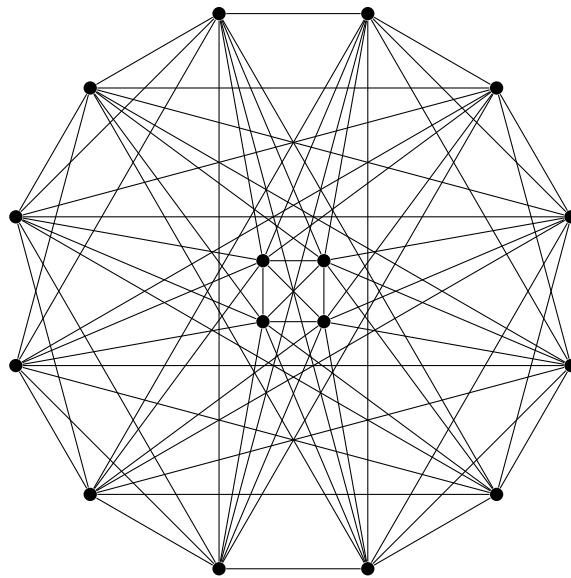




Faculteit Wetenschappen
Vakgroep Wiskunde: Algebra en Meetkunde

Neumaiergrafen



Robin Simoens

Bachelorproject Wiskunde

Academiejaar 2019-2020

Promotor:

dr. Maarten De Boeck

Vakgroep Wiskunde: Algebra en Meetkunde

(De figuur op de voorpagina is een visualisatie van de kleinste strikte Neumaiergraaf.)

Inhoudsopgave

Inleiding	1
I Definities en eigenschappen	2
1 Inleidende begrippen	3
1.1 Herhaling en afspraken	3
1.2 Regulariteit	4
1.3 Voorbeelden	6
1.4 De lokale structuur van twee toppen	8
2 Kennismaking met Neumaiergrafen	9
2.1 Een stelling van Neumaier	9
2.2 De definitie van een Neumaiergraaf	10
2.3 Nuttige eigenschappen	11
II Constructies van strikte Neumaiergrafen	14
3 De kleinste strikte Neumaiergraaf	15
3.1 Affiene polaire grafen	15
3.2 Switching	16
3.3 Constructie	17
3.4 Restricties op parameters van strikte Neumaiergrafen	19
3.5 De kleinste strikte Neumaiergraaf	21
4 De grafen $\Gamma_{\alpha,\pi}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{q})$	23
4.1 Cayleygrafen	23
4.2 Cyclotomische getallen	24
4.3 De grafen $\Gamma_{\alpha,\pi}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{q})$	25
4.3.1 Het geval $\mathbf{m} = \mathbf{2}$	27
4.3.2 Het geval $\mathbf{m} = \mathbf{3}$	27
5 Constructies via afstandsreguliere antipodale grafen	29
5.1 Afstandsreguliere grafen	29
5.2 Antipodale grafen	30
5.3 De operatie $F_t(\Gamma)$	31
5.4 Geschikte kandidaten	33
III Aanvullingen	35
6 Eigen observaties	36
6.1 Het spectrum van Neumaiergrafen	36
6.2 Terugkerende patronen	38
6.3 Op zoek naar nieuwe strikte Neumaiergrafen	40
7 Neumaiergrafen in Sage	42
7.1 Basisfuncties op (Neumaier)grafen	42

7.2	Constructies van strikte Neumaiergrafen	43
7.2.1	Constructie uit hoofdstuk 3	43
7.2.2	Constructie uit hoofdstuk 4	44
7.2.3	Constructie uit hoofdstuk 5	45
7.3	Spectra van strikte Neumaiergrafen	46
Bibliografie	48

Inleiding

Professor Arnold Neumaier doceert wiskunde aan de universiteit van Wenen. In 1981 schreef hij een artikel over “reguliere klieken in grafen” en stelde daarin de vraag of er grafen bestaan die aan zekere eigenschappen voldoen. Het antwoord heeft lang op zich laten wachten, maar in 2018 werden er uiteindelijk voorbeelden van zo’n grafen gevonden. Die grafen noemt men nu strikte Neumaiergrafen. De grafen waarover ik het in dit werk zal hebben – de Neumaiergrafen – zijn daar een veralgemening van.

In **hoofdstuk 1** fris ik enkele begrippen op uit de grafentheorie. De grafen die ik beschouw zijn “braaf”: ik beperk mij enkel tot de eindige gevallen en ga uit van een irreflexieve, symmetrische adjacentierelatie. Simpel gezegd: toppen mag je niet met zichzelf verbinden en de lijnen ertussen hebben geen richting. Na een korte herhaling volgen er onmiddellijk enkele begrippen die van cruciaal belang zijn voor de rest van het werk. Vervolgens beschouw ik nog enkele voorbeelden en een eigenschap die later van pas komt. In **hoofdstuk 2** volgt de definitie van een Neumaiergraaf, die zijn oorsprong vindt in de stelling en bijhorende vraag uit Neumaier’s eerder vermelde artikel. Daarna bewijs ik een aantal belangrijke lemma’s en stellingen over Neumaiergrafen.

Hoofdstukken drie tot en met vijf behandelen constructies van strikte Neumaiergrafen. Neumaiergrafen komen in het algemeen vaak voor, maar het bestaan van strikte Neumaiergrafen daarentegen werd pas recentelijk aangetoond. Er zijn nog steeds weinig strikte Neumaiergrafen gekend. Gelukkig zijn dat er genoeg om drie hoofdstukken over te schrijven. In **hoofdstuk 3** bekijk ik de meest recente constructie omdat die de allerkleinste strikte Neumaiergraaf bevat. Dat het inderdaad de kleinste is toon ik uiteindelijk ook aan. De vroegste constructie van strikte Neumaiergrafen behandel ik in **hoofdstuk 4**. In **hoofdstuk 5** onderzoek ik twee nieuwe soorten grafen en een nieuwe operatie op grafen, die onder bepaalde voorwaarden in strikte Neumaiergrafen resulteert.

In **hoofdstuk 6** bespreek ik enkele eigen observaties over Neumaiergrafen. Eerst bekijk ik het spectrum van (strikte) Neumaiergrafen, op zoek naar patronen in de eigenwaarden. Daarna onderzoek ik vaak terugkerende eigenschappen en vorm enkele hypotheses. Tot slot doe ik een poging om nieuwe strikte Neumaiergrafen te ontdekken. **Hoofdstuk 7** bevat een handvol Sage-code die gebruikt werd tijdens dit project. Die code is voornamelijk bedoeld voor de automatisatie en visualisatie van de constructies uit het tweede deel, alsook om de eigenwaarden van die grafen te berekenen.

Het onderwerp van mijn bachelorproef sluit het meest aan bij de cursus “Discrete Wiskunde II” uit de eerste bachelor. Ik wil graag dr. Maarten De Boeck bedanken om mij dit interessante onderwerp aan te bieden, maar vooral ook voor zijn inzichtelijke opmerkingen en positieve kritiek.

Deel I

Definities en eigenschappen

Hoofdstuk 1

Inleidende begrippen

Alvorens we een goede beschrijving kunnen geven van wat een Neumaiergraaf juist is hebben we een degelijke basis grafentheorie nodig. In dit hoofdstuk verrichten we daarvoor al het nodige werk. We beginnen met een herhaling van enkele concepten uit de wondere wereld van grafen. Daarna introduceren we enkele nieuwe noties van regulariteit die cruciaal zullen zijn in de volgende hoofdstukken. Dat doen we aan de hand van enkele voorbeelden. Tot slot bespreken we een schema dat ons meer inzicht zal geven in de zopas verworven theorie.

1.1 Herhaling en afspraken

We starten met een oprissing van enkele begrippen uit de grafentheorie. Merk op dat de onderstaande definitie van een graaf het bestaan van gerichte bogen of zelfbogen uitsluit.

Definitie 1.1

Een **graaf** is een koppel $\Gamma = (V, E)$ met V een verzameling en E een verzameling van paren $\{u, v\}$ met $u, v \in V$, $u \neq v$. Elementen van V noemen we **toppen** en elementen van E noemen we **bogen**. We noteren $V = V(\Gamma)$ en $E = E(\Gamma)$.

Vanaf nu werken we alleen nog maar met *eindige* grafen, m.a.w. grafen waarvan de toppenverzameling eindig is. Merk op dat de bogenverzameling in dat geval ook eindig is.

Grafen worden soms ook gedefinieerd aan de hand van hun toppenverzameling en een irreflexieve symmetrische relatie, de adjacentierelatie.

Definitie 1.2

Zij Γ een graaf. Twee toppen u en v zijn **adjacent** (notatie: $u \sim v$) als en slechts als $\{u, v\} \in E(\Gamma)$. Adjacente toppen heten **buren**. De **graad** $\deg(v)$ van een top v is het aantal buren van v .

Een graaf is **compleet** als alle toppen adjacent zijn met elkaar. Een graaf is **boogloos** als geen enkel paar toppen adjacent is.

Het **complement** van Γ is de graaf $\bar{\Gamma}$ met toppenverzameling $V(\Gamma)$ en waarbij twee toppen adjacent zijn als en slechts als ze niet adjacent zijn in Γ .

De complete graaf met n toppen noteren we met K_n . De boogloze graaf met n toppen is het complement van de complete graaf met n toppen en noteren we daarom met \bar{K}_n .

Gewoonlijk wordt een graaf voorgesteld door een figuur met stippen als toppen en lijnen als bogen. We zullen niet-adjacente toppen soms verbinden met een rode stippellijn voor de duidelijkheid.

Definitie 1.3

Zij Γ een graaf en $u, v \in V(\Gamma)$. Een **wandeling** (van lengte n) van u naar v is een opeenvolging van toppen (w_1, w_2, \dots, w_n) zodat $u = w_1$, $v = w_n$ en $w_i \sim w_{i+1}$ voor alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$. We noemen een graaf **samenhangend** als er voor elk paar toppen u en v een wandeling van u naar v bestaat.

Zij Γ samenhangend. De **afstand** $d(u, v)$ tussen twee toppen u en v is de lengte van een kortste wandeling van u naar v . De **diameter** $\text{diam}(\Gamma)$ van Γ is de grootst mogelijke afstand tussen een paar toppen in $V(\Gamma)$.

Morfismen zijn in het algemeen structuurbewarende afbeeldingen. Morfismen tussen grafen zullen in het bijzonder de adjacentie bewaren. Met “bewaren” bedoelen we dat adjacente toppen worden afgebeeld op adjacente toppen en omgekeerd.

Definitie 1.4

Zij $\Gamma = (V, E)$ een graaf. Een **automorfisme** van Γ is een permutatie van V die adjacentie bewaart. De verzameling van alle automorfismen van Γ noteren we met $\text{Aut}(\Gamma)$.

We zeggen dat Γ **toptransitief** is als en slechts als er voor alle $u, v \in V$ een automorfisme bestaat dat u op v afbeeldt. We zeggen dat Γ **boogtransitief** is als en slechts als er voor alle $b_1, b_2 \in E$ een automorfisme bestaat dat b_1 op b_2 afbeeldt.

Men toont gemakkelijk aan $\text{Aut}(\Gamma)$ een permutatiegroep is. Daarom noemen we het ook wel de *automorfismegroep* van Γ .

We zullen vaak beweren dat grafen “gelijk” zijn terwijl we eigenlijk “isomorf” bedoelen.

1.2 Regulariteit

De definities in deze paragraaf zijn van fundamenteel belang voor de opbouw van de volgende hoofdstukken.

Definitie 1.5

Een graaf is **regulier** als elke top dezelfde graad k heeft.

Willen we de waarde van k specificeren, dan zeggen we dat de graaf k -regulier is.

Lemma 1.6

Een toptransitieve graaf is regulier.

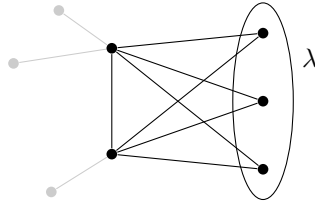
Bewijs. Zij Γ een toptransitieve graaf en $u, v \in V(\Gamma)$ willekeurig. Dan bestaat er een automorfisme θ waarvoor $u^\theta = v$. Omdat een automorfisme adjacentie bewaart induceert θ op natuurlijke wijze een bijectie tussen de burens van u en die van v . Bijgevolg is $\text{deg}(u) = \text{deg}(v)$. Omdat u en v willekeurig waren volgt het gestelde. \square

Naast de “gewone” regulariteit bestaan er nog andere vormen waarin een graaf regulier kan zijn.

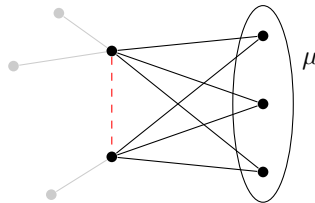
Definitie 1.7

Zij Γ een graaf met n toppen.

- Γ is **boogregulier** als Γ niet boogloos is en er getallen k en λ bestaan zodat Γ k -regulier is en elk paar adjacente toppen precies λ gemeenschappelijke burenen heeft.



- Γ is **coboogregulier** als Γ niet compleet is en er getallen k en μ bestaan zodat Γ k -regulier is en elk paar niet-adjacente toppen precies μ gemeenschappelijke burenen heeft.



- Γ is **sterk regulier** als Γ zowel boogregulier als coboogregulier is.

In de bovenstaande gevallen zeggen we dat Γ boogregulier, coboogregulier of sterk regulier is met respectievelijke **parameters** (n, k, λ) , (n, k, μ) of (n, k, λ, μ) .

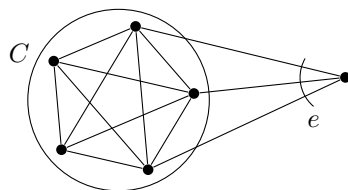
Als we alleen de waarde van λ of μ duidelijk willen maken zeggen we dat de graaf λ -boogregulier respectievelijk μ -coboogregulier is.

Als we boogloze grafen zouden toelaten voldoen ze automatisch aan de definitie van boogregulariteit voor elke waarde van λ . Juist om die reden spreken we af dat een boogloze graaf *niet* boogregulier is. Volledig analoog beschouwen we complete grafen *niet* als coboogregulier.

Definitie 1.8

Een **kliëk** is een niet-lege deelverzameling C van V waarvan elk paar toppen adjacent is. Een kliëk is **maximaal** als die niet strikt bevat is in een andere kliëk. Een kliëk is **maximum** als er geen grotere kliëk bestaat.

Een kliëk C is **regulier** als elke top buiten die kliëk eenzelfde aantal burenen in C heeft.



Dat aantal noemen we de **nexus** van C en noteren we met e .

Een reguliere klik met nexus e noemen we e -regulier. Een reguliere klik met grootte c noemen we kortweg een c -klik.

Let goed op het verschil tussen maximale en maximum klikken. Maximum klikken zijn steeds maximaal. De omgekeerde uitspraak is niet altijd waar. Merk ook op dat we elke klik per inductie kunnen uitbreiden tot een maximale klik.

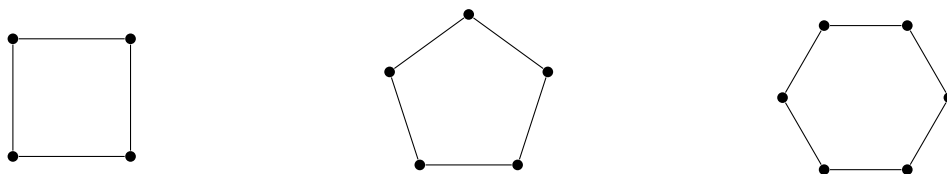
1.3 Voorbeelden

Om vertrouwd te geraken met de definities geven we enkele voorbeelden. Het kan een interessante oefening zijn om al eens naar definitie 2.3 te kijken en te achterhalen welke voorbeelden Neumaiergrafen zijn.

Voorbeeld 1.9. De *complete graaf* K_n is boogregulier met parameters $(n, n-1, n-2)$: er zijn n toppen, elke top is adjacent met alle andere $n-1$ toppen en elk paar adjacenten toppen heeft $n-2$ gemeenschappelijke burenen. Bovendien is elke deelverzameling van de toppenverzameling een reguliere klik met nexus gelijk aan de grootte van die klik.

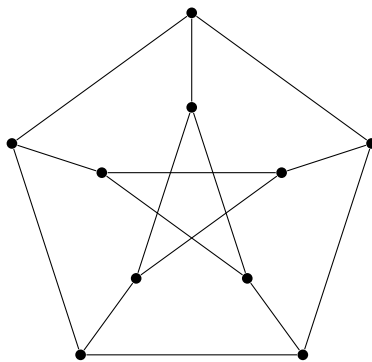
De *boogloze graaf* $\overline{K_n}$ is coboogregulier met parameters $(n, 0, 0)$: er zijn n toppen en geen enkele top heeft een buur, laat staan een gemeenschappelijke buur met een andere top. Bovendien is elke top een 0-reguliere 1-klik.

Voorbeeld 1.10. De *4-cykel* C_4 is sterk regulier met parameters $(4, 2, 0, 2)$ en heeft vier 1-reguliere 2-kliken, namelijk elke boog. Een *5-cykel* C_5 is sterk regulier met parameters $(5, 2, 0, 1)$ en heeft geen reguliere klik. De *6-cykel* C_6 is boogregulier met parameters $(6, 2, 0)$ maar niet coboogregulier en heeft ook geen reguliere klik. Algemeen is de cykelgraaf C_n , $n \geq 6$, boogregulier met parameters $(n, 2, 0)$, niet coboogregulier en bevat C_n geen reguliere klik.



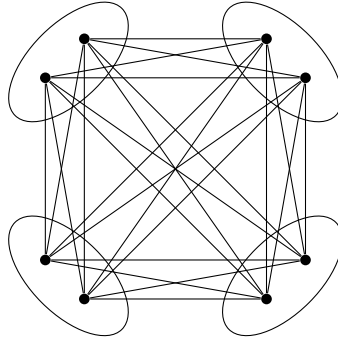
Figuur 1.1: De cykelgrafen C_4, C_5 en C_6 .

