)\| \leq C \cdot e^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s \geq 0, \quad C, \alpha > 0.$$

Pretpostavimo dalje da je

$$|g(t,x)| \leq b_0 \cdot x, \quad |x| < \delta, \quad t \geq 0$$

za neko $0 < \delta \leq \infty$. Tada, ako je $b_0 \cdot C < \alpha$, rješenje $x(t)$ koje počinje u $x(0) = x_0$ zadovoljava ocjenu

$$\|x(t)\| \leq D \cdot e^{-(\alpha - b_0 \cdot C)} \cdot |x_0|, \quad |x_0| < \frac{\delta}{C}, \quad t \geq 0$$

za neku konstantu $D > 0$.

Vratimo se sada našem autonomnom nelinearnom sistemu $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $f(0) = x_0 = 0$ jer svaki drugi slučaj smjenom promjenljivih možemo svesti na ovaj. Pretpostavimo da je f neprekidno diferencijabilna funkcija, odakle korišćenjem Taylor[4]-ovog razvoja funkcije f u okolini tačke x_0 imamo

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|), \; x \to x_0,$$

odakle za $x_0 = 0$ dobijamo

$$f(x) = Df(0) \cdot x + o(|x|), \; |x| \to 0.$$

[4]Brook Taylor (1685-1731), engleski matematičar

Dobili smo na osnovu prethodne teoreme, da je $g(x) = o(|x|),\ |x| \to 0$ tj. $\frac{g(x)}{|x|} \to 0,\ |x| \to 0$ pa stoga možemo naći $\delta > 0$ tako da za svako $|x| < \delta$ imamo da je $\left|\frac{g(x)}{x}\right| < b_0$. Dakle, možemo zaključiti da je

$$f(x) \approx Df(0) \cdot x, \text{ za sve } |x| < \delta.$$

Dobili smo da je

$$\dot{x} = Df(0) \cdot x + o(|x|),\ |x| \to 0$$

gdje je $Df(0)$ konstantna Jacobi-eva matrica i osim toga važi ocjena

$$|o(|x|)| \leq M \cdot |x| \text{ za sve } |x| \leq \delta.$$

Dakle, nelinearni sistem se u okolini fiksnih tačaka ponaša kao i svoja linearizacija u toj tački. Ovim smo dokazali sledeću teoremu.

Teorema 13. *Pretpostavimo da neprekidno diferencijabilna funkcija f zadovoljava $f(0) = 0$ i pretpostavimo da svi karakteristični korijeni Jacobi*[5]*-eve matrice $Df(0)$ imaju negativne realne dijelove. Tada postoji $\delta > 0$ i $\alpha > 0$ takvi da rješenje sistema*

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(0) = x_0$$

zadovoljava ocjenu

$$|x(t)| \leq C \cdot e^{-\alpha t} \cdot |x_0|, \quad |x_0| \leq \delta.$$

Primjer 6. Posmatrajmo nelinearni sistem

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} {x_1}^2 - {x_2}^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Očigledno je da je $f(x) = 0$ za $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Daljim izračunavanjem dobijamo da je Jacobi-eva matrica data sa

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

odakle je onda $Df(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ i $Df(-1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Stoga, tačka $(1,0)$ je izvor, a tačka $(-1,0)$ je sedlo za ovaj nelinearni sistem.

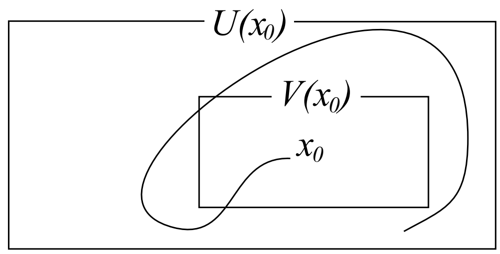
3.4 Liapunov-ljeve funkcije i stabilnost

Jedno od ključnih pitanja koje sebi postavljamo jeste kako se ponašaju dinamički sistemi na velikim vremenskim intervalima. U suštini, uglavnom nas zanima da li su rješenja *stabilna* ili ne.

[5]Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), njemački matematičar

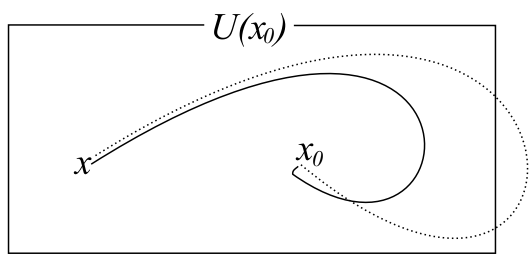
Definicija 15. Neka je $f(x_0) = 0$. Tada kažemo da je tačka x_0:

1) **(Liapunov) stabilna** ako za svaku okolinu $U(x_0)$ postoji okolina $V(x_0) \subseteq U(x_0)$ takva da svako rješenje koje počinje u $V(x_0)$ ostaje u $U(x_0)$ za sve $t \geq 0$ ili ekvivalentno, ako za sva rješenja $\Phi(t)$ vazi da $\Phi(0) \in V$ onda $\Phi(t) \subseteq U,\ t \geq 0$.



2) **Asimptotski stabilna** ako je *stabilna* i ako postoji okolina $U(x_0)$ takva da je

$$\lim_{t\to\infty} |\Phi(t,x) - x_0| = 0, \text{ za sve } x \in U(x_0).$$



Primjetimo da ako ne pretpostavimo stabilnost, sam uslov

$$\lim_{t\to\infty} |\Phi(t,x) - x_0| = 0, \text{ za sve } x \in U(x_0)$$

nije dovoljan, jer se može desiti da rješenje napusti okolinu $U(x_0)$, što je prikazano na slici iznad.

3) **Eksponencijalno stabilna** ako postoje konstante $\alpha, \delta, C > 0$ takve da je

$$|\Phi(t,x) - x_0| \leq C \cdot e^{-\alpha t} \cdot |x - x_0|, \qquad |x - x_0| \leq \delta.$$

Primjetimo još da eksponencijalna stabilnost implicira kako stabilnost tako i asimptotsku stabilnost.

Sledeću teoremu koja se često koristi pri ispitivanju stabilnosti navodimo bez dokaza koji se može se naći u [1].

Teorema 14. *Pretpostavimo da $f \in C^1$ ima fiksnu tačku i da svi karakteristični korijeni Jacobi-eve matrice u tački x_0 imaju negativne realne dijelove. Tada je tačka x_0 eksponencijalno stabilna.*

Definicija 16. Neka je x_0 fiksna tačka funkcije f i neka je $U(x_0)$ otvorena okolina tačke x_0. **Liapunov-ljeva funkcija** je neprekidna funkcija

$$L : U(x_0) \to \mathbb{R}_0$$

za koju je

- $L(x_0) = 0$
- $L(x) > 0$ za $x \neq x_0$

i koja zadovoljava

$$L(\Phi(t_0)) \geq L(\Phi(t_1)), \quad t_0 < t_1, \quad \Phi(t_j) \in U(x_0) \backslash \{x_0\}, \tag{3.2}$$

za svako rješenje $\Phi(t)$. Ako se jednakost u (3.2) nikad ne dostiže onda kažemo da je L **striktna Liapunov-ljeva funkcija**.

Primjetimo još da ako imamo striktnu Liapunov-ljevu funkciju onda u $U(x_0)\backslash x_0$ nemamo periodične orbite jer znamo da je periodična orbita kontura i za njih vazi $\Phi(0, x) = \Phi(T, x)$, a kod striktne Liapunov-ljeve funkcije se jednakost nikada ne dostiže.

Teorema 15. (Liapunov) *Pretpostavimo da je x_0 fiksna tačka funkcije f. Ako postoji Liapunov-ljeva funkcija L onda je tačka x_0 stabilna.*

Veliki broj Liapunov-ljevih funkcija će biti diferencijabilan. Imamo da je,

$$\frac{d}{dt}[L(\Phi(t, x))] = \nabla L(\Phi(t, x)) \cdot \frac{d}{dt}\Phi(t, x) = \nabla L(\Phi(t, x)) \cdot f(\Phi(t, x)).$$

Poslednji izraz u formuli iznad, zovemo **Lie[6]-v izvod** funkcije L duž vektorskog polja f. Kod diferencijabilnih Liapunov-ljevih funkcija uslov (3.2) je ekvivalentan sa

$$\frac{d}{dt}[L(\Phi(t, x))] = \nabla L(\Phi(t, x)) \cdot f(\Phi(t, x)) \leq 0.$$

Napomena 4. U slučaju kada je Lie-v izvod $\nabla L \cdot f = 0$ tada su funkcije L konstante tj. $L = const.$ jer sve orbite posmatranog sistema leže na površima u $\mathbb{R}^n$ (ili krivama u $\mathbb{R}^2$) definisanim sa $L = c$, pa se zbog toga zovu i *konstante kretanja*.

Primjer 7. Posmatrajmo sistem

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -2x_2 + x_2 \cdot x_3 \\
\dot{x}_2 &= x_1 - x_1 \cdot x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_1 \cdot x_2.
\end{aligned}$$

[6]Marius Sophus Lie (1842-1899), norveški matematičar

Koordinatni početak je fiksna tačka sistema i

$$Df(0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $Df(0)$ ima karakteristične korijene $\alpha_1 = 0, \alpha_{2,3} = \pm 2i$. Ovdje se sada postavlja pitanje kako i na koji način pronaći pogodnu Liapunov-ljevu funkciju. Funkcija oblika

$$L(x_1, x_2, x_3) = c_1 \cdot {x_1}^2 + c_2 \cdot {x_2}^2 + c_3 \cdot {x_3}^2$$

gdje su konstante c_1, c_2, c_3 pozitivne, uglavnom nam može biti od pomoći, bar onda kada sistem sadrži i linearne članove. Sada, računajući $\nabla L \cdot f$ dobijamo da je

$$\frac{1}{2} \cdot \nabla L \cdot f(x_1, x_2, x_3) = (c_1 + c_2 - c_3)x_1 x_2 x_3 + (-2c_1 + c_2)x_1 x_2.$$

Stoga, ako je $c_2 = 2c_1$ i $c_3 = c_1 > 0$ dobijamo da je $L(x_1, x_2, x_3) > 0$ za $x \neq 0$ i da je $\nabla L \cdot f(x_1, x_2, x_3) = 0$ na $\mathbb{R}^3$. Odatle, dobijamo da je L Liapunov-ljeva funkcija i da je tačka $x = 0$ stabilna. Štaviše, birajući $c_1 = c_3 = 1$ i $c_2 = 2$, vidimo da trajektorije ovog sistema leže na elipsoidu

$${x_1}^2 + 2{x_2}^2 + {x_3}^2 = c^2.$$

Primjer 8. Birajući pogodnu Liapunov-ljevu funkciju pokazaćemo da sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 4y \\ \dot{y} &= -x - y^3 \end{aligned}$$

nema zatvorenih orbita odnosno periodičnih rješenja. Pokazaćemo da postoji striktna Liapunov-ljeva funkcija odakle će slijediti da ne postoje periodične orbite. Posmatrajmo

$$L(x, y) = x^2 + a \cdot y^2.$$

Tada,

$$\begin{aligned} \nabla L \cdot f &= (2x, 2ay) \cdot (-x + 4y, -x - y^3) \\ &= -2x^2 + 8xy - 2axy - 2ay^2 \\ &= -2x^2 + (8 - 2a)xy - 2ay^2. \end{aligned}$$

Birajući da je $a = 4$ dobijamo da je

$$\nabla L \cdot f = -2x^2 - 8y^2$$

pa kako je $L(x, y) > 0$ i $\nabla L \cdot f < 0$ za $(x, y) \neq (0, 0)$ pronašli smo striktnu Liapunov-ljevu funkciju pa ne postoje zatvorene orbite. Štaviše sve trajektorije ovog sistema teže koordinatnom početku kada $t \to \infty$.

3.5 Primjena periodičnih sistema u biologiji

Sada ćemo obraditi jedan od najpoznatijih modela, kod kojih se javljaju periodična rješenja, odnosno zatvorene trajektorije, a to je **Lotka[7]-Volterra[8] model**, poznat i kao **model lovac-žrtva**.

Neka je $x(t)$ broj jedinki **žrtava** u trenutku t i neka je $y(t)$ broj jedinki **lovaca** u trenutku t, npr. x-ribe, a y-ajkule. U konstrukciji modela interakcije dvije vrste, pretpostavimo sledeće:

- U nedostatku broja jedinki lovaca, broj žrtava raste proporcionalno trenutnom broju jedinki tj. po modelu $\dot{x}(t) = a \cdot x(t), a > 0$.
- U nedostatku žrtve lovci izumiru jer nema hrane, pa je stoga $\dot{y}(t) = -c \cdot y(t)$,$c > 0$ kada je $x = 0$.
- Svaki susret lovaca i žrtava dovodi do smanjenja broja žrtava (pojeli su ih) i do povećanja broja lovaca (preživjeli su jer imaju hrane). Broj susreta proporcionalan je proizvodu broja lovaca i žrtava (xy). Broj lovaca se povećava članom oblika γxy, dok se broj žrtava smanjuje sa članom $-\alpha xy$, gdje su $\gamma, \alpha > 0$.

Kao posljedicu ovih pretpostavki dobijamo sledeće jednačine:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax - \alpha xy = x(a - \alpha y) \\ \dot{y}(t) &= -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Konstante a, c, γ, α su sve pozitivne i a predstavlja faktor brzine rasta žrtava, c predstavlja faktor brzine odumiranja lovaca, dok α, γ predstavljaju mjeru međusobne interakcije između ove dvije vrste. Jednačine (3.3) su poznate kao Lotka-Volterr-a jednačine.

Izvršićemo sada analizu sistema. Fiksne tačke sistema su $(0, 0)$ i $(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha})$. Ispitajmo prvo ponašanje rješenja sistema u okolini fiksnih tačaka. Linearizujemo prvo oko tačke $(0, 0)$. U okolini koordinatnog početka imamo $x \approx 0$ i $y \approx 0$ pa je $xy \approx 0$ pa se sistem u okolini $(0, 0)$ svodi na

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax \\ \dot{y} &= -cy \end{aligned} \tag{3.4}$$

tj.