Voorbeeld 1.11. De *Petersengraaf* is sterk regulier met parameters $(10, 3, 0, 1)$. Je kan dit gemakkelijker inzien als je de toppenverzameling beschouwt als alle paren $\{a, b\} \subseteq \{1, \dots, 5\}$, $a \neq b$, waarbij twee toppen adjacent zijn als en slechts als de koppels disjunct zijn. De Petersengraaf heeft geen reguliere klikken.



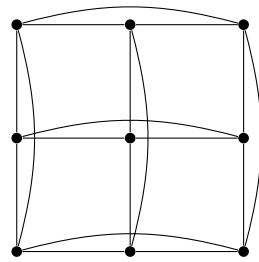
Figuur 1.2: De Petersengraaf

Voorbeeld 1.12. De *compleet multipartiete graaf* $K_{s \times t}$ op s verzamelingen van grootte t is sterk regulier met parameters $(st, st - t, st - 2t, st - t)$ en heeft t^s reguliere s -klieken met nexus $s - 1$ (door uit elke partitieklaas één top te kiezen).



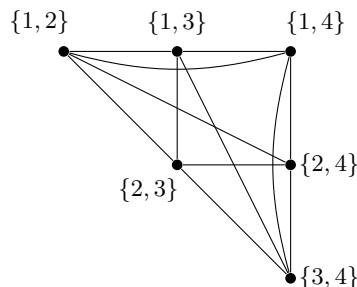
Figuur 1.3: $K_{4 \times 2}$

Voorbeeld 1.13. Het *vierkant rooster* $L_2(s)$ is de graaf met als toppenverzameling alle koppels $(a, b) \in \{1, \dots, s\}^2$ met $a \neq b$, waarbij twee koppels adjacent zijn als precies één component gelijk is. Het vierkant rooster $L_2(s)$ is sterk regulier met parameters $(s^2, 2s - 2, s - 2, 2)$ en heeft $2s$ reguliere s -klieken met nexus 1 (de “rechten”).



Figuur 1.4: $L_2(3)$

Voorbeeld 1.14. De *triangulaire graaf* $T(s)$ is de graaf met als toppen alle paren $\{a, b\} \subseteq \{1, \dots, s\}$, $a \neq b$, waarbij twee paren adjacent zijn als ze juist één element gemeenschappelijk hebben. De triangulaire graaf $T(s)$ is sterk regulier met parameters $(\binom{s}{2}, 2(s - 2), s - 2, 4)$ en heeft s reguliere s -klieken met grootte $s - 1$ en nexus 2 (de paren $\{a, b\}$ met a of b vast).

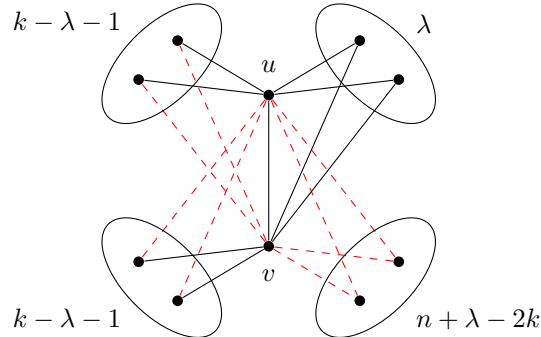


Figuur 1.5: $T(4)$

Merk op dat $T(5)$ het complement is van de Petersengraaf uit voorbeeld 1.11. Het is geen toeval dat het complement van een sterk reguliere graaf ook sterk regulier is, zoals we nu zullen illustreren.

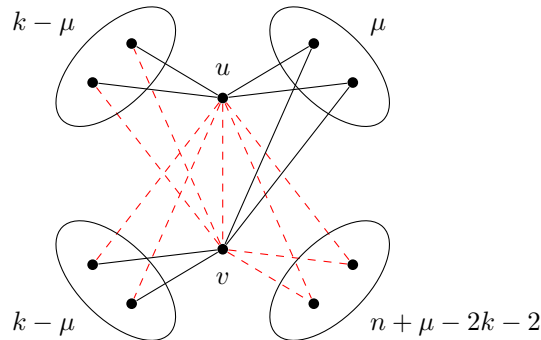
1.4 De lokale structuur van twee toppen

Het kan soms interessant zijn om alle mogelijke configuraties van toppen rond twee adjacenten toppen u en v te bekijken. Als de graaf boogregulier is kunnen we direct al de groottes van alle bijhorende verzamelingen bepalen zoals in de onderstaande figuur.



In het bijzonder kunnen we besluiten dat het complement van een boogreguliere graaf met parameters (n, k, λ) coboogregulier is met parameters $(n, n - k - 1, n + \lambda - 2k)$.

Voor niet-adjacente toppen in een coboogreguliere graaf vinden we het volgende – analoge – schema.



Op een gelijkaardige manier besluiten we dat het complement van een coboogreguliere graaf met parameters (n, k, μ) boogregulier is met parameters $(n, n - k - 1, n + \mu - 2k - 2)$.

Samengevat hebben we de volgende stelling.

Stelling 1.15

Als Γ boogregulier is met parameters (n, k, λ) is $\bar{\Gamma}$ coboogregulier met parameters $(n, n - k - 1, n + \lambda - 2k)$. Als Γ coboogregulier is met parameters (n, k, μ) is $\bar{\Gamma}$ boogregulier met parameters $(n, n - k - 1, n + \mu - 2k - 2)$.

Als we beide resultaten bijvoegen, bekomen we de eigenschap dat het complement van een sterk reguliere graaf met parameters (n, k, λ, μ) ook sterk regulier is met bijhorende parameters $(n, n - k - 1, n + \mu - 2k - 2, n + \lambda - 2k)$.

Hoofdstuk 2

Kennismaking met Neumaiergrafen

We starten dit hoofdstuk met een stelling die Neumaier in 1981 heeft bewezen. Het resultaat verklaart voor een groot deel de oorsprong van het begrip “Neumaiergraaf”, dat we daarna definiëren. Vervolgens beschouwen we een aantal handige eigenschappen van Neumaiergrafen die nog van pas zullen komen in de volgende hoofdstukken. Alle lemma’s en stellingen uit dit hoofdstuk zijn afkomstig uit het artikel in [11], met uitzondering van stelling 2.9(i) en gevolg 2.10.

2.1 Een stelling van Neumaier

Het oorspronkelijke bewijs van deze stelling maakt gebruik van zogenaamde $1\frac{1}{2}$ -designs. Hier kiezen we echter voor een directere aanpak die niet steunt op die definitie.

Stelling 2.1 (Neumaier)

Elke top- en boogtransitieve graaf met een reguliere klik is sterk regulier.

Bewijs. Zij Γ een top- en boogtransitieve graaf en C een e -reguliere klik in Γ . We moeten bewijzen dat Γ boogregulier en coboogregulier is.

Γ is boogregulier

Zij $b_1, b_2 \in E(\Gamma)$ willekeurig. Wegens de boogtransitiviteit bestaat er een automorfisme θ waarvoor $b_1^\theta = b_2$. Omdat een automorfisme adjacentie bewaart induceert θ op natuurlijke wijze een bijectie tussen de gemeenschappelijke burens van de elementen van b_1 en die van b_2 . Bijgevolg is het aantal gemeenschappelijke burens van de elementen van b_1 respectievelijk b_2 gelijk. Omdat de bogen van Γ precies de paren van adjacentie toppen zijn en b_1 en b_2 willekeurig waren volgt daaruit dat alle adjacentie toppen evenveel gemeenschappelijke burens hebben. Samen met lemma 1.6 volgt daaruit de boogregulariteit.

Γ is coboogregulier

Kies een top $u \in V(\Gamma)$ en een boog $b \in E(\Gamma)$. We tonen aan dat de getallen

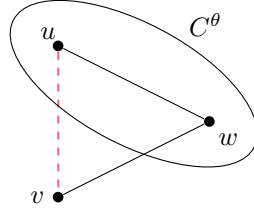
$$s := |\{\theta \in \text{Aut}(\Gamma) \mid u \in C^\theta\}|$$
$$t := |\{\theta \in \text{Aut}(\Gamma) \mid b \subseteq C^\theta\}|$$

onafhankelijk zijn van die keuze. Zij v een willekeurige top. Wegens de toptransitiviteit bestaat er een automorfisme ϕ waarvoor $u^\phi = v$. Bovendien is de rechtse samenstelling met ϕ een

bijjectie tussen de verzamelingen $\{\theta \in \text{Aut}(\Gamma) \mid u \in C^\theta\}$ en $\{\theta \in \text{Aut}(\Gamma) \mid v \in C^\theta\}$. Bijgevolg zijn hun kardinaliteiten gelijk. Omdat v willekeurig was volgt daaruit dat s niet afhangt van u . Volledig analoog is ook t onafhankelijk van b .

We tonen nu de coboogregulariteit aan. Merk vooreerst op dat de verzamelingen C^θ ook reguliere klikken zijn met nexus e omdat een automorfisme adjacentie bewaart. Kies willekeurig twee niet-adjacente toppen $u \not\sim v$ en stel μ gelijk aan hun aantal gemeenschappelijke burenen. Beschouw de verzameling

$$A := \{(w, \theta) \in V(\Gamma) \times \text{Aut}(\Gamma) \mid u \sim w \sim v \text{ en } u, w \in C^\theta\}.$$



Door de koppels van A op twee manieren te tellen bekomen we de gelijkheid

$$\begin{aligned} & (\# \text{gemeenschappelijke burenen van } u \text{ en } v) \cdot (\# \text{verzamelingen } C^\theta \text{ die } \{u, w\} \text{ bevatten}) \\ &= (\# \text{verzamelingen } C^\theta \text{ die } u \text{ bevatten}) \cdot (\# \text{burenen van } v \text{ in } C^\theta) \end{aligned}$$

of in symbolen

$$\mu \cdot t = s \cdot e$$

waaruit volgt dat μ alleen afhangt van de constanten s, t en e en niet van de keuze van u en v . Omdat $u \not\sim v$ willekeurig waren hebben alle niet-adjacente toppen evenveel gemeenschappelijke burenen. Samen met lemma 1.6 volgt daaruit de coboogregulariteit. \square

Neumaier vroeg zich bij de formulering van de vorige stelling af of men de voorwaarden kan afzwakken zodat de graaf hoogstens boogregulier hoeft te zijn met een reguliere klik.

Vraag 2.2 (Neumaier). Is elke boogreguliere graaf met een reguliere klik sterk regulier?

Het antwoord op die vraag blijkt nee te zijn. We zullen dat bewijzen door expliciete constructies van tegenvoorbeelden te geven, de zogenaamde *strikte Neumaiergrafen*.

2.2 De definitie van een Neumaiergraaf

De volgende definitie werd in 2018 ingevoerd door Evans, Goryainov en Panasenko. In het bijhorende artikel [6] vermelden zij dat de definitie analoog is aan die van Dezagrafen en strikte Dezagrafen, waar wij verder niet op in zullen gaan.

Definitie 2.3

Een **Neumaiergraaf** is een niet-complete boogreguliere graaf die een reguliere klik bevat. Een **strikte Neumaiergraaf** is een Neumaiergraaf die niet sterk regulier is.

Als een Neumaiergraaf boogregulier is met parameters (n, k, λ) en een e -reguliere c -klik bevat noemen we het tupel $(n, k, \lambda; e, c)$ de **parameters** van die Neumaiergraaf.

We weten a priori niet of de parameters van een Neumaiergraaf uniek zijn. Dat ze wel degelijk uniek zijn, zal volgen uit stelling 2.7.

Er zijn talloze voorbeelden van Neumaiergrafen. Voorbeelden 1.12, 1.13 en 1.14 uit het vorige hoofdstuk zijn ook allemaal Neumaiergrafen en bovendien sterk regulier.

Voorbeeld 2.4. De kleinste Neumaiergraaf is de cykelgraaf C_4 , met parameters $(4, 2, 0; 1, 2)$.

Het construeren van *strikte* Neumaiergrafen is een veel moeilijker opdracht. In vergelijking met de 4-cykel is de kleinste strikte Neumaiergraaf veel minder voor de hand liggend. In hoofdstuk 3 gaan we daar dieper op in.

In de definitie wordt het complete geval uitgesloten. Daar is een reden voor: in sommige situaties gedraagt de complete graaf zich opmerkelijk anders dan Neumaiergrafen. Zo is stelling 2.7 niet langer geldig voor complete grafen. In het bijzonder zouden we dus niet kunnen spreken van *de* parameters van een complete graaf. Ook boogloze grafen worden vermeden, want ze zijn niet boogregulier.

2.3 Nuttige eigenschappen

Voordat we dit hoofdstuk beëindigen geven we nog enkele interessante eigenschappen van Neumaiergrafen die nog van pas zullen komen.

Dankzij onderstaand lemma mogen we er in een Neumaiergraaf altijd van uitgaan dat $e \neq c$.

Lemma 2.5

Een reguliere graaf die een e -reguliere c -kliek met $e = c$ bevat is compleet.

Bewijs. Een top in een e -reguliere c -kliek waarvoor $e = c$ is adjacent met elke andere top. Uit de regulariteit volgt dan dat elke top adjacent is met alle andere toppen. \square

Het volgende lemma heeft een kort, elegant bewijs en zullen we nog vaak gebruiken.

Lemma 2.6

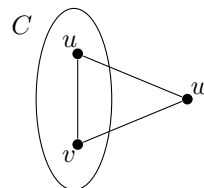
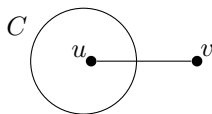
Zij Γ een Neumaiergraaf met parameters $(n, k, \lambda; e, c)$. Dan geldt:

- (i) $c(k - c + 1) = (n - c)e$
- (ii) $c(c - 1)(\lambda - c + 2) = (n - c)e(e - 1)$

Bewijs. Zij C een e -reguliere c -kliek in Γ . Beschouw de verzamelingen

$$A := \{(u, v) \in V(\Gamma)^2 \mid u \in C, v \notin C \text{ en } u \sim v\}$$

$$B := \{(\{u, v\}, w) \in E(\Gamma) \times V(\Gamma) \mid u, v \in C, w \notin C \text{ en } u \sim w \sim v\}.$$



Dubbele telling van A levert het eerste puntje op en dubbele telling van B het tweede puntje (ook voor het speciale geval waarin $e = 0$). \square

Men voelt waarschijnlijk al aan dat de reguliere kliken een cruciale rol spelen in de theorie van de Neumaiergrafen. De volgende karakterisatie van reguliere kliken doet daar nog een schepje bovenop.

Stelling 2.7

Zij Γ een Neumaiergraaf met parameters $(n, k, \lambda; e, c)$ en C een klik in Γ . De volgende uitspraken zijn equivalent:

- (i) C heeft grootte c
- (ii) C is e -regulier
- (iii) C is regulier
- (iv) C is maximum

Bewijs. (i) \implies (ii). Stel $W := V \setminus C$ en definieer voor elke top $v \in W$ het getal e_v als het aantal burens van v in C . We bewijzen dat $e_v = e$ voor alle $v \in W$. Beschouwen we exact dezelfde dubbele tellingen als in het bewijs van lemma 2.6, dan bekommen we

$$c(k - c + 1) = \sum_{v \in W} e_v \quad \text{en} \quad c(c - 1)(\lambda - c + 2) = \sum_{v \in W} e_v(e_v - 1).$$

Door de formules uit lemma 2.6 in de linkerleden substitueren krijgen we

$$\sum_{v \in W} (e - e_v) = 0 \quad \text{en} \quad \sum_{v \in W} (e(e - 1) - e_v(e_v - 1)) = 0$$

wat we kunnen omvormen naar

$$\sum_{v \in W} (e - e_v)^2 = (2e - 1) \sum_{v \in W} (e - e_v) - \sum_{v \in W} (e(e - 1) - e_v(e_v - 1)) = 0$$

zodat wel degelijk $e = e_v$ geldt voor alle $v \in W$ en C e -regulier is.

(ii) \implies (iii). Triviaal.

(iii) \implies (iv). Zij e_0 de nexus en c_0 de grootte van C . Dan is Γ een Neumaiergraaf met parameters $(n, k, \lambda; e_0, c_0)$. Stel, uit het ongerijmde, dat er een grotere klik C' bestaat. Dan heeft die klik een deelklik C_0 met grootte c_0 . Wegens de implicatie (i) \implies (ii) – met c_0 in plaats van c – is C_0 een reguliere klik. Kies dan een top in $C' \setminus C_0$. Die top heeft c_0 burens in C . Maar dan is de nexus van C_0 precies c_0 , zodat Γ compleet is volgens lemma 2.5, een strijdigheid.

(iv) \implies (i). We weten dat er een reguliere c -klik bestaat, die volgens de implicatie (iii) \implies (iv) maximum is. Met andere woorden: een maximum klik heeft grootte c . \square

Merk op dat het complement van een compleet multipartiete graaf niets anders is dan een unie van kliken.

Lemma 2.8

Een 0-coboogreguliere graaf is gelijk aan de unie van (minstens twee) kliken met dezelfde grootte.

Bewijs. Beschouw de relatie “ $u = v$ of $u \sim v$ ”. Dit is een equivalentierelatie (de transitiviteit volgt uit de 0-coboogregulariteit) waarvan de equivalentieklassen precies de kliken zijn. Uit de regulariteit volgt ten slotte dat die kliken even groot zijn. Per definitie is de graaf niet compleet, zodat er minstens twee kliken zijn. \square

Stelling 2.9

Zij Γ een Neumaiergraaf met parameters $(n, k, \lambda; e, c)$.

- (i) Als $e = 0$ is Γ gelijk aan een unie van klikken met dezelfde grootte.
- (ii) Als $e = c - 1$ is Γ gelijk aan een compleet multipartiete graaf op verzamelingen van dezelfde grootte.