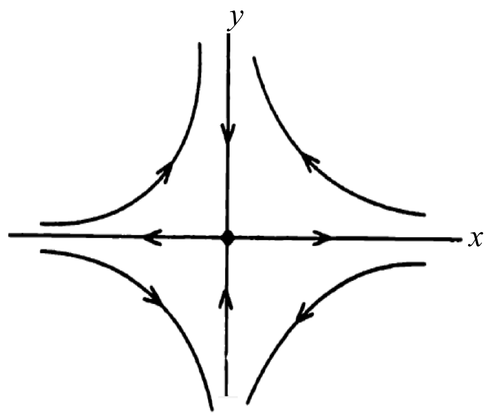
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

[7]Alfred J. Lotka (1880-1949), američki matematičar, hemičar i statističar
[8]Vito Volterra (1860-1940), italijanski matematičar i fizičar

Odavde dobijamo da su karakteristični korijeni $\lambda_1 = a$ i $\lambda_2 = -c$, pa su rješenja sistema data sa

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{at} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-ct}.$$

Stoga, dobijamo da je tačka $(0, 0)$ sedlo, pa samim tim i nestabilna.



Ako nema riba ($x = 0$), onda nema ni hrane, pa izginu i ajkule, zato na slici iznad vidimo da rješenja na y-osi teže 0 (strelice $\vee$ i $\wedge$ na y-osi na crtežu). Ulazak u sedlo je duž y-ose. S druge strane, ako nema ajkula tj. kada je $y = 0$, onda rješenja duž x-ose rastu (strelice $<$ i $>$ na x-osi na slici iznad), tj. ribe se razmnožavaju. Sve ostale trajektorije se dakle udaljavaju od fiksne tačke.

Posmatrajmo sada fiksnu tačku $(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha})$. Linearizujmo sistem oko ove fiksne tačke. Dobijamo da je Jacobi-eva matrica data sa

$$J|_{(x,y)=(\frac{c}{\gamma},\frac{a}{\alpha})} = \begin{bmatrix} a - \alpha y & -\alpha x \\ \gamma y & -c + \gamma x \end{bmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(\frac{c}{\gamma},\frac{a}{\alpha})} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha\frac{c}{\gamma} \\ \gamma\frac{a}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako je $x = u + \frac{c}{\gamma}$ i $y = v + \frac{a}{\alpha}$ onda je odgovarajući linearni sistem dat sa

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha\frac{c}{\gamma} \\ \gamma\frac{a}{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Karakteristični korijeni su $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ac}$ pa je fiksna tačka stabilna tj. imamo centar u $(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha})$. Kako bismo našli trajektorije primjetimo da je

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = -\frac{\left(\frac{\gamma a}{\alpha}\right) u}{\left(\frac{\alpha c}{\gamma}\right) v}$$

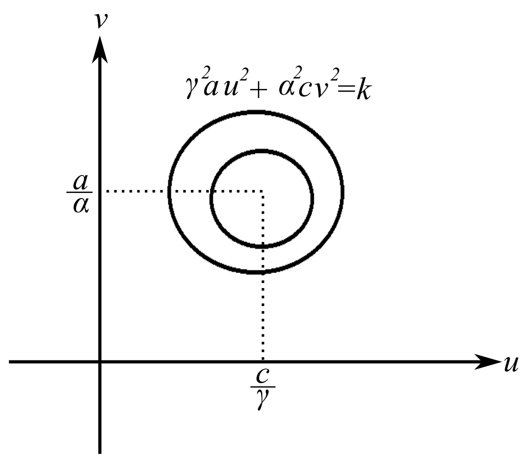
ili ekvivalentno

$$\gamma^2 a u du + \alpha^2 c v dv = 0$$

ili shodno tome,

$$\gamma^2 a u^2 + \alpha^2 c v^2 = k,$$

gdje je $k > 0$ konstanta integracije. Dobili smo dakle da su rješenja linearnog sistema (3.6) elipse.



Nelinearni sistem (**??**) možemo zapisati kao

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y(-c+\gamma x)}{x(a-\alpha y)}, \tag{3.7}$$

a ovo je jednačina koja razdvaja promjenljive. Dobijamo,

$$\frac{(a-\alpha y)dy}{y} = \frac{(-c+\gamma x)dx}{x}$$

odakle integracijom dolazimo do jednačine

$$a \ln y - \alpha y + c \ln x - \gamma x = c. \tag{3.8}$$

Jednačina (3.8) ekvivalentna je sa

$$y^a \cdot e^{-\alpha y} \cdot x^c \cdot e^{-\gamma x} = c_1. \tag{3.9}$$

Može se pokazati da grafik jednačine date sa (3.9), za fiksiranu vrijednost c_1, su zatvorene konture koje okružuju fiksnu tačku $(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha})$. Rješenje sistema (3.6) možemo zapisati u obliku

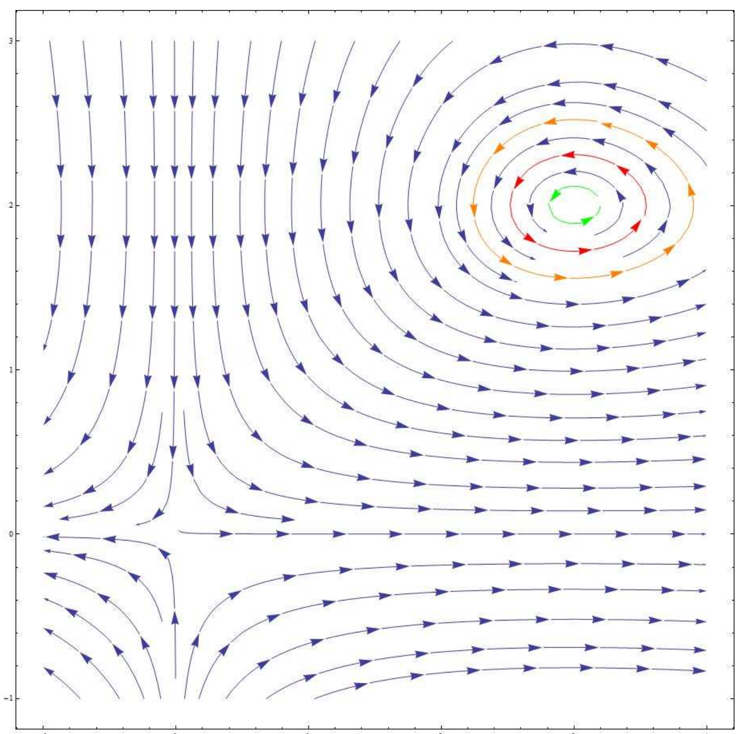
$$\begin{aligned} u &= \frac{c}{\gamma} \cdot K \cdot \cos(\sqrt{ac} \cdot t + \phi), \\ v &= \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot K \cdot \sin(\sqrt{ac} \cdot t + \phi), \end{aligned}$$

gdje konstante K i ϕ određujemo iz početnih uslova. Stoga,

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma} \cdot K \cdot \cos(\sqrt{ac} \cdot t + \phi), \\ y &= \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot K \cdot \sin(\sqrt{ac} \cdot t + \phi). \end{aligned}$$

Ove jednačine su dobre aproksimacije za eliptične trajektorije u blizini fiksne tačke $(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha})$. Ove jednačine možemo iskoristiti kako bismo izveli određene zaključke o cikličnom (periodičnom) variranju žrtava i lovaca na ovakvim trajektorijama.

1) Broj obe populacije se menja periodično (sinusoidno) sa periodom $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}$ i ovaj period je nezavisan od početnih uslova.
2) Ribe/ajkule osciluju po krivoj sa faznim razmakom od $\frac{T}{4}$, pri čemu lovci "kasne".
3) Amplitude oscilacija su $K \cdot \frac{c}{\gamma}$ za ribe, a $\frac{a\sqrt{c}K}{\alpha\sqrt{K}}$ za ajkule i zavise od početnih uslova kao i od parametara posmatranog problema.
4) Prosječan broj populacije riba i ajkula tokom jednog kompletnog ciklusa su $\frac{a}{\alpha}$ i $\frac{c}{\gamma}$, respektivno (isti su kao ekvilibrijumi).



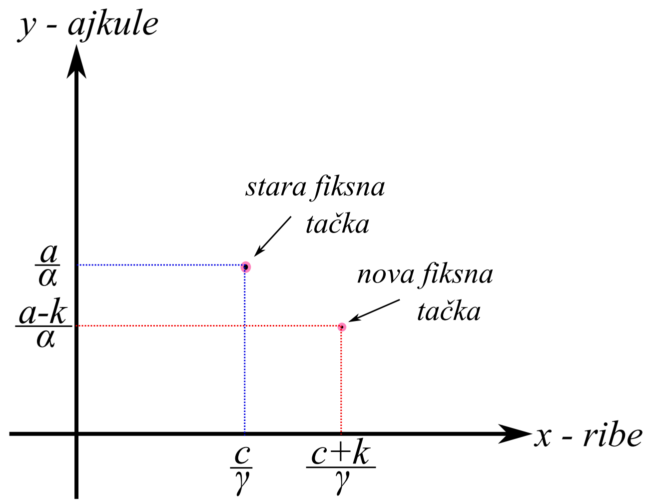
Primjer 9. *(Ribe, ajkule i ribolov)* Ribari vade ribu iz mora, ali im se u mrežu uvijek uplete i neka ajkula, pa se smanjuje i broj ove populacije. Dolazimo do jednačina:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - \alpha xy - kx\\ \dot{y} &= -cy + \gamma xy - ky\end{aligned}$$

ili ekvivalentno

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (a-k)x - \alpha xy\\ \dot{y} &= -(c+k)y + \gamma xy.\end{aligned}$$

Ovdje na sličan način kao kod ispitivanja modela Lotka-Volterra dobijamo da su fiksne tačke $(0,0)$ i $(\frac{c+k}{\gamma}, \frac{a-k}{\alpha})$.



Ribari su lovili ribu, ali su pri tom lovili i ajkule, koje su imale manje hrane zbog ribolova, tako da su izumirale, pri čemu su se onda ribe razmnožile, tj. ribolov je povećao broj riba, a smanjio broj ajkula. Iako je kontraintuitivno, ovo je tačno i eksperimentalno je dokazano (poznato kao **Volterra-in princip**).

Sličan primjer je sa ribama i komarcima. Ribe jedu komarce. Ljudi su htjeli ubiti komarce, pa su sipali pesticide u ribnjak (misleći da ako odumre određen postotak riba, to neće biti problem), ali su postigli suprotan efekat, jer su ubili ribe, a komarce su razmnožili. Slično imamo sa pticama i komarcima, tako da je ovakvih primjera u prirodi zaista mnogo.

Glava 4

Periodični autonomni sistemi i granični ciklusi

Oscilatorna (periodična) kretanja su jedna od najvažnijih pojava u dinamičkim sistemima. To periodično kretanje je opisano periodičnim rješenjima i zatvorenim faznim trajektorijama.[1] Kod linearnih sistema vidjeli smo ovakve pojave i to kod sistema koji su imali stacionarne tačke tipa centra. Ovdje ćemo sada razmatrati periodična kretanja nelinearnih sistema. Oni su nam posebno zanimljivi jer ćemo vidjeti da se stabilnost neće moći adekvatno opisati ako koristimo Liapunov-ljevu definiciju stabilnosti, pa ćemo uvesti neke nove pojmove poput izolovanih orbita, graničnih ciklusa i orbitalne stabilnosti.

4.1 Granični ciklusi i orbitalna stabilnost

Granične cikluse ćemo analizirati prvenstveno u $\mathbb{R}^2$, ali se cjelokupna teorija koja će biti iznijeta u ovom poglavlju, može uopštiti i na $\mathbb{R}^n$. I dalje posmatramo nelinearni autonomni sistem u faznoj ravni dat sa

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.1}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Oscilatorno (periodično) kretanje je u ovom slučaju opisano periodičnim rješenjem:

$$x(T+t) = x(t), \text{ za svako } t \geq 0,$$

gdje $T > 0$ predstavlja period oscilovanja rješenja.

[1] Činjenica da su fazne trajektorije periodičnih rješenja zatvorene nezavisna je od dimenzije faznog prostora. To važi za prostore bilo koje dimenzije.

Prije nego što definišemo granični ciklus i orbitalnu stabilnost, definisaćemo prvo neke pojmove koje ćemo koristiti u samoj definiciji graničnog ciklusa. Kao što znamo trajektorija (orbita) je sastavljena od beskonačno mnogo tačaka. Ovo nam je bitno kako bismo rastojanje između dva objekta mogli da definišemo na jedinstven način. Označimo li da je tačka $K = (x_K, y_K)$ proizvoljna tačka fazne ravni onda ćemo rastojanje između tačke K i tačaka na trajektoriji definisati kao najmanje rastojanje od svih. Pošto ćemo raditi sa euklidskom normom, onda će ono najkraće rastojanje u faznoj ravni biti ujedno i normalno rastojanje tačke od trajektorije.

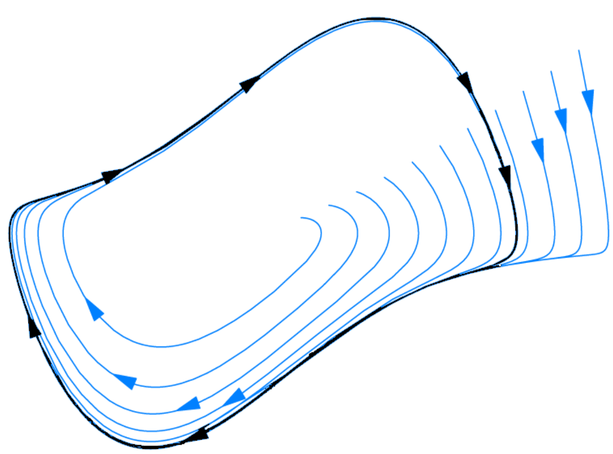
Definicija 17. Neka je $\hat{\gamma}$ trajektorija koja odgovara nekom rješenju $\hat{x}(t) = (\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))$ sistema (4.1) i neka je K bilo koja tačka fazne ravni data vektorom $K = (x_K, y_K) \in \mathbb{R}^2$. Tada se **rastojanje tačke K od trajektorije** $\hat{\gamma}$ definiše kao

$$d(K, \hat{\gamma}) = \inf_{\hat{x} \in \hat{\gamma}} \|K - \hat{x}\|.$$

Definicija 18. Za svako $\varepsilon \in \mathbb{R}$, **$\varepsilon$-okolina trajektorije** $\hat{\gamma}$ je skup tačaka $\hat{\gamma}_\varepsilon$ čije je rastojanje od trajektorije $\hat{\gamma}$ manje ili jednako od ε:

$$\hat{\gamma}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 | d(x, \hat{\gamma}) \leq \varepsilon\}.$$