Bewijs. (i). Stel dat $e = 0$. Door toppen in een reguliere klik te beschouwen vinden we $k = c - 1$ en $\lambda = c - 2$ (we konden daar ook lemma 2.6 voor gebruiken). Kies twee willekeurige niet-adjacente toppen $u \not\sim v$. We tonen aan dat ze geen gemeenschappelijke burens hebben. Stel immers dat $u \sim w \sim v$. Omdat $\lambda = c - 2$ heeft w in totaal $c - 2$ gemeenschappelijke burens met u , die duidelijk verschillen van u en v . Dat wil zeggen dat w minstens c burens heeft, in strijd met $k = c - 1$. We besluiten dat u en v geen gemeenschappelijke burens hebben. Omdat $u \not\sim v$ willekeurig waren is Γ 0-coboogregulier. De rest volgt uit lemma 2.8.

(ii). Stel dat $e = c - 1$. Zij C een e -reguliere c -klik in Γ en u en v twee verschillende toppen in C . Omdat $e = c - 1$ bestaat er voor elke top hoogstens één top in c die er niet adjacent mee is. Er is dus geen enkele top zowel niet-adjacent met u als v . Beschouwen we het complement van Γ , dan wil dat zeggen dat de niet-adjacente toppen u en v in $\bar{\Gamma}$ geen gemeenschappelijke burens hebben. Samen met stelling 1.15 volgt daaruit dat $\bar{\Gamma}$ 0-coboogregulier is. Uit lemma 2.8 volgt dat $\bar{\Gamma}$ gelijk is aan de unie van klikken met dezelfde grootte, m.a.w. Γ is een compleet multipartiete graaf op verzamelingen van dezelfde grootte. \square

Gevolg 2.10

Een strikte Neumaiergraaf is samenhangend met diameter 2 of 3.

Bewijs. Zij Γ een strikte Neumaiergraaf met parameters $(n, k, \lambda; e, c)$. Uit stelling 2.9(i) volgt dat $e \geq 1$, want anders zou Γ sterk regulier zijn. Kies nu een reguliere klik. Door elke top met een top uit die klik te verbinden kunnen we elk paar toppen verbinden via een wandeling van lengte ten hoogste 3. \square

Om het hoofdstuk af te sluiten geven we nog een definitie die we in het vervolg meermaals zullen tegenkomen.

Definitie 2.11

Een **spread** is een verzameling van klikken die de toppenverzameling partitioneren. Wanneer alle klikken regulier zijn spreken we van een **reguliere spread**.

Elke graaf heeft een spread, want elke top vormt op zich al een klik.

We zijn al twee voorbeelden van reguliere spreads tegengekomen. Bij de compleet multipartiete graaf $K_{s \times t}$ zijn er $(t!)^{s-1}$ mogelijke spreads. Het vierkant rooster $L_2(s)$ heeft 2 spreads (de “horizontale” en de “verticale” reguliere klikken). Er zijn ook Neumaiergrafen zonder reguliere spread zoals de triangulaire graaf. Alle tot nu toe gekende *strikte* Neumaiergrafen (zie hoofdstukken 3, 4 en 5) hebben een reguliere spread. In hoofdstuk 6 komen we daarop terug.

Deel II

Constructies van strikte Neumaiergrafen

Hoofdstuk 3

De kleinste strikte Neumaiergraaf

De vraag die Neumaier in 1981 stelde (vraag 2.2) werd voor het eerst beantwoord in 2018 door Greaves en Koolen. In dat jaar publiceerden zij het artikel in [9] met daarin een constructie van een (oneindige) familie van strikte Neumaiergrafen. In hoofdstuk 4 bespreken we die uitgebreid. Kort nadien ontdekten Goryainov en Shalaginov vier nieuwe strikte Neumaiergrafen met parameters $(24, 8, 2; 1, 4)$. Zij die vlot Russisch verstaan worden doorverwezen naar [8]. Nog geen jaar later kwamen Greaves en Koolen op de proppen met een nieuwe familie van strikte Neumaiergrafen in [10], die we behandelen in hoofdstuk 5. Ongeveer gelijktijdig stelden Evans, Goryainov en Panasenko nog twee rijen van strikte Neumaiergrafen op. Bovendien ontdekten ze de kleinste strikte Neumaiergraaf, die 16 toppen bezit, en bewezen dat er geen kleinere bestaat.

We beginnen met de meest recente constructie, zoals die gegeven wordt in [6]. In het artikel komt er nog een tweede constructie aan bod, maar die is zodanig analoog dat we die achterwege laten. De rij die we opstellen bevat de kleinste strikte Neumaiergraaf als eerste element. Dat het wel degelijk de kleinste is tonen we daarna aan.

3.1 Affiene polaire grafen

We bespreken eerst kort een speciale familie van grafen, gebaseerd op een kwadratische vorm over een eindig veld. De volgende definitie is afkomstig uit [6].

Zij q een priemmacht en \mathbb{F}_q het eindig veld van orde q .

Definitie 3.1 (Affiene polaire graaf $VO^+(2n, q)$)

Voor een $2n$ -dimensionale vectorruimte V over \mathbb{F}_q definiëren we $VO^+(2n, q)$ als de graaf met toppenverzameling V en adjacentierelatie

$$v \sim w \iff v \neq w \text{ en } Q(v - w) = 0$$

waarbij $Q : V \rightarrow \mathbb{F}_q$ een niet-ontaarde hyperbolische vorm is.

Merk op dat de dimensie van V steeds even moet zijn omdat Q hyperbolisch is. We kunnen analoge grafen definiëren voor elliptische en parabolische vormen (die grafen duiden we dan aan met $VO^-(2n, q)$ en $VO(2n + 1, q)$), maar die hebben we verder niet meer nodig.

Omdat V isomorf is met \mathbb{F}_q^{2n} zullen we in het vervolg veronderstellen dat $V = \mathbb{F}_q^{2n}$. Bovendien kunnen we er steeds voor zorgen dat Q gelijk is aan de *standaardvorm*

$$Q : V \rightarrow \mathbb{F}_q : v = (v_1, v_2, \dots, v_{2n}) \mapsto v_1v_2 + \dots + v_{2n-1}v_{2n}$$

via een goed gekozen basisovergang.

Lemma 3.2

De graaf $VO^+(2n, q)$ is sterk regulier met parameters

$$(q^{2n}, (q^{n-1} + 1)(q^n - 1), q(q^{n-2} + 1)(q^{n-1} - 1) + q - 2, q^{n-1}(q^{n-1} + 1)).$$

Bewijs. Zonder bewijs (zie ook [6], lemma 8). □

De kleinste affine polaire graaf $VO^+(2, 2)$ is gelijk aan de kleinste Neumaiergraaf: de 4-cykel.

3.2 Switching

We introduceren nu een belangrijke operatie op een graaf, die we de “switching” noemen.

Definitie 3.3 (Switching)

Zij Γ een graaf en $A, B \subseteq V(\Gamma)$ disjuncte verzamelingen. De **switching** $S_{A,B}(\Gamma)$ is de graaf (V, E) met

$$\begin{aligned} V &:= V(\Gamma) \\ E &:= E(\Gamma) \cup \{\{u, v\} \mid u \in A \text{ en } v \in B\} \setminus \{\{u, v\} \in E(\Gamma) \mid u \in A \text{ en } v \in B\}. \end{aligned}$$

We keren m.a.w. de adjacentie om tussen de toppen van A en die van B .

We zeggen ook wel dat we de bogen tussen A en B *switchen*. Merk op dat we na twee dezelfde switchingen terug de oorspronkelijke graaf uitkomen.

Ons doel is om op een doordachte manier bogen te switchen zodat sterk reguliere grafen omgezet worden in strikte Neumaiergraf. Om de regulariteit niet te verliezen willen we dat elke top van A adjacent is met precies de helft van de toppen uit B en omgekeerd. Als A en B bovendien reguliere cliques zijn, zullen ze die regulariteit na een switching niet verliezen:

Lemma 3.4

Zij Γ een (k -reguliere) graaf en $A, B \subseteq V(\Gamma)$ disjuncte reguliere cliques waarvan de nexus de helft van de grootte bedraagt. Dan is $S_{A,B}(\Gamma)$ een graaf met diezelfde eigenschappen.

Bewijs. We beweren dat zowel de graad van elke top als de nexus van A en B invariant blijft. Kies een willekeurige top v . Als $v \in V(\Gamma) \setminus (A \cup B)$ blijven de bogen incident met v onveranderd, want we switchen alleen de bogen tussen A en B . De graad van v en het aantal burens van v in A of B blijft dus ook hetzelfde. Als $v \in A \cup B$, stel dan zonder verlies van algemeenheid dat $v \in A$. Na de switching is v adjacent met dezelfde toppen in $V(\Gamma) \setminus B$ en met de $c_B - e_B$ andere toppen van B , waarbij c_B de grootte is van B en e_B de nexus. Omdat $c_B = 2e_B$ blijft het aantal burens van v in B , en dus ook de graad van v , gelijk. Omdat v willekeurig was, volgt het gestelde. □

De verzamelingen A en B hoeven niet per se even groot te zijn. In de constructie die volgt is dat wel het geval.

3.3 Constructie

We zullen de techniek van switching nu toepassen op de grafen uit definitie 3.1 waarvoor $q = 2$. Beschouw dus $\Gamma = VO^+(2n, 2)$ en zij $V = V(\Gamma)$ de bijhorende vectorruimte. De elementen van V noteren we vanaf nu met matrices over \mathbb{F}_2 , als volgt:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & v_3 & \cdots & v_{2n-1} \\ v_2 & v_4 & \cdots & v_{2n} \end{pmatrix}.$$

We definiëren nu vier concrete deelruimten van V . De matrices moet men beschouwen als verzamelingen waarin de symbolen “*” zowel de waarden 0 als 1 kunnen aannemen – onafhankelijk van elkaar.

$$\begin{aligned} A_1 &:= \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & B_1 &:= \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_2 &:= \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * \end{pmatrix} & B_2 &:= \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Merk op dat al deze deelruimten klikken zijn. We beweren nu dat we door eerst de bogen van A_1 en B_1 te switchen en daarna die van A_2 en B_2 , een strikte Neumaiergraaf verkrijgen.

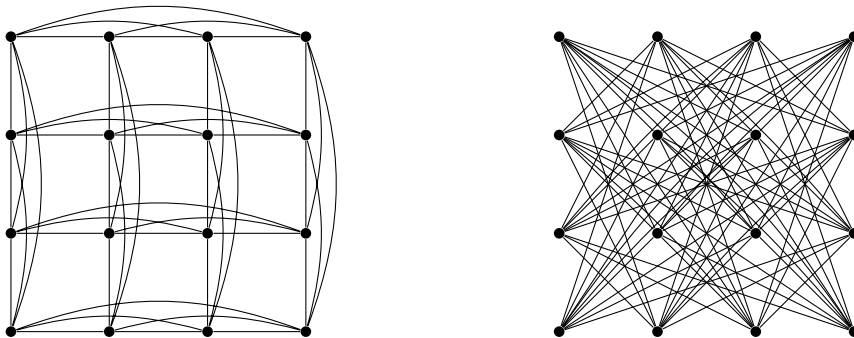
Stelling 3.5

Zij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. De graaf $S_{A_2, B_2}(S_{A_1, B_1}(VO^+(2n, 2)))$ is een strikte Neumaiergraaf met parameters

$$(2^{2n}, (2^{n-1} + 1)(2^n - 1), 2(2^{n-2} + 1)(2^{n-1} - 1); 2^{n-1}, 2^n).$$

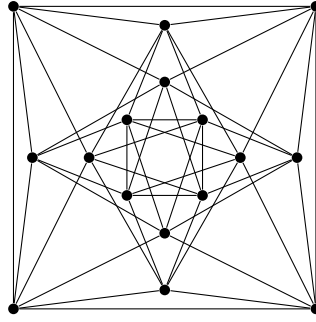
Bewijs. Zonder bewijs. Het bewijs van het geval $n = 2$ wordt gegeven in paragraaf 7.2.1 van hoofdstuk 7. \square

In het geval dat $n = 2$ is $\Gamma = VO^+(4, 2)$ gelijk aan het complement van het vierkant rooster $L_2(4)$.



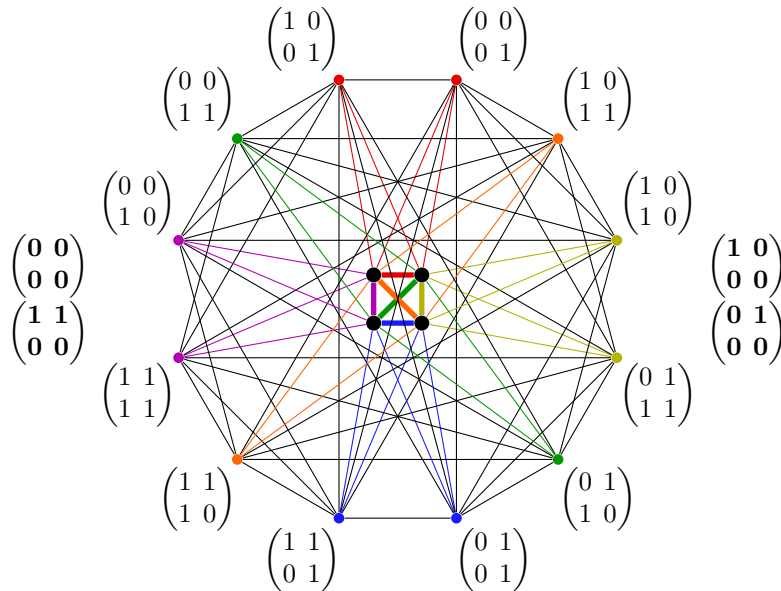
Figuur 3.1: De complementen $L_2(4)$ (links) en $VO^+(4, 2)$ (rechts).

Na de eerste switching is de graaf gelijk aan het complement van de zogenaamde Shrikhandegraaf. De Shrikhandegraaf heeft zelf geen reguliere klikken en is dus geen Neumaiergraaf. Het complement is dat wel.



Figuur 3.2: De Shrikhandegraaf

Na de tweede switching bekommen we de strikte Neumaiergraaf $S_{A_2, B_2}(S_{A_1, B_1}(VO^+(4, 2)))$ met parameters $(16, 9, 4; 2, 4)$. Onderstaande figuur stelt die graaf voor (dezelfde graaf als op de voorpagina). De benaming van de toppen is nog steeds dezelfde als voor de affine polaire graaf. De bogen zijn hier en daar gewijzigd door te switchen.



Figuur 3.3: De graaf $S_{A_2, B_2}(S_{A_1, B_1}(VO^+(4, 2)))$.

De vier middelste toppen vormen een reguliere klik, die we C noemen. Alle andere toppen zijn geordend volgens welke 2 burens ze hebben in C (de nexus is 2) en geven we een aparte kleur. Omdat elk paar toppen 4 gemeenschappelijke burens heeft, zijn er voor elke boog in de klik juist twee toppen buiten de klik adjacent met diens elementen. Elke kleur komt dus 2 keer voor.

De toppen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hebben 8 gemeenschappelijke burens. De toppen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hebben er 6 gemeen. De graaf is dus niet sterk regulier. De boogregulariteit zou je zo kunnen nagaan, maar gebeurt gemakkelijker met de computer zoals in paragraaf 7.2.1.

Merk op dat de graaf een reguliere spread heeft. Een voorbeeld van reguliere klikken die een partitie vormen zijn C , de verzameling van rode en blauwe toppen, de resterende vier toppen in het bovenste deel en de toppen die overblijven in het onderste deel. Het kan ook algemener. In stelling 6.6 construeren we een reguliere spread voor willekeurige waarden van n .

Op het einde van dit hoofdstuk bewijzen we dat deze graaf de kleinste strikte Neumaiergraaf is.

3.4 Restricties op parameters van strikte Neumaiergrafen

Om te bewijzen dat de gevonden graaf met 16 toppen de kleinste strikte Neumaiergraaf is, formuleren we eerst enkele stellingen die de mogelijkheden voor de parameters inperken. Nadien moeten we alleen nog maar nagaan of de enige mogelijke parameters $(n, k, \lambda; e, c)$ waarvoor $n \leq 16$, de parameters $(16, 9, 4; 2, 4)$ zijn.

Dat er een *unieke* kleinste strikte Neumaiergraaf bestaat vermelden we zonder bewijs. De uniciteit wordt aangetoond in [6] met behulp van computersoftware. Het algoritme fixeert eerst de vier toppen van een reguliere klik C , waarna het exhaustief alle reguliere grafen overloopt die C als 2-reguliere klik bevatten. Wegens de vorige observaties zouden we zelfs al de gekleurde toppen en bogen in figuur 3.3 kunnen fixeren. Tot slot wordt er nagegaan of alle resulterende grafen gelijk zijn.

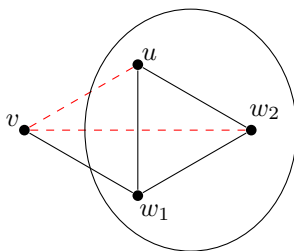
We bewijzen nu 4 stellingen die iets zeggen over de parameters van een strikte Neumaiergraaf. In de eerste twee stellingen hanteren we een gelijkaardige strategie als in het bewijs van stelling 2.1. We passen telkens een dubbele telling toe om te bekomen dat het aantal gemeenschappelijke toppen μ van twee niet-adjacente toppen, niet afhangt van die toppen, waardoor de graaf sterk regulier is, wat niet kan.

Stelling 3.6 ([9], propositie 5.1)

Zij Γ een strikte Neumaiergraaf met parameters $(n, k, \lambda; e, c)$. Dan is $c \geq 4$.

Bewijs. Stel, uit het ongerijmde, dat $c \leq 3$. Uit lemma 2.5 en stelling 2.9 volgt dat $e = 1$ en $c = 3$, anders zou Γ sterk regulier of compleet zijn. Kies willekeurig twee niet-adjacente toppen $u \not\sim v$ en stel μ gelijk aan hun aantal gemeenschappelijke burenen. Beschouw vervolgens de verzameling

$$A := \{(w_1, w_2) \in V(\Gamma)^2 \mid w_1 \sim w_2 \sim u \sim w_1 \sim v\}.$$



Stelling 2.7 leert ons dat $\{u, w_1, w_2\}$ een 1-reguliere klik is voor alle koppels $(w_1, w_2) \in A$. In het bijzonder is $v \sim w_1$ als en slechts als $v \not\sim w_2$. Door de elementen van A op twee manieren te tellen bekomen we de gelijkheid

$$\begin{aligned} & (\#\text{gemeenschappelijke burenen van } u \text{ en } v) \cdot (\#\text{gemeenschappelijke burenen van } u \text{ en } w_1) \\ &= (\#\text{burenen van } u, \text{ niet adjacent met } v) \cdot (\#\text{gemeenschappelijke burenen van } u \text{ en } w_2) \end{aligned}$$

of in symbolen

$$\mu \cdot \lambda = (k - \mu) \cdot \lambda$$

waaruit volgt dat μ alleen afhangt van de constante k en niet van de keuze van u en v . Omdat $u \not\sim v$ willekeurig waren hebben alle niet-adjacente toppen evenveel gemeenschappelijke burenen, zodat Γ sterk regulier is, strijdig. \square

De onderstaande stelling had even goed in het eerste hoofdstuk kunnen staan.