Definicija 19. Neka je $\hat{x}(t)$ periodično rješenje sistema (4.1) sa periodom $T > 0$, koje opisuje zatvorenu faznu trajektoriju (orbitu) $\hat{\gamma}$ i neka je $\hat{\gamma}_\varepsilon$ njegova ε-okolina. Za trajektoriju kažemo da je **izolovana** ako bilo koje drugo rješenje $x(t)$ čiji se početni trenutak $x(t_0)$ nalazi u $\hat{\gamma}_\varepsilon$, nije periodično, odnosno za svako $T > 0$ i neko $t \geq t_0$ važi da je $x(t+T) \neq x(t)$. Trajektoriju $\hat{\gamma}$ izolovanog periodičnog rješenja zovemo **granični ciklus**. Drugim riječima, granični ciklus je periodična orbita koja predstavlja granični skup neke druge trajektorije.



Na ovoj slici smo dali granični ciklus (crnom bojom na crtežu) za van der Pol[2]-ov oscilator, o kojem ćemo u daljem radu reći nešto više.

[2]Balthasar van der Pol (1889-1959), holandski fizičar

Sam pojam graničnog ciklusa uveo je Henri Poincare. Kao što smo vidjeli kod linearnih sistema, fazne trajektorije u okolini stacionarne tačke tipa centra jesu zatvorene, ali nisu izolovane, pa samim tim nisu ni granični ciklus. Iz tog razloga, granični ciklusi su rješenja koja su tipična za nelinearne sisteme.

Kao što smo naveli na samom početku, stabilnost graničnih ciklusa ne može u potpunosti biti ispitana polazeći od Liapunov-ljeve definicije stabilnosti i to zbog toga što male promjene u početnim podacima mogu da dovedu do toga da nemamo stabilnost u navedenom smislu, ali da trajektorije i dalje ostaju blizu jedna drugoj u faznoj ravni. Zbog toga, uvodimo jedan novi pojam, orbitalnu stabilnost.

Definicija 20. (Orbitalna stabilnost) Neka je $\hat{x}(t)$ proizvoljno rješenje sistema (4.1) i $\hat{\gamma}$ njegova orbita. Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da za bilo koje rješenje $x(t)$ važi:

$$x(t_0) \in \hat{\gamma}_\delta \quad \Longrightarrow \quad x(t) \in \hat{\gamma}_\varepsilon$$

reći ćemo da je $x(t)$ **orbitalno stabilno** rješenje.

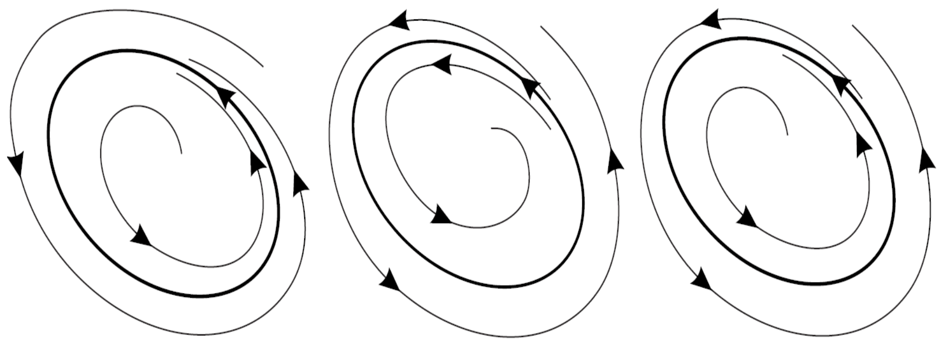
Primjetimo sada razliku između orbitalne stabilnosti i Liapunov-ljeve stabilnosti. Stabilnost u smislu Liapunov-a nameće strože uslove u odnosu na orbitalnu stabilnost. Svako rješenje koje je stabilno u smislu Liapunov-a biće i orbitalno stabilno, jer orbitalna stabilnost kao uslov nameće samo odstupanje rješenja $x(t)$ od trajektorije $\hat{x}(t)$.

S obzirom da su granični ciklusi predstavljeni kao zatvorene trajektorije u faznoj ravni, oni dijele cijelu ravan na dvije oblasti i to spoljašnju i unutrašnju oblast. Uz pretpostavku da početni problem (4.1) ima jedinstveno rješenje, dobijamo da trajektorije γ ne mogu preći iz unutrašnje u spoljašnju oblast i obratno. Reći ćemo da je granični ciklus $\hat{\gamma}$:

1) *orbitalno stabilan* ako mu sve susjedne trajektorije konvergiraju kada $t \to \infty$.

2) *orbitalno nestabilan* ako za bilo koje δ trajektorije čije početno stanje zadovoljava uslov $x(t_0) \in \hat{\gamma}_\delta$ za konačno vrijeme napuste oblast $\hat{\gamma}_\varepsilon$ za svako ε kojim nije obuhvaćena cijela unutrašnja oblast graničnog ciklusa. Još kažemo da ove trajektorije tokom vremena divergiraju od graničnog ciklusa $\hat{\gamma}$.

3) *orbitalno semistabilan* ako mu trajektorije iz spoljašnje (unutrašnje) oblasti tokom vremena konvergiraju, a trajektorije iz unutrašnje (spoljašnje) oblasti divergiraju.



Nakon što smo se upoznali sa osnovnim pojmovima vezanim za granične cikluse i za periodična rješenja sistema u faznoj ravni, sada možemo da damo odgovor na jedno od najvažnijih pitanja vezanih za granične cikluse, a to je *egzistencija* graničnih ciklusa. O tome ćemo nešto više reći u sledećem dijelu.

4.2 Egzistencija graničnih ciklusa

Kada govorimo o egzistenciji postoje dvije vrste rezultata. Jedni su oni koji potvrđuju egzistenciju posmatranog objekta, dok drugi isključuju njihovu egzistenciju. U ovoj glavi ćemo da razmotrimo nekoliko rezultata vezanih za egzistenciju graničnih ciklusa.

4.2.1 Dulac-ov kriterijum

Često nam je bitno da ispitamo da li postoji granični ciklus u određenoj oblasti oblasti u ravni. Tu nam može pomoći sledeća teorema.

Teorema 16. (Dulac[3]-ova teorema) *Neka je D prosto povezana oblast u faznoj ravni, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Ako postoji funkcija $\phi = \phi(x_1, x_2) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ takva da za funkciju $f = (f_1, f_2)$ izraz*

$$\nabla \cdot \phi f = \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi(x_1, x_2) \cdot f_1(x_1, x_2)) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi(x_1, x_2) \cdot f_2(x_1, x_2))$$

nije identički jednak nuli i ne mijenja znak u oblasti D, tada sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4.2}$$

nema periodična rješenja čije su orbite cijele sadržane u oblasti D.