Stelling 3.7 ([1], lemma 1.1.3)

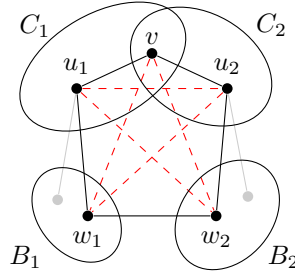
Een 1-coboogreguliere graaf is sterk regulier.

Bewijs. Zij Γ een 1-coboogreguliere graaf. We moeten bewijzen dat Γ boogregulier is.

Beschouw eerst twee maximale kliken C_1 en C_2 die een top v gemeen hebben. We tonen aan dat ze even groot zijn. Als $C_1 = C_2$ zijn we klaar. Kies anders twee toppen $u_1 \in C_1 \setminus C_2$ en $u_2 \in C_2 \setminus C_1$ zodat $u_1 \not\sim u_2$ (wat kan, anders zou C_2 bevat zijn in de grotere kliek $C_2 \cup \{u_1\}$). Definieer

$$B_i := \{w \in V(\Gamma) \setminus C_i \mid w \sim u_i\}$$

voor $i \in \{1, 2\}$. Omdat u_1 en u_2 juist één buur gemeen hebben, namelijk v , is geen enkele top in B_1 adjacent met u_2 en geen enkele top in B_2 adjacent met u_1 . Definieer f als de afbeelding op B_1 die elke w_1 stuurt naar diens unieke gemeenschappelijke buur met u_2 en g als de afbeelding op B_2 die elke w_2 stuurt naar diens unieke gemeenschappelijke buur met u_1 . Kies willekeurig $w_1 \in B_1$. Merk eerst op dat v niet adjacent is met w_1 , want anders is elke top in C_1 adjacent met w_1 door de 1-coboogregulariteit, zodat C_1 strikt bevat is in de kliek $C_1 \cup \{w_1\}$. Als $f(w_1) \in C_2 \setminus \{v\}$ zouden v en w_1 meer dan één gemeenschappelijke buur hebben. We besluiten dat $f(w_1) \in B_2$. Omdat w_1 willekeurig was is het beeld van f bevat in B_2 . Volledig analoog is het beeld van g een deelverzameling van B_1 . Omdat $g(f(w_1)) = w_1$ en $f(g(w_2)) = w_2$ zijn f en g inverse bijecties en is B_1 even groot is als B_2 . Wegens de regulariteit is C_2 even groot als C_1 .



Ook disjuncte maximale kliken zijn even groot: omdat Γ samenhangend is (tussen twee niet-adjacente toppen bestaat er een pad via de top die met beide adjacent is) en elke boog in een maximale kliek zit, kunnen we inductief het vorige geval toepassen. We besluiten dat alle maximale kliken even groot zijn.

Ten slotte is elk paar adjacenten toppen bevat in een maximale kliek. De enige gemeenschappelijke buren zijn de andere toppen van die kliek (anders is de kliek ofwel uitbreidbaar met die buur, ofwel wordt de 1-coboogregulariteit geschonden). Omdat de grootte van de kliek vastligt (het is de maximale grootte) is ook het aantal gemeenschappelijke buren constant, m.a.w. Γ is boogregulier. \square

Gevolg 3.8

Zij Γ een strikte Neumaiergraaf met parameters $(n, k, \lambda; e, c)$. Dan is $n \neq 2k - \lambda + 1$.

Bewijs. Uit het ongerijmde, stel dat $n = 2k - \lambda + 1$. Door stelling 1.15 toe te passen vinden we dat $\bar{\Gamma}$ coboogregulier is met parameters $(n, n - k - 1, n + \lambda - 2k) = (n, n - k - 1, 1)$. Uit stelling 3.7 volgt dat $\bar{\Gamma}$, en dus ook Γ , sterk regulier is, strijdig. \square

De volgende twee stellingen zijn ook gelijkaardig, omdat ze beide gebruik maken van de gelijkheden in lemma 2.6 om ze om te vormen tot nieuwe gelijkheden.

Stelling 3.9 ([6], stelling 1)

Zij Γ een strikte Neumaiergraaf met parameters $(n, k, \lambda; e, c)$. Dan is $\lambda + c + 1 < k + e$.

Bewijs. Kies een e -reguliere c -klik C en toppen $u \in C$ en $v \notin C$ met $u \sim v$. Dan is het aantal gemeenschappelijke buren van u en v in C gelijk aan $e - 1$ en het aantal gemeenschappelijke buren van u en v buiten C hoogstens gelijk aan $k - c$, het aantal buren van u buiten C . We besluiten dat $\lambda \leq e - 1 + k - c$.

We moeten nu alleen nog aantonen dat de gelijkheid zich niet voordoet. Stel, uit het ongerijmde, dat $\lambda = e - 1 + k - c$. Dan is elke buur van u buiten C ook een buur van v . Omdat we v kunnen vervangen door eender welke buur van u buiten C vinden we dat de verzameling $C' := \{u\} \cup \{v \in V(\Gamma) \setminus C \mid u \sim v\}$ een klik is. De grootte van die klik is $k - c + 2$. We bewijzen dat dit getal gelijk is aan c . Door in lemma 2.6 de eerste gelijkheid met $e - 1$ te vermenigvuldigen en in de tweede gelijkheid te substitueren bekomen we

$$(k - c + 1)(e - 1) = (c - 1)(\lambda - c + 2)$$

wat we – door $\lambda = e - 1 + k - c$ in te vullen – kunnen omvormen naar

$$(c - e)(k - 2c + 2) = 0.$$

Uit lemma 2.5 volgt dan dat $k - c + 2 = c$. Daaruit volgt via stelling 2.7 dat C' een reguliere klik is. Door de rollen van u en v desnoods om te wisselen besluiten we dat elke top bevat is in precies twee reguliere klikken en elke boog in juist één reguliere klik. Ten slotte kunnen we een dubbele telling uitvoeren, volledig analoog aan de telling in het bewijs van stelling 2.1 (met $s = 2$ en $t = 1$, zodat $\mu = 2e$). We besluiten dat de graaf sterk regulier is, een strijdigheid. \square

Stelling 3.10 ([12], stelling 4.1)

Zij Γ een strikte Neumaiergraaf met parameters $(n, k, \lambda; e, c)$. Dan is $n \neq 2k - \lambda$.

Bewijs. Stel, uit het ongerijmde, dat $n = 2k - \lambda$. Door in lemma 2.6 de eerste gelijkheid met $2(c - 1)$ te vermenigvuldigen en daarvan de tweede gelijkheid af te trekken bekomen we

$$c(c - 1)(2k - c - \lambda) = (n - c)e(2c - e - 1).$$

Als we $2k - \lambda$ in het linkerlid vervangen door n kunnen we de factor $n - c$ vooropstellen, zodat uiteindelijk

$$(n - c)(c - e)(e - c + 1) = 0.$$

Als $n = c$ of $c = e$ is de graaf compleet (zie lemma 2.5). Als $e = c - 1$ is de graaf compleet multipartiet door stelling 2.9. In elk geval bekomen we een strijdigheid. \square

3.5 De kleinste strikte Neumaiergraaf

Tot slot geven we een overzicht van de zaken die we in de vorige paragraaf hebben bewezen, samen met enkele eerdere resultaten uit hoofdstuk 2. We zouden nog meer restricties kunnen toevoegen, maar met de onderstaande eigenschappen hebben we genoeg informatie om te bewijzen wat we willen bewijzen.

Gevolg 3.11

Voor de parameters $(n, k, \lambda; e, c)$ van een strikte Neumaiergraaf met ten hoogste 16 toppen geldt:

- (i) $4 \leq n < 17$
- (ii) $1 \leq k < n - 1$
- (iii) $0 \leq \lambda < k$
- (iv) $4 \leq c < \lambda + 3$
- (v) $1 \leq e < c - 1$
- (vi) $c(k - c + 1) = (n - c)e$
- (vii) $c(c - 1)(\lambda - c + 2) = (n - c)e(e - 1)$
- (viii) $\lambda + c + 1 < k + e$
- (ix) $n \neq 2k - \lambda$
- (x) $n \neq 2k - \lambda + 1$

Bewijs. De eerste ongelijkheid in (iv) hebben we bewezen in stelling 3.6. Puntje (v) volgt uit lemma 2.5 en stelling 2.9. De beweringen in (vi) en (vii) zijn precies die van lemma 2.6. Uitspraken (viii) en (ix) komen overeen met stellingen 3.9 en 3.10 en laatste bewering is exact gevolg 3.8. De resterende ongelijkheden zijn triviaal. \square

Stelling 3.12

De kleinste strikte Neumaiergraaf heeft parameters $(16, 9, 4; 2, 4)$.

Bewijs. Met behulp van de restricties uit gevolg 3.11 gaan we na welke parameters mogelijk zijn. Onderstaande code werd uitgevoerd in Sage (zie hoofdstuk 6 voor meer informatie over het programmeerwerk). Hoewel de code efficiënter kan, verkiezen we een letterlijke vertaling van gevolg 3.11 voor de duidelijkheid.

```
1 # Print alle mogelijke parameters van strikte Neumaiergrafen met <= 16
  toppen
2 for n in range(4,17):
3     for k in range(1,n-1):
4         for l in range(k): # lambda
5             for c in range(4,l+3):
6                 for e in range(1,c-1):
7                     if c*(k-c+1) == (n-c)*e and c*(c-1)*(l-c+2) == (n-c)*e*(e-1)
8                         and l+c+1 < k+e and n != 2*k-l and n != 2*k-l+1:
9                             print (n,k,l,e,c)
```

De volgende output werd teruggegeven:

```
(16,9,4,2,4)
```

We besluiten dat de kleinste strikte Neumaiergraaf minstens 16 toppen heeft. Dat aantal wordt ook gerealiseerd via de constructie die eerder werd gegeven. \square

Hoofdstuk 4

De grafen $\Gamma_{\alpha, \pi}(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{q})$

In dit eerder “algebraïsche” hoofdstuk bespreken we een familie van geparametriseerde Cayleygrafen, geconstrueerd door Greaves en Koolen in [9]. Onder zekere voorwaarden op de parameters zullen de grafen strikte Neumaiergrafen zijn. Bovendien zullen die voorwaarden nog steeds oneindig veel parameterwaarden toelaten.

4.1 Cayleygrafen

We gaan ervan uit dat de lezer over een basiskennis algebra (in het bijzonder groepentheorie) beschikt om hetgeen wat volgt te begrijpen. Desalniettemin herhalen we eerst de definitie van een Cayleygraaf. Voor een groep G met eenheid e noteren we $G^* := G \setminus \{e\}$.

Definitie 4.1

De *Cayleygraaf* $\text{Cay}(G, S)$ van een groep G en een deelverzameling $S \subseteq G^*$ waarvoor $S = S^{-1}$ is de graaf met toppenverzameling G en bogenverzameling $\{\{g, h\} \mid gh^{-1} \in S\}$.

De definitie eist dat $e \notin S$ opdat de graaf geen zelfbogen heeft.

Lemma 4.2

$\text{Cay}(G, S)$ is $|S|$ -regulier.

Bewijs. Omdat $gh^{-1} \in S \Leftrightarrow h \in Sg$ is elke top g adjacent met juist $|Sg| = |S|$ elementen. \square

Lemma 4.3

$\text{Cay}(G, S)$ is toptransitief.

Bewijs. Beschouw de werking van G op zichzelf door rechtse vermenigvuldiging. De permutatie $g \mapsto gx$ bewaart adjacentie, want $gh^{-1} \in S \Leftrightarrow (gx)(hx)^{-1} \in S$. \square

De transitiviteit is bovendien scherp. Er bestaat met andere woorden precies één automorfisme dat een gegeven top op een andere afbeeldt.

4.2 Cyclotomische getallen

De cyclotomische getallen zullen van pas komen om te controleren wanneer de Neumaiergrafen die we straks invoeren, strikt zijn.

Definitie 4.4 (Cyclotomische getallen)

Zij q een priemmacht en α een primitief element van \mathbb{F}_q . Zij $r, s \in \mathbb{N}$ waarvoor $q = rs + 1$. Voor alle $a, b \in \mathbb{Z}/r$ wordt het r -de **cyclotomisch getal** gedefinieerd als

$$c_\alpha^r(a, b) := \left| \left\{ (i, j) \in (\mathbb{Z}/s)^2 \mid 1 + \alpha^{ri+a} = \alpha^{rj+b} \right\} \right|.$$

In de literatuur worden de cyclotomische getallen vaak aangeduid met haakjes (a, b) . Omdat we willen benadrukken dat het getal afhankelijk is van de keuze van r, s en α doen we dat niet. De s laten we wel weg omdat die in zekere zin te bepalen is uit r en α (het is namelijk de orde van α gedeeld door r).

Voorbeeld 4.5. Kies $q = 7$. Over \mathbb{F}_7 zijn zowel 3 als 5 primitieve elementen. Nochtans is

$$\begin{aligned} c_3^3(0, 1) &= \left| \left\{ (i, j) \in \{0, 1\}^2 \mid 1 + 3^{3i} = 3^{3j+1} \right\} \right| = |\{2, 0\} \cap \{3, 4\}| = 0 \\ c_5^3(0, 1) &= \left| \left\{ (i, j) \in \{0, 1\}^2 \mid 1 + 5^{3i} = 5^{3j+1} \right\} \right| = |\{2, 0\} \cap \{5, 2\}| = 1. \end{aligned}$$

Het cyclotomisch getal is dus afhankelijk van het gekozen primitief element.

Het bewijs van het volgende lemma is gebaseerd op het artikel [4] van Dickson.

Lemma 4.6 (Eigenschappen van cyclotomische getallen)

Zij q een priemmacht en α een primitief element van \mathbb{F}_q . Zij $r, s \in \mathbb{N}$ waarvoor $q = rs + 1$. Dan geldt:

- (i) $c_\alpha^r(a, b) = c_\alpha^r(b, a)$ als s even is
- (ii) $c_\alpha^r(a, b) = c_\alpha^r(r - a, b - a)$

Bewijs. Merk eerst en vooral op dat we in de vergelijking $1 + \alpha^{ri+a} = \alpha^{rj+b}$ in de definitie van de cyclotomische getallen, i en j mogen vervangen door hun tegengestelde of vermeerderen met een constante aangezien die ook over heel \mathbb{Z}/s lopen (en de kardinaliteit dus gelijk blijft).

(i) Substitutie van j door $j + \frac{s}{2}$ geeft

$$\begin{aligned} c_\alpha^r(a, b) &= \left| \left\{ (i, j) \in \mathbb{Z}/s \mid 1 + \alpha^{ri+a} = \alpha^{r(j+\frac{s}{2})+b} \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ (i, j) \in \mathbb{Z}/s \mid 1 + \alpha^{ri+a} = \alpha^{rj+b} \cdot \alpha^{\frac{r-1}{2}} \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ (i, j) \in \mathbb{Z}/s \mid 1 + \alpha^{ri+a} + \alpha^{rj+b} = 0 \right\} \right| \end{aligned}$$

want s is even en $\alpha^{\frac{q-1}{2}} = -1$. De eerste gelijkheid volgt nu uit de symmetrie van de bovenstaande vergelijking.

(ii) Vermenigvuldigen we de vergelijking eerst met α^{-ri-a} en voeren we daarna de substituties $j \rightarrow j + i$ resp. $i \rightarrow -i - 1$ door, dan krijgen we

$$\begin{aligned} c_\alpha^r(a, b) &= \left| \left\{ (i, j) \in \mathbb{Z}/s \mid \alpha^{-ri-a} + 1 = \alpha^{r(j-i)+b-a} \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ (i, j) \in \mathbb{Z}/s \mid \alpha^{-ri-a} + 1 = \alpha^{rj+b-a} \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ (i, j) \in \mathbb{Z}/s \mid \alpha^{r(i+1)-a} + 1 = \alpha^{rj+b-a} \right\} \right| \\ &= c_\alpha^r(r - a, b - a). \end{aligned}$$

□

4.3 De grafen $\Gamma_{\alpha,\pi}(n, m, q)$

In wat volgt is \mathbb{Z}/m de verzameling van restklassen modulo m en \mathbb{F}_q het eindig veld van orde q .

Definitie 4.7

Zij $n, m \in \mathbb{N}$ en q een priemmacht. Dan definiëren we de groep

$$G(n, m, q) := \mathbb{Z}/n \times (\mathbb{Z}/2)^m \times (\mathbb{F}_q, +)$$

als direct product van additieve groepen. Voor elk primitief element α van \mathbb{F}_q en elke bijctie $\pi : ((\mathbb{Z}/2)^m)^* \rightarrow \mathbb{Z}/(2^m - 1)$ definiëren we

$$S^0(n, m, q) := \{(x, y, 0) \in G_{n,m,q} \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

$$S_{\alpha,\pi}^1(n, m, q) := \{(0, y, \alpha^i) \in G_{n,m,q} \mid y \neq 0, i \in \{1, \dots, q-1\} \text{ en } i \equiv \pi(y) \pmod{2^m - 1}\}$$

en stellen we ten slotte $S_{\alpha,\pi}(n, m, q) := S^0(n, m, q) \cup S_{\alpha,\pi}^1(n, m, q)$.

Een hele boterham. Merk op dat de definitie wel degelijk afhangt van de keuze van α en π .

In het vervolg van deze sectie gaan we dieper in op de grafen $\text{Cay}(G(n, m, q), S_{\alpha,\pi}(n, m, q))$. We gaan eerst na wanneer ze goed gedefinieerd zijn (zie definitie 4.1).

Lemma 4.8

Als $q \equiv 1 \pmod{2^{m+1} - 2}$ is $S_{\alpha,\pi}(n, m, q) = -S_{\alpha,\pi}(n, m, q)$.

Bewijs. Kies willekeurig $s \in S_{\alpha,\pi}(n, m, q)$. We moeten bewijzen dat $-s \in S_{\alpha,\pi}(n, m, q)$. Als $s \in S^0(n, m, q)$ geldt duidelijk ook $-s \in S^0(n, m, q)$. Als $s \in S_{\alpha,\pi}^1(n, m, q)$, stel dan $s = (0, y, \alpha^i)$. Omdat α een primitief element is (en q oneven), is $\alpha^{\frac{q-1}{2}} = -1$ en bijgevolg $-s = (0, -y, -\alpha^i) = (0, y, \alpha^{i+\frac{q-1}{2}})$. Bovendien is $i + \frac{q-1}{2} \equiv i \equiv \pi(y) \pmod{2^m - 1}$ wegens het gegeven, zodat $-s \in S_{\alpha,\pi}^1(n, m, q)$. \square

Definitie 4.9

Zij $n, m \in \mathbb{N}$ en q een priemmacht waarvoor $q \equiv 1 \pmod{2^{m+1} - 2}$. Zij α een primitief element van \mathbb{F}_q en $\pi : ((\mathbb{Z}/2)^m)^* \rightarrow \mathbb{Z}/(2^m - 1)$ een bijctie. In dat geval definiëren we

$$\Gamma_{\alpha,\pi}(n, m, q) := \text{Cay}(G(n, m, q), S_{\alpha,\pi}(n, m, q)).$$

In de volgende twee lemma's veronderstellen we impliciet dat de parameters aan de voorwaarden uit de vorige definitie voldoen.

Lemma 4.10

$\Gamma_{\alpha,\pi}(n, m, q)$ is k -regulier, waarbij $k = 2^m n + q - 2$.

Bewijs. We passen lemma 4.2 toe. De grootte van $S_{\alpha,\pi}(n, m, q)$ is gelijk aan $(2^m n - 1) + (q - 1)$. Merk op dat $S_{\alpha,\pi}^1(n, m, q)$ volledig bepaald wordt door de derde component uit $(\mathbb{F}_q)^*$. \square

Lemma 4.11

$\Gamma_{\alpha,\pi}(n, m, q)$ heeft een reguliere spread van 1-reguliere klikken met grootte $n \cdot 2^m$.

Bewijs. Definieer $C_z := \mathbb{Z}/n \times (\mathbb{Z}/2)^m \times \{z\}$ voor alle $z \in \mathbb{F}_q$ en stel $P := \{C_z \mid z \in \mathbb{F}_q\}$. We bewijzen dat P een reguliere spread is. Elke verzameling in P is een klik omdat het verschil van twee verschillende elementen in zo'n C_z bevat is in $S^0(n, m, q)$. Bovendien vormen zij een partitie van $G(n, m, q)$. Kies nu een willekeurige klik C_z en een element (x_0, y_0, z_0) buiten die klik. Dan is dat element adjacent met precies één element (x, y, z) van C_z . Inderdaad, als het verschil $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ bevat is in $S_{\alpha,\pi}(n, m, q)$ kan dat alleen als $x = x_0$ en $y = y_0 + \pi^{-1}(i)$ met i de unieke macht van α waarvoor $\alpha^i = z - z_0 \neq 0$. Omdat C_z willekeurig was, besluiten we dat elke klik in P regulier is met nexus 1 en grootte $n \cdot 2^m$. \square

Met behulp van cyclotomische getallen kunnen we parameterwaarden vinden waarvoor $\Gamma_{\alpha,\pi}(n, m, q)$ boogregulier is, en dus een Neumaiergraaf is wegens stelling 4.11. Onder bepaalde voorwaarden zijn het zelfs strikte Neumaiergrafen. We behandelen twee gevallen: $m = 2$ en $m = 3$. Eerst nog een lemma.

Lemma 4.12

Het aantal gemeenschappelijke burenen van twee toppen in $\Gamma_{\alpha,\pi}(n, m, q)$ is ofwel gelijk aan $2^m n - 2$, ofwel aan

$$\sum_{y' \neq y} c_{\alpha}^r (\pi(y - y') - \pi(y'), \pi(y) - \pi(y'))$$

voor een zekere $y \in (\mathbb{Z}_2^m)^*$, waarbij y' alle waarden in $(\mathbb{Z}_2^m)^* \setminus \{y\}$ aanneemt en $r := 2^m - 1$.

Bewijs. Kies willekeurig twee toppen $u \sim v$ in $\Gamma_{\alpha,\pi}(n, m, q)$. Omdat een Cayleygraaf top-transitief is (lemma 4.3) mogen we aannemen dat $u = (0, 0, 0)$. Als $v \in S^0(n, m, q)$ zijn de gemeenschappelijke burenen van u en v juist elementen in $S^0(n, m, q) \setminus \{v\}$, wat gelijk is aan $2^m n - 2$. Stel dat $v \in S_{\alpha,\pi}^1(n, m, q)$. Dan is v van de vorm $(0, y, \alpha^i)$ met $i \equiv \pi(y) \pmod{r}$. In $S^0(n, m, q)$ heeft v geen burenen. De enige gemeenschappelijke burenen van u en v zijn dus van de vorm $(0, y', \alpha^{i'})$ met $i' \equiv \pi(y') \pmod{r}$ waarvoor $(0, y - y', \alpha^i - \alpha^{i'}) \in S_{\alpha,\pi}^1(n, m, q)$. Dan is het aantal gemeenschappelijke burenen van u en v gelijk aan

$$\sum_{y' \neq y} \left| \left\{ (i', j) \in (\mathbb{Z}/rs)^2 \mid i' \equiv \pi(y'), j \equiv \pi(y - y') \text{ en } \alpha^j = \alpha^i - \alpha^{i'} \right\} \right|$$

waarbij de congruenties modulo r gebeuren en $q = rs + 1$. Merk op dat y en i vast gekozen zijn. We proberen dat nu te herschrijven in termen van cyclotomische getallen. Stellen we $i = \pi(y) + rk$ (k is dus opnieuw vast), $i' = \pi(y') + rl$ en $j = \pi(y - y') + rt$, dan kunnen we die uitdrukking omvormen tot

$$\sum_{y' \neq y} \left| \left\{ (l, t) \in (\mathbb{Z}/s)^2 \mid \alpha^{\pi(y-y')+rt} = \alpha^{\pi(y)+rk} - \alpha^{\pi(y')+rl} \right\} \right|$$

of, via de substituties $a = t - l$ en $b = k - l$, naar

$$\begin{aligned} & \sum_{y' \neq y} \left| \left\{ (a, b) \in (\mathbb{Z}/s)^2 \mid 1 + \alpha^{\pi(y-y')-\pi(y')+ra} = \alpha^{\pi(y)-\pi(y')+rb} \right\} \right| \\ &= \sum_{y' \neq y} c_{\alpha}^r (\pi(y - y') - \pi(y'), \pi(y) - \pi(y')). \end{aligned}$$

\square

4.3.1 Het geval $m = 2$

De keuze van π is irrelevant voor de geldigheid van het volgende lemma.

Lemma 4.13

Zij q een priemmacht waarvoor $q \equiv 1 \pmod{6}$ en α een primitief element van \mathbb{F}_q . Zij $\pi : ((\mathbb{Z}/2)^2)^* \rightarrow \mathbb{Z}/3$ een bijectie en kies $y \neq y' \in ((\mathbb{Z}/2)^2)^*$. Dan geldt:

$$c_\alpha^3(\pi(y - y') - \pi(y'), \pi(y) - \pi(y')) = c_\alpha^3(1, 2).$$

Bewijs. Stel $a := \pi(y - y') - \pi(y')$ en $b := \pi(y) - \pi(y')$. Omdat $y - y' \neq y'$ (anders zou $y = 0$) is $a \neq 0$ en omdat $y \neq y'$ is $b \neq 0$. We hebben dus al gevonden dat $a, b \in \{1, 2\}$. Maar a en b zijn ook verschillend, want uit $y' \neq 0$ volgt dat $\pi(y - y') \neq \pi(y)$ en dus ook $a \neq b$. Samen met lemma 4.6 besluiten we dat $c_\alpha^3(a, b) = c_\alpha^3(1, 2)$. \square

Stelling 4.14

Zij q een priemmacht waarvoor $q \equiv 1 \pmod{6}$, α een primitief element van \mathbb{F}_q en $\pi : ((\mathbb{Z}/2)^2)^* \rightarrow \mathbb{Z}/3$ een bijectie. Stel dat $c := c_\alpha^3(1, 2) \equiv 1 \pmod{2}$ en definieer $n := \frac{c+1}{2}$. Dan is $\Gamma_{\alpha, \pi}(n, 2, q)$ een strikte Neumaiergraaf met parameters $(4nq, 4n + q - 2, 4n - 2; 1, 4n)$.

Bewijs. Stel $\Gamma := \Gamma_{\alpha, \pi}(n, 2, q)$. Die graaf heeft $n \cdot 2^2 \cdot q$ toppen en is $(4n + q - 2)$ -regulier wegens lemma 4.10. We weten ook al dat Γ een 1-reguliere klik heeft van grootte $4n$ dankzij lemma 4.11. Uit lemma's 4.12 en 4.13 volgt de boogregulariteit (want $2c = 4n - 2$). Voor het bewijs dat Γ niet sterk regulier is verwijzen we naar [9]. \square

In [9] wordt er bewezen dat er oneindig veel mogelijke priem machten zijn voor de constructie met $m = 2$ (stelling 4.14): men kan aantonen dat er oneindig veel priemgetallen p zijn die voldoen aan $2^{\frac{p-1}{3}} \not\equiv 1 \pmod{p}$. Dan is elke macht q van p waarvoor $q \equiv 1 \pmod{6}$ (en zo zijn er ook oneindig veel) geschikt, in de zin dat $c_\alpha^3(1, 2)$ oneven is.

4.3.2 Het geval $m = 3$

We definiëren eerst twee concrete bijecties $\pi : ((\mathbb{Z}/2)^3)^* \rightarrow \mathbb{Z}/7$.

Definitie 4.15

Definieer $\pi_1, \pi_2 : ((\mathbb{Z}/2)^3)^* \rightarrow \mathbb{Z}/7$ aan de hand van de volgende tabel.

y	(0, 0, 1)	(0, 1, 0)	(0, 1, 1)	(1, 0, 0)	(1, 0, 1)	(1, 1, 0)	(1, 1, 1)
$\pi_1(y)$	2	4	5	1	6	3	0
$\pi_2(y)$	3	6	4	5	2	1	0

De bijecties π_1 en π_2 zijn zodanig gekozen dat ze de volgende eigenschappen bezitten.

Lemma 4.16

Zij q een priemmacht waarvoor $q \equiv 1 \pmod{14}$, α een primitief element van \mathbb{F}_q en kies $y \neq y' \in ((\mathbb{Z}/2)^3)^*$. Dan geldt:

$$(i) \quad c_\alpha^7(\pi_1(y - y') - \pi_1(y'), \pi_1(y) - \pi_1(y')) = c_\alpha^7(1, 5)$$

$$(ii) \quad c_\alpha^7(\pi_2(y - y') - \pi_2(y'), \pi_2(y) - \pi_2(y')) = c_\alpha^7(1, 3)$$

Bewijs. Dat kan men narekenen met behulp van lemma 4.6. We werken een voorbeeld uit voor het eerste puntje. Als $y = (0, 0, 1)$ en $y' = (1, 0, 1)$ is $c_\alpha^7(\pi_1(y - y') - \pi_1(y'), \pi_1(y) - \pi_1(y'))$ gelijk aan $c_\alpha^7(1 - 6, 2 - 6)$. We werken modulo 7, dus dat is equivalent met $c_\alpha^7(2, 3)$. Lemma 4.6(ii) toepassen geeft vervolgens $c_\alpha^7(5, 1)$. Wegens het eerste puntje uit dat lemma vinden we uiteindelijk $c_\alpha^7(1, 5)$. \square

Stelling 4.17

Zij q een priemmacht waarvoor $q \equiv 1 \pmod{14}$ en α een primitief element van \mathbb{F}_q . Stel dat $c := c_\alpha^7(1, 5) \equiv 1 \pmod{4}$ en definieer $n := \frac{3c+1}{4}$. Dan is $\Gamma_{\alpha, \pi_1}(n, 3, q)$ een strikte Neumaiergraaf met parameters $(8nq, 8n + q - 2, 8n - 2; 1, 8n)$.

Bewijs. Stel $\Gamma := \Gamma_{\alpha, \pi_1}(n, 3, q)$. Die graaf heeft $n \cdot 2^3 \cdot q$ toppen en is $(8n + q - 2)$ -regulier wegens lemma 4.10. We weten ook al dat Γ een 1-reguliere klik heeft van grootte $8n$ dankzij lemma 4.11. Uit lemma's 4.12 en 4.16(i) volgt de boogregulariteit (want $6c = 8n - 2$). Voor het bewijs dat Γ niet sterk regulier is verwijzen we naar [9]. \square

Stelling 4.18

Zij q een priemmacht waarvoor $q \equiv 1 \pmod{14}$ en α een primitief element van \mathbb{F}_q . Stel dat $c := c_\alpha^7(1, 3) \equiv 1 \pmod{4}$ en definieer $n := \frac{3c+1}{4}$. Dan is $\Gamma_{\alpha, \pi_2}(n, 3, q)$ een strikte Neumaiergraaf met parameters $(8nq, 8n + q - 2, 8n - 2; 1, 8n)$.

Bewijs. Volledig analoog aan het bewijs van de vorige stelling. \square

Om priemmachtsen q en primitieve elementen α te vinden die voldoen aan de voorwaarden van stellingen 4.14, 4.17 of 4.18, kunnen we bijvoorbeeld een stukje code schrijven die geschikte waarden van n , m , q en α genereert. Die code staat in paragraaf 7.2.2. Het kleinste voorbeeld met $m = 2$ heeft parameters $(28, 9, 2; 1, 4)$ en het kleinste voorbeeld met $m = 3$ en $\pi \in \{\pi_1, \pi_2\}$ heeft parameters $(232, 35, 6; 1, 8)$. We merken op dat de keuze van α in de kleinste gevallen geen invloed heeft op de bekomen graaf.

Vraag 4.19. Is de graaf $\Gamma_{\alpha, \pi}(n, m, q)$ onafhankelijk van de keuze van α onder de voorwaarden van stelling 4.14 (respectievelijk 4.17 en 4.18)?

In het algemeen zijn de grafen *wel* afhankelijk van α en π . Zo is $\Gamma_{3, \pi_1}(1, 3, 7)$ verschillend van zowel $\Gamma_{5, \pi_1}(1, 3, 7)$ als $\Gamma_{3, \pi_2}(1, 3, 7)$.

Hoofdstuk 5

Constructies via afstandsreguliere antipodale grafen

Dit hoofdstuk is opnieuw wat luchtiger dan het vorige, in de zin dat er meer meetkundige redeneringen gebruikt worden. We bespreken de tweede constructie door Greaves en Koolen zoals die min of meer beschreven staat in [10]. Het is opnieuw een oneindige familie van strikte Neumaiergrafen. Zoals de titel al suggereert vertrekt de constructie vanuit een afstandsreguliere antipodale graaf. We gaan van start met twee korte introducties over beide begrippen.

5.1 Afstandsreguliere grafen

Definitie 5.1

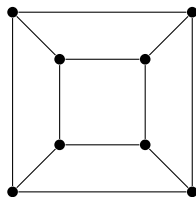
Een samenhangende graaf met diameter d is **afstandsregulier** als en slechts als er voor alle $i \in \{0, \dots, d\}$ constanten a_i , b_i en c_i bestaan zodat voor elk paar toppen u, v op afstand i geldt:

- a_i is gelijk aan het aantal toppen adjacent met u en op afstand i van v
- b_i is gelijk aan het aantal toppen adjacent met u en op afstand $i + 1$ van v
- c_i is gelijk aan het aantal toppen adjacent met u en op afstand $i - 1$ van v

De rij $(b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d)$ heet de **intersectierij** van de afstandsreguliere graaf.

Een afstandsreguliere graaf is steeds regulier: elke top heeft b_0 burens. Meer zelfs: elke afstandsreguliere graaf is a_1 -boogregulier. Coboogregulariteit is echter niet altijd gegarandeerd.

Voorbeeld 5.2. De kubusgraaf is afstandsregulier, maar niet coboogregulier.



Figuur 5.1: De kubusgraaf

De intersectierij van de kubusgraaf wordt gegeven door $(3, 2, 1; 1, 2, 3)$.

Uit stelling 5.6 zal volgen dat een tegenvoorbeeld voor de coboogregulariteit niet toevallig een diameter strikt groter dan 2 heeft.

De constanten b_d en c_0 zijn niet bevat in de intersectierij. De reden daarvoor is dat ze steeds nul zijn. Ook alle a_i 's worden weggelaten: uit de b_0 -regulariteit volgt dat $b_0 = a_i + b_i + c_i$ voor alle $i \in \{0, \dots, d\}$, zodat we de a_i 's in functie van de b_i 's en c_i 's kunnen schrijven. De constante c_1 is wel bevat in de intersectierij, maar is altijd gelijk aan 1. Merk op dat $b_i \neq 0$ als $i < d$ omdat we op een pad van lengte i altijd een top "verder" kunnen gaan. Analoog is $c_i \neq 0$ als $i > 0$ door een top "dichter" te kiezen.

Voorbeeld 5.3. De cykelgraaf C_n is afstandsregulier met intersectierij $(2, 1, \dots, 1; 1, \dots, 1, c_d)$ waarbij $c_d = 1$ als n oneven is en $c_d = 2$ als n even is.