[3]Henri Dulac (1870-1955), francuski matematičar

Dokaz. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\phi(x_1,x_2)\cdot f_1(x_1,x_2)) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi(x_1,x_2)\cdot f_2(x_1,x_2)) > 0$$

u prosto povezanoj oblasti D. Prepostavimo suprotno, tj. da postoji zatvorena orbita sistema (4.2) u oblasti D. Označimo je sa C. Neka je S unutrašnjost krive C. Na osnovu Green[4]-ove teoreme, imamo da je

$$\begin{aligned}\int\int_S \left(\frac{\partial(\phi\cdot f_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\phi\cdot f_2)}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 &= \oint_C -\phi\cdot f_2 dx_1 + \phi\cdot f_1 dx_2 \\ &= \oint_C \phi(\dot{x}_1 dx_2 - \dot{x}_2 dx_1) = 0\end{aligned}$$

jer je na krivoj C $dx_1 = \dot{x}_1 dt$ i $dx_2 = \dot{x}_2 dt$, odakle je traženi integral jednak 0. Dakle nije moguće pronaći oblast $S \subset D$ za koju važi početna nejednakost. Stoga, u oblasti D nema zatvorenih orbita. □

Problem kod primjene Dulac-ovog kriterijuma je kao i kod Liapunov-ljevih funkcija, u pronalaženju pogodne funkcije $\phi(x_1,x_2)$. Uvijek ćemo prvo ispitati da li bez pomoćne funkcije $\phi(x_1,x_2)$, $\nabla\cdot f$ ne mijenja znak, a ako nam to ne daje odgovor isprobavaćemo funkcije

$$\phi(x_1,x_2) = \frac{1}{{x_1}^{\alpha}\cdot {x_2}^{\beta}}, \quad e^{\alpha x_1}, \quad e^{\alpha x_2}\ldots$$

Primjer 10. Pokazaćemo primjenom Dulac-ovog kriterijuma da sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - y + x^2 + y^2\end{aligned}$$

nema nigdje periodične orbite.

Posmatrajmo prvo

$$\nabla\cdot f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(-x-y+x^2+y^2) = 0 - 1 + 2y = -1 + 2y.$$

Odavde možemo da zaključimo da ne postoje zatvorene orbite ni u jednoj od poluravni $y < \frac{1}{2}$ ili $y > \frac{1}{2}$, ali to nam ne garantuje da ne postoji orbita koja se nalazi u cijeloj faznoj ravni jer možda postoji orbita koja siječe pravu $y = \frac{1}{2}$.

Isprobajmo sada funkciju $\phi(x,y) = e^{\alpha x}$. Ovdje imamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(e^{\alpha x} y) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{\alpha x}(-x-y+x^2+y^2)) &= \alpha y e^{\alpha x} - e^{\alpha x} + 2y e^{\alpha x} \\ &= e^{\alpha x}((\alpha+2)y - 1).\end{aligned}$$

Birajući da je $\alpha = -2$ prethodni izraz postaje $-e^{-2x}$ što je različito od 0 i ne mijenja znak. Tada na osnovu Dulac-ove teoreme slijedi da sistem nema periodične orbite.

[4]George Green (1793-1841), britanski matematičar i fizičar

4.2.2 Bendixson-ov kriterijum

Dulac-ov kriterijum je generalizacija **Bendixson[5]-ovog kriterijuma**, koji je specijalan slučaj Dulac-ovog kriterijuma za $\phi(x_1, x_2) = 1$, tj. za funkciju $f = (f_1, f_2)$ ispitivaćemo da li u određenoj oblasti izraz $\nabla \cdot f = \partial_{x_1} f_1 + \partial_{x_2} f_2$ ne mijenja znak. Ovaj kriterijum se takođe koristi kada hoćemo da pokažemo da periodične orbite ne postoje u određenoj oblasti u faznoj ravni.

Primjer 11. Primjenom Bendixson-ovog kriterijuma utvrdićemo pod kojim uslovima sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= ax + by - x^2 y - x^3 \end{aligned}$$

neće imati granični ciklus u $\mathbb{R}^2$. Izračunjavanjem divergencije funkcije f na kojoj se zasniva Bendixson-ov kriterijum dobijamo da je

$$\frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(ax + by - x^2 y - x^3) = b - x^2.$$

Kako je iz uslova zadatka $D = \mathbb{R}^2$ možemo zaključiti da za $b < 0$ posmatrani sistem neće imati granične cikluse.

4.2.3 Poincare-Bendixson-ova teorema

Osnovni oblik Poincare-Bendixson-ove teoreme je prilično apstraktan, tako da ćemo ovdje navesti jedan od najčešće korištenih oblika te teoreme.

Teorema 17. (Poincare-Bendixson-ova teorema) *Neka je D zatvorena i ograničena oblast u faznoj ravni i neka je*

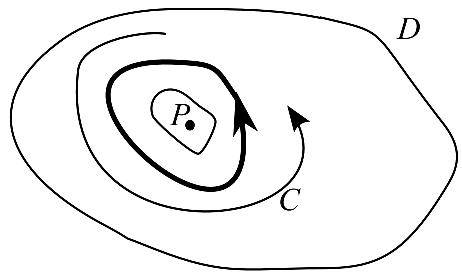
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

dinamički sistem pri čemu $f_1, f_2 \in C^1(D, \mathbb{R}$ i pretpostavimo da se u unutrašnjosti oblasti D nalazi najviše jedna stacionarna tačka sistema. Neka je C trajektorija sistema takva da ostaje u unutrašnjosti oblasti D za sve $t \geq 0$.

Tada su moguća sledeća tri slučaja:

1) *Trajektorija C je granični ciklus;*
2) *Trajektorija C konvergira graničnom ciklusu;*
3) *Trajektorija C konvergira stacionarnoj tački.*

---
[5] Ivar Bendixson (1861-1935), švedski matematičar



Dokaz teoreme izostavljamo zbog njegove složenosti, a može se naći u [2].

4.2.4 Lienard-ova jednačina

Veliki broj matematičkih modela fizičkih sistema vodi nas do jednačine oblika

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \tag{4.3}$$

koja je poznata kao **Lienard[6]-ova jednačina**. Jednačinu možemo zapisati u obliku sistema u $\mathbb{R}^2$ datog sa

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) - f(x)y. \end{aligned}$$

Pod određenim uslovima koje trebaju da zadovoljavaju funkcije f i g može se pokazati da Lienard-ova jednačina ima granični ciklus. Ovo tvrđenje je poznato kao Lienard-ova teorema.

Teorema 18. (Lienard-ova teorema) *Pretpostavimo da važi sledeće:*

1. $f, g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
2. $g(x)$ *je neparna funkcija tj.* $g(-x) = -g(x)$;
3. $g(x) > 0$ *za* $x > 0$;
4. $f(x)$ *je parna funkcija tj.* $f(-x) = f(x)$;
5. *Primitivna funkcija* $F(x) = \int_0^x f(u)du$ *zadovoljava sledeće:*
   (a) $F(x)$ *ima tačno jedan pozitivan korijen u* $x = a$;
   (b) $F(x) < 0$ *za* $0 < x < a$;
   (c) $F(x)$ *je pozitivna i neopadajuća funkcija za* $x > a$;
   (d) $F(x) \to \infty$ *kada* $x \to \infty$.