Voorbeeld 5.4. De Petersengraaf (voorbeeld 1.11) is afstandsregulier met intersectierij $(3, 2; 1, 1)$.

Beide voorbeelden zijn *afstandstransitief*. Analoog aan lemma 1.6 kan men bewijzen dat afstands-transitieve grafen afstandsregulier zijn. Voorbeelden van afstandsreguliere grafen die *niet* afstandstransitief zijn, zijn exotischer. Het kleinste voorbeeld zijn we al tegengekomen in hoofdstuk 3. Merk op hoe die graaf toen ook in verband stond met de kleinste strikte Neumaiergraaf.

Voorbeeld 5.5. De Shrikhandegraaf (figuur 3.2) is afstandsregulier, maar niet afstandstransitief. De intersectierij is $(6, 3; 1, 2)$.

Stelling 5.6

Afstandsreguliere grafen met diameter 2 zijn precies de samenhangende sterk reguliere grafen.

Bewijs. Zij Γ een afstandsreguliere graaf met diameter 2. We merkten al op dat een afstandsreguliere graaf boogregulier is. Omdat niet-adjacente toppen op afstand 2 liggen is Γ bovendien c_2 -coboogregulier.

Zij Γ sterk regulier met parameters (n, k, λ, μ) . Uit lemma 2.8 volgt dat $\mu \neq 0$ zodat $\text{diam}(\Gamma) = 2$. We stellen vrij snel vast dat $a_0 = c_0 = 0$, $b_0 = k$, $a_1 = \lambda$, $c_1 = 1$, $b_2 = 0$ en $c_2 = \mu$. Omdat $k = a_i + b_i + c_i$ voor alle $i \in \{0, 1, 2\}$ geldt bovendien $b_1 = k - \lambda - 1$ en $a_2 = k - \mu$. \square

Uit het bewijs volgt bovendien dat de intersectierij van een samenhangende sterk reguliere graaf met parameters (n, k, λ, μ) gelijk is aan $(k, k - \lambda - 1; 1, \mu)$.

5.2 Antipodale grafen

Definitie 5.7

Een samenhangende graaf met diameter d is (*a*-)antipodaal als de relatie

$$“ u = v \quad \text{of} \quad d(u, v) = d ”$$

een equivalentierelatie is tussen de toppen, met equivalentieklassen van dezelfde grootte a . Zo'n equivalentieklasse noemen we een **vezel**.

Als Γ antipodaal is geldt in het bijzonder

$$d(u, v) = d(v, w) = \text{diam}(\Gamma) \Rightarrow (u = w \vee d(u, w) = d)$$

wegens de transitiviteit van de equivalentierelatie. Merk ook op dat het bestaan van twee toppen op afstand d impliceert dat $a \geq 2$.

Voor een top v noteren we $[v]$ voor de unieke vezel die v bevat.

5.3 De operatie $F_t(\Gamma)$

We beschouwen nu een specifieke bewerking op samenhangende grafen, die we noteren met $F_t(\Gamma)$. Voor de vlotheid van de volgende beschrijving noemen we die operatie ook wel het “ t -kransje”.

Definitie 5.8

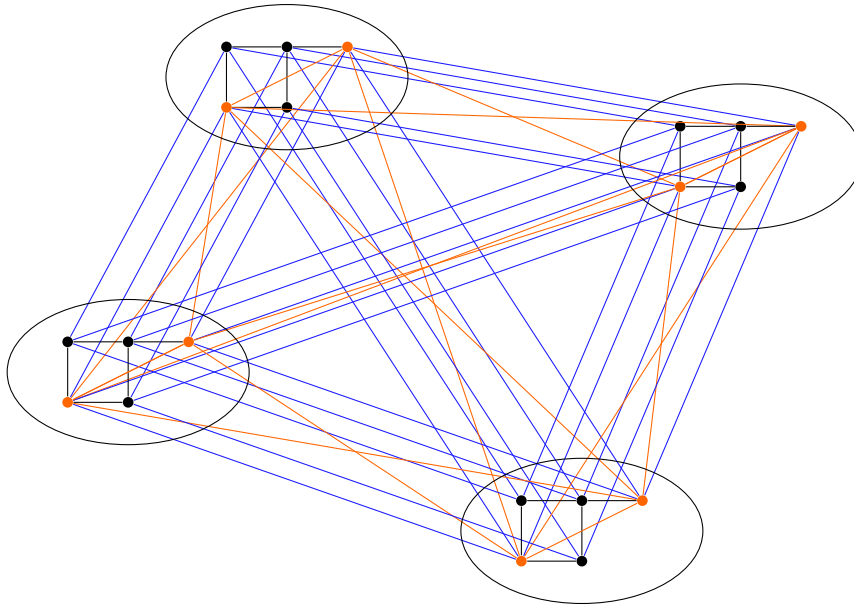
Zij Γ een samenhangende graaf met diameter d en $t \in \mathbb{N}$. We definiëren het t -kransje $F_t(\Gamma)$ als volgt. Maak eerst t (disjuncte) kopieën $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_t$ van Γ . Voor elke top v van Γ noteren we v_i voor de corresponderende top in Γ_i . Definieer dan $F_t(\Gamma)$ als de graaf (V, E) met

$$V := \{v_i\}$$

$$E := \{\{u_i, v_i\} \mid u \sim v\} \cup \{\{v_i, v_j\} \mid i \neq j\} \cup \{\{u_i, v_j\} \mid d(u, v) = d\}$$

waarbij verondersteld wordt dat u en v over $V(\Gamma)$ en i en j over $\{1, \dots, t\}$ lopen.

Een 4-kransje ziet er bijvoorbeeld als volgt uit.



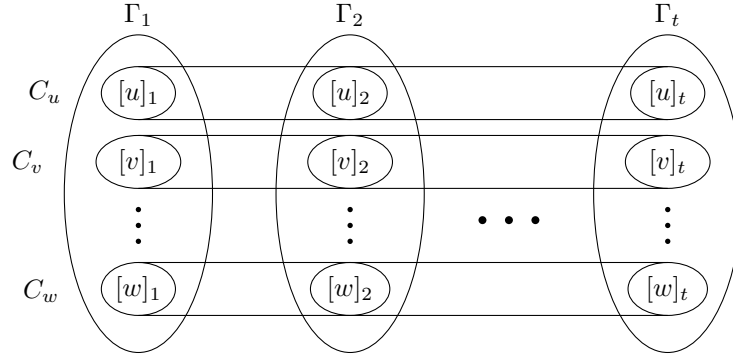
De zwarte bogen komen overeen met de adjacentie in Γ , de blauwe bogen verbinden kopieën van dezelfde top en de oranje bogen verbinden alle toppen die in de oorspronkelijke graaf op afstand $\text{diam}(\Gamma)$ liggen.

In het speciale geval dat Γ antipodaal is worden alle toppen afkomstig uit eenzelfde vezel met elkaar verbonden en bekomen we een klik met grootte $a \cdot t$. Straffer nog: we hebben te maken met een *spread* van kliken.

Lemma 5.9

Het t -kransje van een antipodale graaf heeft een *spread*, bestaande uit vezels en hun kopieën.

Bewijs. Stel voor elke $i \in \{1, \dots, t\}$ en elke top v in Γ , $[v]_i := \{u_i \mid u \in [v]\}$ en stel $C_v := \bigcup_{i=1}^t [v]_i$. We moeten bewijzen dat $P := \{C_v \mid v \in F_t(\Gamma)\}$ een *spread* is. Elk paar toppen $u_i, w_j \in C_v$ is adjacent omdat $d(u, v) = d$ in Γ . De verzamelingen C_v zijn dus kliken. Omdat $\{[v] \mid v \in \Gamma\}$ per definitie een partitie is van $V(\Gamma)$, is P een partitie van $V(F_t(\Gamma))$. \square



Figuur 5.2: Vezels en hun kopieën vormen een spread.

Lemma 5.10

In een afstandsreguliere antipodale graaf met diameter 3 geldt $b_2 = 1$.

Bewijs. We splitsen de gelijkheid op in twee ongelijkheden.

“ \leq ” Kies twee toppen u en v op afstand 2. Uit het ongerijmde, stel dat er twee toppen bestaan op afstand 3 van u en adjacent met v . Uit de antipodaliteit zou volgen dat de afstand tussen die twee toppen ook 3 bedraagt, maar via v bestaat er een wandeling van lengte 2, strijdig.

“ \geq ” Kies twee toppen u en v op afstand 3 en zij w de tweede top op zo'n wandeling van u naar v . Dan is er minstens één top adjacent met w op afstand 3 van v , namelijk u . □

Stelling 5.11 (Greaves en Koolen)

Zij Γ een afstandsreguliere a -antipodale graaf met diameter 3 en parameters (n, k, λ) waarvoor a een strikte deler is van $\lambda + 2$ en stel $t := \frac{\lambda+2}{a}$. Dan is $F_t(\Gamma)$ een strikte Neumaiergraaf met parameters $(nt, k + \lambda + 1, \lambda; 1, \lambda + 2)$. Bovendien heeft $F_t(\Gamma)$ een reguliere spread.

Bewijs. Merk op dat Γ wel degelijk boogregulier is omdat Γ afstandsregulier is.

We bewijzen eerst dat de spread P uit lemma 5.9 regulier is. Elke klik in P heeft grootte $a \cdot t = \lambda + 2$. Kies willekeurig $C_v \in P$ en zij $u_i \in \Gamma_i$ een willekeurige top daarbuiten. De enige burens van u_i in C_v zijn bevat in $[v]_i$. Omdat u_i niet adjacent is met alle toppen van $[v]_i$ is er een top $w_i \in [v]_i$ op afstand 2 van u_i . Keren we terug naar Γ , dan wil dat zeggen dat u en w op afstand 2 liggen. Uit lemma 5.10 volgt dan dat u adjacent is met precies één top op afstand 3 van w . Met andere woorden, u is adjacent met exact één top in $[v]_i$ en dus ook met juist één top in C_v . Omdat C_v willekeurig was besluiten we dat de nexus van elke klik 1 is.

Het aantal toppen van $F_t(\Gamma)$ is duidelijk nt . Bovendien volgt uit de definitie van $E(F_t(\Gamma))$ dat de graad van elke top gelijk is aan $k + (t - 1) + t(a - 1) = k + at - 1 = k + \lambda + 1$. Voor de boogregulariteit beschouwen we twee willekeurige toppen u en v en onderscheiden twee gevallen. Als $u \in C_v$ zijn de enige toppen adjacent met zowel u als v , de andere toppen in C_v , want de nexus is 1. Omdat $|C_v| = \lambda + 2$ zijn dit er λ . In het andere geval moeten u en v tot dezelfde kopie Γ_i behoren en is het aantal gemeenschappelijke burens λ , want de enige gemeenschappelijke burens zijn de λ oorspronkelijke gemeenschappelijke burens en de toppen die op afstand 3 liggen van zowel u als v . Dat laatste geval kan zich echter nooit voordoen omdat Γ antipodaal is.

Tot slot bewijzen we dat $F_t(\Gamma)$ niet sterk regulier is. Kies willekeurig twee toppen u en v in Γ op afstand twee van elkaar. Dan is $u_1 \not\sim v_1$ en hebben u_1 en v_1 minstens 3 gemeenschappelijke

buren: minstens één buur op het pad tussen u en v , (exact) één buur w_i waarvoor $u \sim w$ en v en w op afstand drie liggen wegens lemma 5.10 en analoog één buur van v op afstand 3 van u . Anderzijds is $u_1 \not\sim v_2$ en hebben u_1 en v_2 hoogstens 2 gemeenschappelijke buren (de buren zijn sowieso in C_u of C_v bevat, maar van die klieken is de nexus één). \square

Merk op dat Γ zelf ook niet sterk regulier is omdat de diameter 3 is: toppen op afstand 3 hebben geen gemeenschappelijke buren terwijl toppen op afstand 2 minstens één buur gemeen hebben. De diameter van $F_t(\Gamma)$ is 2, want de graaf heeft een reguliere spread (zie stelling 6.10).

Let goed op dat a een strikte deler moet zijn van $\lambda+2$. Als $a = \lambda+2$ geldt de laatste paragraaf in het bewijs niet meer. Omdat het t -kranse in dat geval nog steeds afstandsregulier is volgt bovendien uit stelling 5.6 dat de graaf nooit een strikte Neumaiergraaf kan zijn. We mogen wel nog steeds besluiten dat $F_t(\Gamma)$ een “gewone” Neumaiergraaf is met parameters $(nt, k + \lambda + 1, \lambda; 1, \lambda + 2)$ die over een reguliere spread beschikt.

Voorbeeld 5.12. De cykelgraaf C_6 is afstandsregulier en 2-antipodaal met diameter 3. De boogreguliere parameters zijn $(6, 2, 0)$ en 2 is een deler, maar geen echte deler, van $0 + 2$. We besluiten dat $F_1(C_6)$ een Neumaiergraaf is met parameters $(6, 3, 0; 1, 2)$.

Voorbeeld 5.13. De kubusgraaf is afstandsregulier en 2-antipodaal met diameter 3. De boogreguliere parameters zijn $(8, 2, 0)$ en 2 is opnieuw geen echte deler, van $0 + 2$. Het 1-kranse (dat we bekomen door de overstaande hoekpunten van de kubus te verbinden) is een Neumaiergraaf met parameters $(8, 4, 0; 1, 2)$.

5.4 Geschikte kandidaten

Om de constructie te vervolledigen hebben we natuurlijk geschikte grafen nodig die voldoen aan de voorwaarden van stelling 5.11. We geven in deze paragraaf twee families van zo'n grafen. De eerste soort werd geconstrueerd door Thas in [14] en later uitgebreid door Somma in [13]. Onderstaande stelling is gebaseerd op een beschrijving van de constructie door Godsil en Hensel in [7].

Stelling 5.14 (Thas-Somma)

Zij q een priemmacht en $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zij V een $2n$ -dimensionale vectorruimte over \mathbb{F}_q . Zij $B : V \times V \rightarrow \mathbb{F}_q$ een niet-ontaarde symplectische vorm. Definieer de graaf $\Gamma := (V, E)$ met

$$V := \mathbb{F}_q \times V$$

$$E := \{(\alpha, u), (\beta, v) \mid B(u, v) = \alpha - \beta \text{ en } u \neq v\}.$$

Dan is Γ afstandsregulier, q -antipodaal, heeft Γ diameter 3 en boogreguliere parameters $(q^{2n+1}, q^{2n} - 1, q^{2n-1} - 2)$.

Bewijs. Zonder bewijs (zie [13]). \square

Gevolg 5.15

Zij q een priemmacht en $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Stel $\Gamma(n, q)$ gelijk aan de graaf uit stelling 5.14. Dan is $F_{q^{2n-2}}(\Gamma(n, q))$ een strikte Neumaiergraaf met parameters

$$(q^{4n-1}, q^{2n-1}(q+1) - 2, q^{2n-1} - 2; 1, q^{2n-1}).$$

Bewijs. Dit is een rechtstreeks gevolg van stellingen 5.11 en 5.14. \square

Voor elke priemmacht q hebben we dus een (oneindige) rij van strikte Neumaiergrafen gevonden. We kunnen opnieuw veronderstellen dat $V = \mathbb{F}_q^{2n}$ en er voor zorgen dat B gelijk is aan de *standaardvorm*

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{F}_q : (v, w) \mapsto v_1w_2 - v_2w_1 + \cdots + v_{2n-1}w_{2n} + v_{2n}w_{2n-1}$$

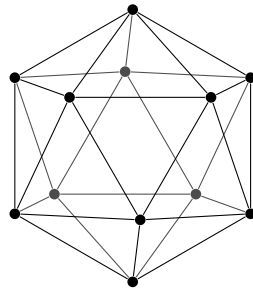
via een goed gekozen basisovergang.

Andere voorbeelden van geschikte grafen zijn de zogenaamde Taylorgrafen.

Definitie 5.16

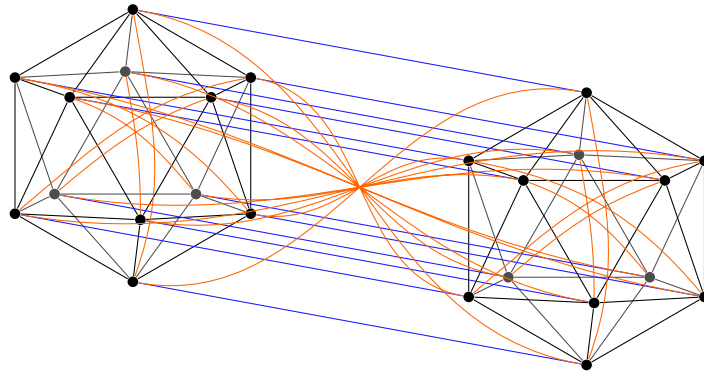
Een **Taylorgraaf** is een afstandsreguliere graaf met diameter 3 waarvoor de intersectierij symmetrisch is, met andere woorden, waarvoor $b_0 = c_3$, $b_1 = c_2$ en $b_2 = c_1 (= 1)$.

De 6-cykel en de kubusgraaf zijn Taylorgrafen, maar zoals we al gezien hebben zijn die niet geschikt. Een Taylorgraaf die wel voldoet is de *icosaëdergraaf* met boogreguliere parameters $(12, 5, 2)$ en intersectierij $(5, 2, 1; 1, 2, 5)$. De icosaëdergraaf is 2-antipodaal.



Figuur 5.3: De icosaëdergraaf

Het 2-kransje van deze graaf is een strikte Neumaiergraaf met parameters $(24, 8, 2; 1, 4)$. De blauwe bogen verbinden kopieën van dezelfde top en de oranje bogen verbinden alle toppen die in de oorspronkelijke graaf op afstand 3 liggen.



Figuur 5.4: Het 2-kransje van de icosaëdergraaf.

We merken op dat de bekomen strikte Neumaiergraaf gelijk is aan één van de grafen die Goryainov en Shalaginov ontdekt hebben (zie de inleiding van hoofdstuk 3).