[6] Alfred-Marie Lienard (1869-1958), francuski fizičar i inžinjer

Tada Lienard-ova jednačina (4.3) ima tačno jedan stabilan granični ciklus koji okružuje koordinatni početak.

Zbog obimnosti dokaza, ovdje ga izostavljamo, a može se naći u [2].

Primjer 12. (Van der Pol-ova jednačina) Pokazaćemo sada da van der Pol-ova jednačina

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \qquad \varepsilon > 0$$

ima stabilan granični ciklus. Očigledno, van der Pol-ova jednačina je primjer Lienard-ove jednačine pri čemu je

$$\begin{aligned} f(x) &= \varepsilon(x^2 - 1) \\ g(x) &= x. \end{aligned}$$

Provjerimo sada da li su ispunjeni uslovi Lienard-ove teoreme.

1. Očigledno, $f, g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
2. $g(x) = x$ je neparna funkcija po x;
3. Trivijalno važi da je $g(x) = x > 0$ za $x > 0$;
4. $f(-x) = \varepsilon((-x)^2 - 1) = \varepsilon(x^2 - 1) = f(x)$ pa je funkcija $f(x)$ parna;
5. Primitivna funkcija $F(x) = \int_0^x \varepsilon(u^2 - 1)du = \varepsilon(\frac{1}{3}x^3 - x)$ zadovoljava sledeće:
   (a) $F(x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$ ili $x = \pm\sqrt{3}$, odakle dobijamo da je $a = \sqrt{3}$;
   (b) $F(x) < 0$ za $0 < x < \sqrt{3}$ što važi trivijalno;
   (c) $F(x)$ je pozitivna i neopadajuća funkcija za $x > \sqrt{3}$ što se lako provjerava;
   (d) $F(x) \to \infty$ kada $x \to \infty$.

Pošto su ispunjeni svi uslovi Lienard-ove teoreme, dobijamo da van der Pol-ova jednačina ima stabilan granični ciklus.

4.2.5 Gradijentni sistemi

Definicija 21. (Gradijentni sistem) Gradijentni sistem je dinamički sistem oblika

$$\dot{x} = -\nabla V(x)$$

za datu funkciju $V(x) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 19. *Gradijentni sistemi ne mogu imati periodične orbite.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $\gamma : t \to x(t)$ periodična orbita gradijentnog sistema, sa periodom T. Tada, s jedne strane imamo da je

$$V(x(T)) - V(x(0)) = 0,$$

ali s druge strane je

$$V(x(T)) - V(x(0)) = \int_0^T \frac{dV}{dt} dt = \int_0^T (\nabla V \cdot \dot{x})\, dt = -\int_0^T \|\dot{x}\|^2 dt < 0,$$

odakle dolazimo u kontradikciju. □

Primjer 13. Pokazaćemo da ne postoje periodične orbite za sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin y \\ \dot{y} &= x \cdot \cos y. \end{aligned}$$

Dati sistem je gradijentni sistem sa funkcijom potencijala $V(x,y) = -x \sin y$, jer je $\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ i $\dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$. Tada, na osnovu prethodne teoreme, zaključujemo da ne postoje periodične orbite za dati sistem.

4.3 Stabilnost graničnih ciklusa

U poglavlju 3.4. vidjeli smo kako i na koji način možemo ispitati stabilnost linearnih periodičnih neautonomnih sistema. Uveli smo pojam Floquet-ove teorije koja će nam sada u ispitivanju stabilnosti graničnih ciklusa biti od velike pomoći.

Neka je $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ periodično rješenje sistema (4.1) sa periodom $T > 0$ tj. $y(t+T) = y(t)$. Tada važi

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= f_1(y_1(t), y_2(t)) \\ \dot{y}_2(t) &= f_2(y_1(t), y_2(t)). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Pretpostavimo da u nekom trenutku $t = t_0$ stanje sistema odstupi od očekivanog stanja na kretanju sistema datog sa (4.4). Neka je to odstupanje određeno vektorom ψ_0:

$$x(t_0) = y(t_0) + \psi_0 \iff \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_0^1 \\ \psi_0^2 \end{bmatrix}.$$

Da bismo analizirali vremensko ponašanje nakon trenutka odstupanja od očekivanog kretanja, formirajmo jednačine

$$x(t_0) = y(t_0) + \psi_0 \iff \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_0^1(t) \\ \psi_0^2(t) \end{bmatrix}$$

tj. pretpostavimo da kretanje sistema koje odstupa od očekivanog nakon trenutka t_0 je opisano datim jednačinama. Pošto je i to kretanje sistema rješenje ono zadovoljava (4.1). Uvrštavanjem dobijamo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}_1(t) + \dot{\psi}_1(t) = f_1\left(y_1(t) + \psi_1(t), y_2(t) + \psi_2(t)\right) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{y}_2(t) + \dot{\psi}_2(t) = f_2\left(y_1(t) + \psi_1(t), y_2(t) + \psi_2(t)\right) \end{aligned}$$

odakle razvojem funkcija f_1 i f_2 u Tejlorov red u okolini $\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ i zadržavajući se na članovima prvog stepena, dobijamo linearizovane jednačine

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(y_1, y_2) \cdot \psi_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(y_1, y_2) \cdot \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(y_1, y_2) \cdot \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(y_1, y_2) \cdot \psi_2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Sistem (4.5) se može zapisati u obliku

$$\dot{\psi} = A(t) \cdot \psi, \tag{4.6}$$

gdje je

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} (y_1, y_2). \tag{4.7}$$

Dakle matricu A računamo pomoću Jacobi-eve matrice, ali primjetimo da pošto je dinamički sistem (4.1) autonomni, onda Jacobi-eva matrica ne zavisi eksplicitno od parametra t, pa ni sama matrica A. Ali kada se njeni elementi izračunaju na periodičnom rješenju $y(t)$ čiji je period $T > 0$ i sami će biti periodične funkcije istog perioda T, tj. $A(t+T) = A(t)$.

Analiza stabilnosti graničnih ciklusa, koje je opisano sa periodičnim rješenjima sistema datog sa (4.1) biće zasnovana na (4.6). Sistem (4.6) predstavlja *sistem linearnih ODJ sa periodičnim koeficijentima*, a stabilnost ovakvih sistema smo ispitivali pomoću Floquet-ove teorije.

Na osnovu Teoreme 7, znamo da se rješenje sistema odnosno glavna matrica rješenja može napisati kao proizvod ograničene periodične matrice i glavne matrice rješenja linearnog sistema sa konstantnim koeficijentima. U dvodimenzionalnom slučaju dobijamo da rješenje datog sistema možemo zapisati u obliku

$$\psi(t) = C_1 \cdot e^{\gamma_1 t} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} + C_2 \cdot e^{\gamma_2 t} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

gdje su funkcije $\psi_1(t)$ i $\psi_2(t)$ periodične funkcije sa periodom jednakim periodu T matrice (21), a γ_1 i γ_2 su Floquet-ovi eksponenti.

Lema 10. *Ako je* $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ *periodično rješenje sistema (4.1) sa periodom* $T > 0$, *onda je* $\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix}$ *periodično rješenje sa istim periodom* T *sistema (4.5).*

Dokaz. Pošto rješenje $y(t)$ zadovoljava (4.4) onda diferencirajući po parametru t dobijamo sistem

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(y_1, y_2) \cdot \dot{y}_1(t) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(y_1, y_2) \cdot \dot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_2(t) &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(y_1, y_2) \cdot \dot{y}_1(t) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(y_1, y_2) \cdot \dot{y}_2(t). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Odavde, vidimo da $\dot{y}(t) = \psi(t)$ zadovoljava (4.9). Kako je izvod periodične funkcije periodična funkcija sa istim periodom, dokazali smo tvrđenje. □

Posljedica 2. *Jedan Floquet-ov eksponent rješenja (4.8) je jednak nuli,* $\gamma_1 = 0$.

Dokaz. Prema prethodno dokazanoj lemi imamo da je jedno partikularno rješenje

$$e^{\gamma_1 t} \cdot \psi_1(t) = \dot{y}(t). \tag{4.10}$$

Pošto su ψ_1 i $\dot{y}(t)$ periodične funkcije sa istim periodom T, onda će (4.10) da važi ako važi

$$e^{\gamma_1(t+T)} = e^{\gamma_1 t}$$

što važi samo u slučaju kada je $\gamma_1 = 0$. □

Sada, kada znamo da je jedan Floquet-ov eksponent uvijek jednak 0, sledeća lema nam daje odgovor kako na pronađemo drugi eksponent γ_2.

Lema 11. *Zbir Floquet-ovih eksponenata jednak je srednjoj vrijednosti traga matrice* $A(t)$ *u odnosu na period* T. *U dvodimenzionalnom slučaju imamo*

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T trA(t)dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right] (y_1(t), y_2(t))dt. \end{aligned}$$

Sledeća teorema Andronov-Vitt-a koju navodimo bez dokaza, a o kojoj se više može naći u [10], zajedno sa Lemom 10. nam daje odgovor o orbitalnoj stabilnosti graničnih ciklusa.

Teorema 20. (Teorema Andronov[7]-Vitt[8]-a) *Granični ciklus opisan periodičnim rješenjem* $y(t)$ *sistema (15) je:*

1) *orbitalno stabilan ako je* $\gamma_2 < 0$;

2) *orbitalno nestabilan ako je* $\gamma_2 > 0$.

U slučaju $\gamma_2 = 0$ *ne znamo ništa o orbitalnoj stabilnosti graničnog ciklusa.*

---

[7]Aleksandr Aleksandrovich Andronov (1901-1952), ruski fizičar

[8]Aleksand Adolfovich Vitt, ruski matematičar

Zaključak

Na kraju samog rada, važno je da sumiramo prethodno izloženu teoriju.

Teorija dinamičkih sistema obuhvata metode za analizu diferencijalnih jednačina. To je matematička teorija zasnovana na matematičkoj analizi, geometriji i topologiji tačnije oblastima koje svoje korijene vuku još od Newton[9]-ove mehanike tako da na neki način teorija dinamičkih sistema predstavlja prirodan put razvoja matematike. U današnje vrijeme, veoma često se mnoge pojave u prirodi i nauci mogu opisati sistemima nezavisnim od vremenske promjenljive čija rješenja su zatvorene (periodične) orbite. Takve sisteme zovemo periodični autonomni sistemi i oni su glavna tema ovog rada.

Jedan od osnovih pojmova, kada su u pitanju periodični sistemi, jeste teorija Floquet-a čiju smo primjenu mogli da vidimo u ispitivanju stabilnosti graničnih ciklusa. Kao što smo vidjeli granični ciklusi predstavljaju zatvorene, periodične orbite koje predstavljaju granični skup, odnosno skup tačaka nagomilavanja neke trajektorije, kada vremenska promjenljiva $t \to \infty$.

Granični ciklusi predstavljaju jedan od najjednostavnijih primjera ponašanja neprekidnih dinamičkih sistema. Pored toga, granični ciklusi su karakteristični za nelinearne autonomne sisteme. Veliki broj osobina koje su karakteristične za granične cikluse iznijeli smo u ovom radu. Vidjeli smo na koji način možemo da ispitujemo egzistenciju i stabilnost (Liapunov-ljevu, asimptotsku, eksponencijalnu, orbitalnu) graničnih ciklusa.

Jedan od najizazovnijih problema koji je otvoren već preko 120 godina, je Hilbert[10]-ovo pitanje o broju i poziciji graničnih ciklusa za polinomna vektorska polja u ravni. U poslednjih 25. godina, zbog velikog rada na teoriji graničnih ciklusa, postoje određeni uspjesi, ali je sam Hilbert-ov 16. problem, koji upravo govori o iznad navedenom problemu o graničnim ciklusi, još uvijek otvoren.

[9]Isaac Newton (1642-1726), engleski matematičar i fizičar
[10]David Hilbert (1862-1943), njemački matematičar

Literatura

[1] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems.* American Mathematical Society, 2012.

[2] Lawrence Perko. *Differential Equation and Dynamical systems,* 3^{rd} *ed.* Springer-Verlag, New York, 2001.

[3] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems.* Pearson Education, New Jersey, 2000.

[4] Srboljub Simić. *Analitička mehanika.* Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2006.

[5] Vladimir Igorevich Arnold. *Dynamical Systems III, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 3.* Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[6] Dušanka Perišic, Stevan Pilipović, Mirjana Stojanović. *Funkcije više promjenljivih. Diferencijalni i integralni račun.* Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1997.

[7] John Guckenheimer, Philip Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] Ljiljana Gajić. *Predavanja iz Analize I.* Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2006.

[9] Dobrivoje Mihailovic, Radovan R. Janić. *Elementi matematičke analize, VII izdanje.* Naučna knjiga, Beograd, 1982.

[10] Gennady A. Leonov. *Generalization of the Andronov-Vitt theorem.* Scientific paper, 2005.

[11] Milica Pavlović. *Teorija oscilatornosti linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda.* Master rad, Univerzitet u Nišu, Niš 2013.

[12] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[13] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics And Chaos.* Addison-Wesley, 1994.

[14] Steven H. Strogatz. *Nonlinear diferential equations and dynamical systems,* 2^{nd} *ed.* Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[15] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney. *Diferential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier-Academic Press, Amsterdam, 2004.

[16] Bodo Werner. *Dynamical system theory and bifurcation analysis for microscopic trafic models*. University of Hamburg, Hamburg, 2010.

[17] Quidong Wang. *Lecture notes on Dynamical Systems. Floquet Theory*. Department of Mathematics, The University of Arizona, 2014.

[18] Radoslav Dimitrijević. *Analiza realnih funkcija više promjenljivih*. Filozofski fakultet u Nišu, Niš, 1999.

[19] Olga Hadžić, Stevan Pilipović. *Uvod u funkcionalnu analizu*. Stylos, Novi Sad, 1996.