Andere geschikte Taylorgrafen zijn de Johnsongraaf $J(6, 3)$, de lokale Payleygrafen P_{13} en P_{17} , de lokale Knesergraaf $K(6, 2)$ (gelijk aan de graaf $\Gamma(2, 2)$ uit gevolg 5.15), de halve 6-kubusgraaf, de Gossetgraaf en de afstand-2-graaf van de Gossetgraaf (zie [15] voor een beschrijving van die grafen). Voor de parameters en eigenwaarden van hun t -kransjes verwijzen we naar de tabel op het einde van hoofdstuk 7.

Deel III

Aanvullingen

Hoofdstuk 6

Eigen observaties

In dit laatste “echte” hoofdstuk bespreken we enkele observaties over de tot nu toe ontdekte (strikte) Neumaiergrafen. Eerst zullen we eens kijken naar het spectrum van die grafen. Eigenwaarden kunnen soms nuttige informatie verschaffen. Daarna graven we wat dieper, op zoek naar algemene eigenschappen van (strikte) Neumaiergrafen waarvan nog niet zeker is of alle (strikte) Neumaiergrafen eraan voldoen. Tot slot zeggen we nog iets over mogelijke nieuwe constructies en doen we enkele pogingen om nieuwe strikte Neumaiergrafen te ontdekken.

6.1 Het spectrum van Neumaiergrafen

Het is vaak interessant om te kijken naar het spectrum van een graaf. “De” adjacentiematrix van een graaf is eigenlijk niet uniek bepaald omdat we de volgorde van de toppen kunnen omwisselen. Het spectrum daarentegen zal wel hetzelfde blijven.

Definitie 6.1

Zij Γ een graaf met toppenverzameling $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. De **adjacentiematrix** van Γ is de matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ met

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{als } v_i \not\sim v_j \\ 1 & \text{als } v_i \sim v_j \end{cases}.$$

Het **spectrum** van Γ is de verzameling van alle eigenwaarden van A .

Omdat de adjacentiematrix reëel en symmetrisch is, zijn de algebraïsche en meetkundige multipliciteit van elke eigenwaarde gelijk, zodat we kortweg spreken van *de multipliciteit*.

Stelling 6.2

Een k -reguliere graaf heeft k als eigenwaarde met multipliciteit 1.

Bewijs. k is een duidelijk een eigenwaarde bij de eigenvector $(1, 1, \dots, 1)$. Stel dat er nog een andere eigenvector bij k hoort en noem die $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Zij $i \in \{1, \dots, n\}$ waarvoor $x_j \leq x_i$ voor alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Door de i -de component van $Ax = kx$ te bekijken vinden we

$$kx_i = \sum_{v_i \sim v_j} x_i \leq kx_j$$

waaruit we besluiten dat $x_i = x_j$ voor alle $j \in \{1, \dots, n\}$. De eigenruimte bij k wordt dus voortgebracht door $(1, 1, \dots, 1)$ en de multipliciteit van k is 1. \square

We willen graag weten of er nog andere speciale eigenwaarden zijn die altijd voorkomen bij (strikte) Neumaiergrafen. Om een beter inzicht te krijgen lijsten we de eigenwaarden van enkele strikte Neumaiergrafen op. Voor de resultaten verwijzen we naar de tabel in paragraaf 7.5.

Hier en daar duiken regelmatigheden op. Er is alvast één geval dat we in een stelling kunnen gieten.

Stelling 6.3

Een reguliere graaf die een e -reguliere c -kliek bevat heeft $c - e - 1$ als eigenwaarde.

Bewijs. Zij Γ een graaf die een e -reguliere c -kliek C bevat en $V(\Gamma) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Beschouw de vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ met

$$x_i = \begin{cases} k - c + 1 & \text{als } v_i \in C \\ -e & \text{anders} \end{cases}.$$

Dan is x een eigenvector van de adjacentiematrix van Γ . Inderdaad, de i -de component van Ax is gelijk aan

$$\begin{aligned} (Ax)_i &= \begin{cases} (c-1)(k-c+1) + (k-c+1)(-e) & \text{als } v_i \in C \\ e(k-c+1) + (k-e)(-e) & \text{anders} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (c-e-1)(k-c+1) & \text{als } v_i \in C \\ (c-e-1)(-e) & \text{anders} \end{cases} \\ &= (c-e-1)x_i. \end{aligned}$$

□

Voor grafen met meerdere disjuncte e -reguliere c -klieken vinden we een ondergrens voor de multiplicititeit van $c - e - 1$.

Stelling 6.4

Een graaf die $t \geq 2$ disjuncte e -reguliere c -klieken bevat, heeft $c - e - 1$ als eigenwaarde met multiplicititeit minstens $t - 1$.

Bewijs. Zij Γ een graaf die over t disjuncte e -reguliere c -klieken C_1, C_2, \dots, C_t beschikt en $V(\Gamma) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Kies willekeurig $s \in \{2, \dots, t\}$ en beschouw de vector $x^{(s)} = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_n^{(s)})$ met

$$x_i^{(s)} := \begin{cases} 1 & \text{als } v_i \in C_1 \\ -1 & \text{als } v_i \in C_s \\ 0 & \text{anders} \end{cases}.$$

Dan is $x^{(s)}$ een eigenvector van de adjacentiematrix van Γ . Inderdaad, de i -de component van $Ax^{(s)}$ is gelijk aan

$$\begin{aligned} (Ax^{(s)})_i &= \begin{cases} (c-1) \cdot 1 + e(-1) & \text{als } v_i \in C_1 \\ e \cdot 1 + (c-1)(-1) & \text{als } v_i \in C_s \\ e \cdot 1 + e(-1) & \text{anders} \end{cases} \\ &= \begin{cases} c-e-1 & \text{als } v_i \in C_1 \\ -(c-e-1) & \text{als } v_i \in C_s \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \\ &= (c-e-1)x_i^{(s)}. \end{aligned}$$

Omdat alle vectoren $x^{(s)}$, met $s \in \{2, \dots, t\}$, onafhankelijk zijn van elkaar, is de multiplicititeit van $c - e - 1$ minstens $t - 1$. □

Gevolg 6.5

Een (noodzakelijk reguliere) graaf met een spread van e -reguliere c -klieken heeft $c - e - 1$ als eigenwaarde met multipliciteit minstens $\frac{n}{c} - 1$.

Bewijs. Pas de vorige stelling toe met $t = \frac{n}{c}$. Merk op dat de graaf $e(t - 1)$ -regulier is. \square

6.2 Terugkerende patronen

Er zijn enkele eigenschappen die we tot nu toe al in elke constructie van strikte Neumaiergraaf zijn tegengekomen. We vragen ons af of het gaat over universele kenmerken zijn of dat er tegenvoorbeelden voor bestaan.

Uit lemma 4.11 en stelling 5.11 weten we dat de constructies uit hoofdstukken 4 en 5 reguliere spreads hebben. Van de constructie uit hoofdstuk 3 hebben we er al één gevonden voor de kleinste strikte Neumaiergraaf. We construeren nu een reguliere spread voor willekeurige waarden van n .

Stelling 6.6

Zij $n \in \mathbb{N}$. De partitie in deelruimten

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{F}_2 \text{ voor alle } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

is een reguliere spread van $S_{A_2, B_2}(S_{A_1, B_1}(VO^+(2n, 2)))$.

Bewijs. Kies willekeurig $C = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in P$. In de graaf $VO^+(2n, q)$ is C duidelijk een kliek, want voor elk paar toppen in C is het verschil van de vorm $\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Een willekeurige top $v = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \notin C$ is adjacent met $w = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in C$ als en slechts als

$$Q(v - w) = \sum_{i=0}^n (b_i - x_i)(c_i - a_i) = 0.$$

Kies nu een $j \in \{1, \dots, n\}$ waarvoor $c_j \neq a_j$. Dan kunnen we de laatste gelijkheid ook nog schrijven als

$$x_j = b_j + \frac{1}{c_j - a_j} \sum_{i \neq j} (b_i - x_i)(c_i - a_i)$$

waaruit volgt dat we alle x_i 's met $i \neq j$ vrij kunnen kiezen en x_j na die keuze vastligt. De top v heeft dus 2^{n-1} burenen in C . Omdat v willekeurig was, is C regulier in $VO^+(2n, q)$.

Als $C = A_1$ of $C = B_1$ blijft C wegens lemma 3.4 een reguliere kliek na de eerste switching. In het andere geval ook, want dan is C disjunct met A_1 en B_1 .

Als C disjunct is met A_2 of B_2 blijft C opnieuw een reguliere kliek. Stel dat $C \cap A_2 \neq \emptyset$. Dan is $C \cap A_2 = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$. Een willekeurige top $v = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n \end{pmatrix} \in B_2$ is adjacent met $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in C \cap A_2$ als en slechts als $Q(v - w) = b_{n-1} - x_{n-1} = 0$.

De top $v \in B_2$ heeft dus 2^{n-2} burenen in $C \cap A_2$, wat precies de helft is van het aantal toppen in die doorsnede. We besluiten dat v na de tweede switching met een gelijk aantal toppen van $C \cap A_2$,

en dus ook van C , adjacent is. Omdat v willekeurig was in B_2 en er voor toppen daarbuiten ook niets verandert aan het aantal burens in C , is C nog steeds een reguliere klik na de tweede switching. Het geval $C \cap B_2 \neq \emptyset$ is analoog.

Omdat $C \in P$ willekeurig was, is P een reguliere spread. □

Samen met lemma 4.11 en stelling 5.11 doet het vorige lemma ons het volgende vermoeden.

Vraag 6.7. Beschikt elke strikte Neumaiergraaf over een reguliere spread?

Een andere, zeer natuurlijke vraag gaat over de toptransitiviteit. Voor de grafen uit hoofdstuk 4 volgt dit immers uit lemma 4.3.

Vraag 6.8. Zijn alle strikte Neumaiergrafen toptransitief?

Het antwoord is nee. Een tegenvoorbeeld wordt gegeven door de graaf $S_{A_2, B_2}(S_{A_1, B_1}(VO^+(6, 2)))$ uit hoofdstuk 3. Naast dat voorbeeld zijn er niet direct andere gekend.

Het volgende vermoeden is gedeeltelijk gebaseerd op stelling 2.10. In feite komt dit dus neer op de vraag of er strikte Neumaiergrafen bestaan met diameter 3.

Vraag 6.9. Hebben alle strikte Neumaiergrafen diameter 2?

Dat de constructies uit het tweede deel diameter 2 hebben, volgt uit het onderstaande lemma.

Lemma 6.10

Een samenhangende graaf met een spread van reguliere klikken heeft diameter 2.

Bewijs. Zij P een spread van reguliere klikken. Kies willekeurig twee toppen u en v . Zij $C \in P$ een klik die u bevat. Als $v \in C$ zijn we klaar. Kies anders een top $w \in C$ adjacent met v . Die bestaat, want anders zou de nexus van C nul zijn en is Γ niet samenhangend. De wandeling (u, w, v) heeft lengte 2. Omdat u en v willekeurig waren, liggen alle toppen op afstand ten hoogste 2 van elkaar. □

Men kan nog andere vragen bedenken over strikte Neumaiergrafen. Deze twee vragen zijn gebaseerd op de tabel uit paragraaf 7.5.

Vraag 6.11. Heeft elke strikte Neumaiergraaf een even aantal eigenwaarden?

Vraag 6.12. Hebben alle t -kransjes eigenwaarde -2 ?

De grafen uit hoofdstuk 3 hebben een nexus die een macht van twee is en de grafen uit hoofdstuk 4 en 5 hebben telkens nexus 1.

Vraag 6.13. Bestaan er strikte Neumaiergrafen met nexus *niet* een macht van 2?

De volgende stelling vermelden we zonder bewijs.

Stelling 6.14

Een samenhangende graaf Γ is sterk regulier als en slechts als Γ regulier is en hoogstens 3 verschillende eigenwaarden heeft.

Bewijs. Zie bijvoorbeeld [2]. □

Een strikte Neumaiergraaf heeft dus minstens 4 verschillende eigenwaarden. Dankzij stellingen 6.2 en 6.3 weten we dat k en $c - e - 1$ alvast twee eigenwaarden zijn.

Vraag 6.15. Bestaan er strikte Neumaiergrafen met juist 4 eigenwaarden?

6.3 Op zoek naar nieuwe strikte Neumaiergrafen

In het tweede deel zijn we enkele technieken tegengekomen om strikte Neumaiergrafen op te stellen.

Een zeer flexibele methode is het toepassen van één of meerdere switchings op al dan niet sterk reguliere grafen. Belangrijk om daarbij te vermelden is dat er classificaties bestaan van sterk reguliere grafen met minder dan 64 toppen.

Een logische aanpak is om strikte Neumaiergrafen te proberen construeren uit bestaande grafen. We vragen ons af of dat zou lukken door middel van lijngrafen.

Definitie 6.16

De **lijngraaf** $L(\Gamma)$ van Γ is de graaf met toppenverzameling $E(\Gamma)$, waarbij twee toppen adjacent zijn als en slechts als de overeenkomstige bogen in Γ een top gemeen hebben.

Helaas, de lijngraaf levert geen directe constructies op.

Stelling 6.17

Een lijngraaf is geen strikte Neumaiergraaf.

Bewijs. Stel, uit het ongerijmde, dat er een graaf Γ bestaat waarvan de lijngraaf een Neumaiergraaf is. Zonder verlies van algemeenheid mogen we veronderstellen dat Γ geen toppen met graad 0 bevat. Beschouw een e -reguliere c -klik C in $L(\Gamma)$. Wegens stelling 3.6 heeft een reguliere klik minstens 4 toppen en moet C dus bestaan uit alle bogen die een zekere top v bevatten. Omdat alle andere bogen hoogstens twee burens van v bevatten is $e \leq 2$. Uit stelling 2.9(i) volgt alvast dat $e \neq 0$.

Stel dat $e = 1$ en zij u een buur van v . Definieer $A \subseteq V(\Gamma)$ als de verzameling burens van v en $B \subseteq V(\Gamma)$ als de verzameling burens van u . We bewijzen dat Γ compleet bipartiet is met partitieklassen A en B . Kies willekeurig een buur w van u , verschillend van v . In $L(\Gamma)$ heeft $\{u, v\}$ graad $\deg(u) + c - 2$ en $\{u, w\}$ graad $\deg(u) + \deg(w) - 2$. Wegens de regulariteit is $\deg(w) = c$ zodat de bogen die w bevatten een 1-reguliere klik vormen in $L(\Gamma)$ (zie stelling 2.7). Die bogen hebben bovendien één buur in C (in $L(\Gamma)$). We besluiten dat de burens van w (in Γ) precies de burens zijn van v , of dus de elementen van B . Omdat w willekeurig was is elke top in A adjacent met alle toppen in B en geen enkele andere top in A . De toppen in B zijn onderling niet adjacent omdat een boog tussen twee burens (in Γ) van v anders twee burens (in $L(\Gamma)$) heeft in C . Tot slot bewijzen we nog dat $A \cup B = V(\Gamma)$. Een top w' die niet adjacent is met v is per veronderstelling bevat in boog. Omdat C 1-regulier is moet die boog een buur u' van v bevatten. Door de redenering van daarnet te herhalen (met accenten bij u en w), concluderen we dat w' adjacent is met alle burens van v , in het bijzonder met u . Het gestelde volgt omdat de lijngraaf van een compleet bipartiete graaf 2-coboogregulier is.

Stel dat $e = 2$. Elke boog bevat twee burens van v , zodat v adjacent is met alle andere toppen. Uit de regulariteit volgt dat Γ compleet is. De lijngraaf van een complete graaf is 4-coboogregulier en in het bijzonder geen strikte Neumaiergraaf. \square

We hebben wel een nieuw voorbeeld van een Neumaiergraaf gevonden.

Voorbeeld 6.18. De graaf $L(K_n)$ ($n \geq 4$) is een 4-coboogreguliere Neumaiergraaf met parameters $(\binom{n}{2}, 2n - 4, n - 2; 2, n - 1)$.

Tot slot kijken we naar de mogelijke parameters van *kleine* strikte Neumaiergrafen.

We kunnen de functie uit het bewijs van stelling 3.12 opnieuw uitvoeren, maar dan met n gaande van 16 tot en met 30. Op die manier werd de volgende output verkregen.

(16, 9, 4, 2, 4)
 (20, 7, 2, 1, 4)
 (21, 14, 9, 4, 7)
 (22, 12, 5, 2, 4)
 (24, 8, 2, 1, 4)
 (25, 12, 5, 2, 5)
 (25, 16, 9, 3, 5)
 (26, 15, 8, 3, 6)
 (27, 18, 12, 5, 9)
 (28, 9, 2, 1, 4)
 (28, 15, 6, 2, 4)
 (28, 15, 8, 3, 7)
 (28, 18, 11, 4, 7)
 (30, 9, 3, 1, 5)

In [6] wordt ook nog aangetoond – via een computeralgoritme – dat de tupels $(20, 7, 2; 1, 4)$, $(21, 14, 9; 4, 7)$ en $(22, 12, 5; 2, 4)$ niet kunnen voorkomen als parameters van strikte Neumaiergrafen.

Van het tupel $(24, 8, 2; 1, 4)$ is geweten dat er juist vier strikte Neumaiergrafen bestaan met die parameters, met name de vier voorbeelden van Goryainov en Shalaginov (zie de inleiding van hoofdstuk 3). Eén daarvan zijn we al tegengekomen als 2-kransje van de icosaeëdergraaf.

In de tabel in paragraaf 7.5 staat ook een voorbeeld met parameters $(28, 9, 2; 1, 4)$: de graaf $\Gamma_{3, \pi_0}(1, 2, 7)$, afkomstig van de constructie in hoofdstuk 4. Er is nog een andere graaf met diezelfde parameters ontdekt door de auteurs van [6].

Door alle *toptransitieve* strikte Neumaiergrafen op minder dan 47 toppen af te gaan vonden zij naast deze met parameters $(16, 9, 4; 2, 4)$, $(24, 8, 2; 1, 4)$ en $(28, 9, 2; 1, 4)$ nog één andere mogelijkheid: een graaf met parameters $(40, 12, 2; 1, 4)$. Mochten er nog andere strikte Neumaiergrafen bestaan met minder dan 47 toppen, dan zouden die niet toptransitief zijn.

Hoofdstuk 7

Neumaiergrafen in Sage

In dit laatste hoofdstuk geven we een overzicht van de code die gebruikt werd tijdens deze bachelorproef. Al het programmeerwerk gebeurde in Sage, een softwaretoepassing voor wiskunde met een gelijkaardige syntax als de programmeertaal Python.

7.1 Basisfuncties op (Neumaier)grafen

Sage beschikt over de volgende handige functies op grafen.

```
G.is_regular()
G.is_strongly_regular()
G.is_distance_regular()
G.is_vertex_transitive()
max_clique(G)
G.spectrum()
```

Helaas bestaan er geen ingebouwde functies om de boogregulariteit na te gaan. Zoiets is gelukkig snel geïmplementeerd.

```
1 def is_edge_regular(G, parameters=False):
2     if not G.is_regular():
3         return False
4     (u,v) = G.edges(labels=False)[0]
5     # lambda
6     l = len(set(G.neighbors(u)).intersection(G.neighbors(v))) # (sets zijn
7     # efficiënter dan een for-lus)
8     for (u,v) in G.edges(labels=False)[1:]:
9         if l != len(set(G.neighbors(u)).intersection(G.neighbors(v))):
10            return False # breekt de lus
11 if parameters: # geeft de parameters (n,k,l) terug
12     return (G.order(), G.degree(G.vertices()[0]), l)
13     return True
```

We zullen vaak nagaan of een graaf een Neumaiergraaf is. De volgende functie bepaalt of een *maximum* klik regulier is. Voor Neumaiergrafen is dat altijd waar wegens stelling 2.7. Voor *boogreguliere* niet-Neumaiergrafen zal de functie `False` teruggeven.

```
1 def has_regular_clique(G): # alleen geldig voor boogreguliere grafen
2     C = max_clique(G) # zie stelling (hoofdstuk 2)
3     S = set(G.vertices()).difference(C)
4     e = len(set(G.neighbors(S.pop())).intersection(C))
5     for u in S:
6         if e != len(set(G.neighbors(u)).intersection(C)):
7             return False
8     return True
```

Merk op dat we met de volgende functie ook de parameters van een Neumaiergraaf kunnen opvragen.

```

1 def is_Neumaier(G, parameters=False):
2     if not is_edge_regular(G) or not has_regular_clique(G) or G.is_regular(
3         G.order()-1):
4         return False
5     if parameters:
6         (n,k,l) = is_edge_regular(G, parameters=True)
7         C = max_clique(G) # zie stelling (hoofdstuk 2)
8         S = set(G.vertices()).difference(C)
9         e = len(set(G.neighbors(S.pop())).intersection(C))
10        return (n,k,l,e,len(C))
11    return True

```

```

1 def is_strictly_Neumaier(G, parameters=False):
2     if G.is_strongly_regular():
3         return False
4     return is_Neumaier(G, parameters)

```

7.2 Constructies van strikte Neumaiergrafen

7.2.1 Constructie uit hoofdstuk 3

Voor affiene polaire grafen bestaat wel een ingebouwde functie in Sage, maar daarvan kunnen we de toppen niet benoemen zoals we hier wel doen. Een switching zou je ook kunnen definiëren zoals het hier in de code staat.

```

1 def switch(G,A,B):
2     for u in A:
3         for v in B:
4             if v in G.neighbors(u):
5                 G.delete_edge(u,v)
6             else:
7                 G.add_edge(u,v)
8 def Gamma(n):
9     V = [(tuple(v0),tuple(v1)) for v0 in GF(2)^n for v1 in GF(2)^n]
10    def adjacent(v,w):
11        if v==w:
12            return False
13        som = 0
14        for i in range(n):
15            som += (v[0][i]-w[0][i])*(v[1][i]-w[1][i])
16        return som == 0
17    G = Graph({v:[w for w in V if adjacent(v,w)] for v in V})
18    X = [tuple(x) for x in GF(2)^n]
19    nulrij = tuple([0 for _ in range(n)])
20    A1 = [(x,nulrij) for x in X]
21    B1 = [(x,nulrij[:-2]+(1,0)) for x in X]
22    A2 = [(x[:-1]+(0,),nulrij[:-1]+(x[-1],)) for x in X]
23    B2 = [(x[:-1]+(0,),nulrij[:-2]+(1,)+(x[-1],)) for x in X]
24    switch(G,A1,B1)
25    switch(G,A2,B2)
26    return G

```

We kunnen nu aantonen dat de graaf $S_{A_2,B_2}(S_{A_1,B_1}(VO^+(4,2)))$ een strikte Neumaiergraaf met parameters $(16, 9, 4; 2, 4)$ is (zie stelling 3.5).

```

1 is_strictly_Neumaier(Gamma(2), parameters=True)

```

```

(16, 9, 4, 2, 4)

```

We kunnen ook nagaan dat $S_{A_2, B_2}(S_{A_1, B_1}(VO^+(3, 2)))$ niet toptransitief is (zie vraag 6.8).

```
1 Gamma(3).is_vertex_transitive()
False
```

7.2.2 Constructie uit hoofdstuk 4

We definiëren eerst het r -de cyclotomisch getal.

```
1 def cyclotomic_number(q, r, alpha, a, b):
2     aantal = 0
3     for i in range((q-1)/r):
4         for j in range((q-1)/r):
5             if 1 + alpha^(r*i+a) == alpha^(r*j+b):
6                 aantal += 1
7     return aantal
```

De afbeeldingen π_1 en π_2 zijn dezelfde als in definitie 4.15. De afbeelding π_0 is een bijectie $((\mathbb{Z}/2)^2)^* \rightarrow \mathbb{Z}/3$ die $(0, 1)$ naar 1 stuurt, $(1, 0)$ naar 2 en $(1, 1)$ naar 3.

```
1 def pi0(y):
2     return GF(4).list().index(y)
3 def pi1(y):
4     L = [0, 4, 1, 5, 3, 0, 6, 2]
5     return L[GF(8).list().index(y)]
6 def pi2(y):
7     L = [0, 6, 5, 4, 1, 0, 2, 3]
8     return L[GF(8).list().index(y)]
```

De onderstaande functie geeft de graaf $\Gamma_{\alpha, \pi}(n, m, q)$ terug.

```
1 def Gamma(alpha, pi, n, m, q):
2     G = cartesian_product([Integers(n), GF(2^m), GF(q)])
3     S = set(cartesian_product([Integers(n), GF(2^m), [0]]))
4     S.remove((0, 0, 0))
5     for y in GF(2^m):
6         if y != 0:
7             for j in range(pi(y), q, 2^m-1):
8                 S.add((0, y, alpha^j))
9     graaf = {}
10    for (x, y, z) in G:
11        graaf[(x, y, z)] = [(x+xs, y+ys, z+zs) for (xs, ys, zs) in S]
12    return Graph(graaf)
```

In de volgende drie blokken zoeken we naar geschikte parameters opdat de graaf $\Gamma_{\alpha, \pi}(n, m, q)$ een strikte Neumaiergraaf zou zijn. We kiezen hier α willekeurig omdat de $\phi(q-1)$ andere primitieve elementen in de kleinste gevallen, dezelfde graaf teruggeven (wat niet wil zeggen dat dit altijd zo is, zie ook vraag 4.19 en de opmerking eronder). Het zou ook computationeel te lang duren om alle primitieve elementen te bekijken.

```
1 # m=2
2 for q in range(1, 100, 6):
3     if is_prime_power(q):
4         alpha = GF(q).primitive_element()
5         c = cyclotomic_number(q, 3, alpha, 1, 2)
6         if c%2 == 1:
7             print "n=%d, m=%d, q=%d en alpha=" %((c+1)/2, 2, q), alpha
```

```
n=1, m=2, q=7 en alpha= 3
n=1, m=2, q=13 en alpha= 2
n=2, m=2, q=19 en alpha= 2
n=2, m=2, q=37 en alpha= 2
```



```

n=4, m=2, q=49 en alpha= z2
n=4, m=2, q=61 en alpha= 2
n=4, m=2, q=67 en alpha= 2
n=5, m=2, q=73 en alpha= 5
n=4, m=2, q=79 en alpha= 3
n=7, m=2, q=97 en alpha= 5

```

```

1 # m=3, pi1
2 for q in range(1,200,14):
3     if is_prime_power(q):
4         alpha = GF(q).primitive_element()
5         c = cyclotomic_number(q,7,alpha,1,5)
6         if c%4 == 1:
7             print "n=%d, m=%d, q=%d en alpha=" %((3*c+1)/4,3,q), alpha

```

```

n=1, m=3, q=29 en alpha= 2
n=1, m=3, q=127 en alpha= 3
n=4, m=3, q=197 en alpha= 2

```

```

1 # m=3, pi2
2 for q in range(1,200,14):
3     if is_prime_power(q):
4         alpha = GF(q).primitive_element()
5         c = cyclotomic_number(q,7,alpha,1,3)
6         if c%4 == 1:
7             print "n=%d, m=%d, q=%d en alpha=" %((3*c+1)/4,3,q), alpha

```

```

n=1, m=3, q=43 en alpha= 3
n=1, m=3, q=71 en alpha= 7

```

7.2.3 Constructie uit hoofdstuk 5

Hier is de belangrijkste functie het t -kranseje. Voor grote waarden van t vergt dit aanzienlijk meer tijd omdat we enerzijds veel kopieën maken van dezelfde graaf en anderzijds veel nieuwe bogen toevoegen.

```

1 def F(t,G):
2     d = G.diameter()
3     product = {}
4     for i in range(t):
5         for top in G:
6             product[(top,i)] = [(buur,i) for buur in G.neighbors(top)] + [(
                top,j) for j in range(t) if i!=j] + [(antipode,j) for
                antipode in G for j in range(t) if G.distance(top, antipode
                )==d]
7     return Graph(product)

```

De constructie uit stelling 5.14 heeft in de praktijk eigenlijk niet zo veel nut aangezien de grootte van de graaf exponentieel groeit ten opzichte van de parameters n en q . Daarom is het ook maar van één zo'n graaf gelukt om de eigenwaarden te berekenen (zie de volgende paragraaf). Bovendien is die graaf gelijk aan de lokale Knesergraaf $K(6,2)$ (een Taylorgraaf).

```

1 def Thas_Somma(n,q): # afstandsreguliere antipodale graaf met diameter 3 (q
    is priemmacht en j > 1)
2     def B(u,v): #symplectische vorm
3         som = 0
4         for i in range(n):
5             som += u[2*i]*v[2*i+1] - u[2*i+1]*v[2*i]
6         return som
7     graaf = {}
8     for a in GF(q):
9         for u in GF(q)^(2*n):

```

```

10     graaf[(a, tuple(u))] = [(a-B(u,v), tuple(v)) for v in GF(q)^(2*n)
11     if u!=v]
    return Graph(graaf)

```

7.3 Spectra van strikte Neumaiergrafen

Door gebruik te maken van de vorige stukken code en de commando's

```

G.spectrum()
G.charpoly().factor()

```

kunnen we de eigenwaarden berekenen van enkele strikte Neumaiergrafen. De resultaten bevinden zich in de tabel op de volgende bladzijde.

De grafen uit hoofdstuk 3 noteren we met $\Gamma(n)$ en die uit hoofdstuk 4 met $\Gamma_{\alpha,\pi}(n, m, q)$. De grafen uit gevolg 5.15 noteren we met $\Gamma(n, q)$ en het t -kranseje met $F_t(\cdot)$ zoals voordien. De afbeelding π_0 is gedefinieerd zoals in paragraaf 7.3. De multipliciteit van de eigenwaarden noteren we als superscript (exponent). Eigenwaarden die niet geheel zijn nemen we niet op in dit overzicht. We geven wel het totale aantal eigenwaarden op (“#”).

De rode eigenwaarden zijn de waarden die gelijk zijn aan k (zie stelling 6.2) en de blauwe de waarden die overeenkomen met $c - e - 1$ (zie stelling 6.3).

graaf	parameters					eigenwaarden	#	opmerkingen
	n	k	λ	e	c			
$\Gamma(2)$	16	9	4	2	4	$9^1, 1^5, -1^4, -3^2$	6	$\Gamma(2)$ is de kleinste strikte Neumaiergraaf
$\Gamma(3)$	64	35	18	4	8	$35^1, 3^{31}, -1^4, -5^{24}$	6	
$\Gamma(4)$	256	135	70	8	16	$135^1, 7^{131}, -1^4, -9^{116}$	6	
$\Gamma(5)$	1024	527	270	16	32	$527^1, 15^{523}, -1^4, -17^{492}$	6	
$\Gamma_{3,\pi_0}(1, 2, 7)$	28	9	2	1	4	$9^1, 2^6, -3^3$	6	
$\Gamma_{2,\pi_0}(1, 2, 13)$	52	15	2	1	4	$15^1, 2^{12}, -5^3$	6	
$\Gamma_{2,\pi_0}(2, 2, 19)$	152	25	6	1	8	$25^1, 17^1, 6^{18}, -2^{18}, -7^6$	8	
$\Gamma_{2,\pi_0}(2, 2, 37)$	296	43	6	1	8	$43^1, 35^1, 6^{36}, -2^{36}, -13^6$	8	
$\Gamma_{t,\pi_0}(4, 2, 49)$	784	63	14	1	16	$63^1, 47^3, 14^{48}, -2^{144}, -17^{12}$	8	
$\Gamma_{2,\pi_0}(4, 2, 61)$	976	75	14	1	16	$75^1, 59^3, 14^{60}, -2^{180}, -21^{12}$	8	
$\Gamma_{2,\pi_0}(4, 2, 67)$	1072	81	14	1	16	$81^1, 65^3, 14^{66}, -2^{198}, -23^{12}$	8	
$\Gamma_{3,\pi_0}(4, 2, 79)$	1264	93	14	1	16	$93^1, 77^3, 14^{78}, -2^{234}, -27^{12}$	8	
$\Gamma_{5,\pi_0}(5, 2, 73)$	1460	91	18	1	20	$91^1, 71^4, 18^{72}, -2^{288}, -25^{15}$	8	
$\Gamma_{2,\pi_1}(1, 3, 29)$	232	35	6	1	8	$35^1, 6^{28}, -5^7$	10	
$\Gamma_{3,\pi_1}(1, 3, 127)$	1016	133	6	1	8	$133^1, 6^{126}, -19^7$	10	
$\Gamma_{3,\pi_2}(1, 3, 43)$	344	49	6	1	8	$49^1, 6^{42}, -7^7$	10	
$\Gamma_{7,\pi_2}(1, 3, 71)$	568	77	6	1	8	$77^1, 6^{70}, -11^7$	10	
$F_2(I)$	24	8	2	1	4	$8^1, 4^1, 2^5, -2^5$	6	I is de icoesaëdergraaf
$F_3(J)$	60	14	4	1	6	$14^1, 8^2, 4^9, 2^{15}, -2^{18}, -4^{15}$	6	J is de Johnsongraaf $J(6, 3)$
$F_4(P)$	112	20	6	1	8	$20^1, 12^3, 6^{13}, -2^{39}$	6	P is de lokale Payleygraaf P_{13}
$F_4(K)$	128	22	6	1	8	$22^1, 14^3, 6^{15}, 2^{40}, -2^{45}, -6^{24}$	6	$K = \Gamma(2, 2)$ is de lokale Knesergraaf $K(6, 2)$
$F_5(C)$	160	24	8	1	10	$24^1, 14^4, 8^{15}, 4^{30}, -2^{60}, -4^{50}$	6	C is de halve 6-kubusgraaf
$F_5(Q)$	180	26	8	1	10	$26^1, 16^4, 8^{17}, -2^{68}$	6	Q is de lokale Payleygraaf P_{17}
$F_6(D)$	336	38	10	1	12	$38^1, 26^5, 10^{27}, 8^{42}, -2^{135}, -4^{126}$	6	D is de afstand-2-graaf van de Gossetgraaf
$F_9(G)$	504	44	16	1	18	$44^1, 26^8, 16^{27}, 8^{63}, -2^{216}, -4^{189}$	6	G is de Gossetgraaf

Bibliografie

- [1] Brouwer, A. E., Cohen, A. M., & Neumaier, A. (1989). Distance-Regular Graphs.
- [2] Brouwer, A. E., & Haemers, W. H. (2011). Spectra of graphs. Springer Science & Business Media.
- [3] De Bruyn, B. (2017). Discrete Wiskunde II.
- [4] Dickson, L. E. (1935). Cyclotomy, higher congruences, and Waring's problem. *American Journal of Mathematics*, 57(2), 391-424.
- [5] Evans, R. (2018). Neumaier Graphs.
- [6] Evans, R. J., Goryainov, S., & Panasenko, D. (2018). The smallest strictly Neumaier graph and its generalisations. arXiv preprint arXiv:1809.03417.
- [7] Godsil, C. D., & Hensel, A. D. (1992). Distance regular covers of the complete graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 56(2), 205-238.
- [8] Goryainov, S. V., & Shalaginov, L. V. (2014). Cayley–Deza graphs with fewer than 60 vertices. *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya [Siberian Electronic Mathematical Reports]*, 11, 268-310.
- [9] Greaves, G. R., & Koolen, J. H. (2018). Edge-regular graphs with regular cliques. *European Journal of Combinatorics*, 71, 194-201. *European J. Combin.*
- [10] Greaves, G. R., & Koolen, J. H. (2019). Another construction of edge-regular graphs with regular cliques. *Discrete Mathematics*, 342(10), 2818-2820.
- [11] Neumaier, A. (1981). Regular cliques in graphs and special $1\frac{1}{2}$ -designs.
- [12] Soicher, L. H. (2015). On cliques in edge-regular graphs. *Journal of Algebra*, 421, 260-267.
- [13] Somma, C. (1983). An infinite family of perfect codes in antipodal graphs. *Rend. Mat. Appl.*(7), 3, 465-474.
- [14] Thas, J. A. (1977). Two infinite classes of perfect codes in metrically regular graphs.
- [15] DistanceRegular.org. <https://www.distanceregular.org/indexes/taylorgraphs.html>, geraadpleegd op woensdag 20 mei 2020.