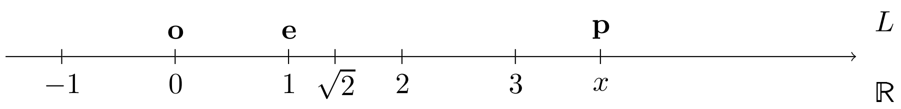
Module 6

Vlakke meetkunde

6.1 Geijkte rechte

Beschouw een rechte L en kies op deze rechte een punt $\mathbf{o}$ als *oorsprong* en een punt $\mathbf{e}$ als *eenheidspunt*.

Indien men aan $\mathbf{o}$ en $\mathbf{e}$ respectievelijk de getallen 0 en 1 toekent, dan komt elk punt van de rechte L met precies één reëel getal overeen en, omgekeerd, met elk reëel getal correspondeert precies één enkel punt van L, zoals aangegeven in de onderstaande figuur:



Het koppel $(\mathbf{o}, \mathbf{e})$ noemt men een *ijk* op de rechte L die dan een *geijkte rechte* genoemd wordt. Het getal x noemt men de *abscis* van het punt $\mathbf{p}$ t.o.v. de ijk $(\mathbf{o}, \mathbf{e})$.

6.1.1 Afstand tussen twee punten

Zijn $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$ punten van de rechte L en zijn x_1 en x_2 hun respectievelijke abscissen t.o.v. eenzelfde ijk van L.

De *afstand* tussen $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$, die men noteert als $d(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2})$, is gelijk aan de lengte van het lijnstuk $[\mathbf{p_1}\mathbf{p_2}]$ met uiteinden $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$. Men gaat gemakkelijk na dat

$$d(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}) = |x_1 - x_2|\,.$$

6.1.2 Midden van een lijnstuk

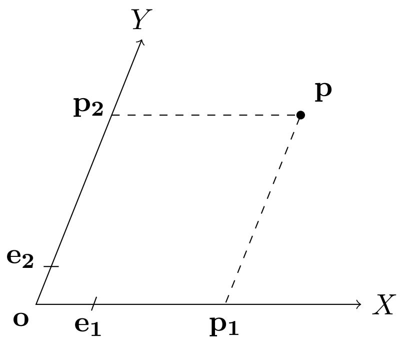
Zijn $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$ punten van de rechte L en zijn x_1 en x_2 hun respectievelijke abscissen t.o.v. eenzelfde ijk van L. Men kan aantonen dat er juist één punt $\mathbf{m}$ van L bestaat waarvoor geldt dat $d(\mathbf{m}, \mathbf{p_1}) = d(\mathbf{m}, \mathbf{p_2})$. Men gaat gemakkelijk na dat

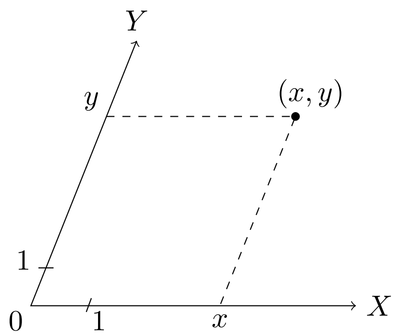
$$\mathbf{m} \text{ is het midden van } [\mathbf{p_1 p_2}] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{m} \text{ heeft als abscis } \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

6.2 Coördinatenvlak

Beschouw het vlak Π en erin twee snijdende rechten X en Y. Noem het snijpunt $\mathbf{o}$ en kies verder op X een punt $\mathbf{e}_1$ en op Y een punt $\mathbf{e}_2$.

Zij $\mathbf{p}$ een punt van Π en zij $\mathbf{p_1}$ de projectie van $\mathbf{p}$ parallel met Y op X en $\mathbf{p_2}$ de projectie van $\mathbf{p}$ parallel met X op Y. Zij verder x de abscis van $\mathbf{p_1}$ t.o.v. de ijk $(\mathbf{o}, \mathbf{e}_1)$ en zij y de abscis van $\mathbf{p_2}$ t.o.v. de ijk $(\mathbf{o}, \mathbf{e}_2)$, zoals aangeduid in de volgende figuur.





Aldus komt met elk punt $\mathbf{p}$ van Π precies één koppel reële getallen (x, y) overeen en, omgekeerd, met elk koppel reële getallen correspondeert precies één punt van Π.

Het koppel geijkte rechten (X, Y) noemt men dan een *assenstelsel* in het vlak Π dat dan een *coördinatenvlak* genoemd wordt. Het punt $\mathbf{o}$ noemt men de *oorsprong* van het assenstelsel en X en Y noemt men de *assen* van het assenstelsel. Het koppel (x, y) noemt men de *coördinaten* van het punt $\mathbf{p}$ ten opzichte van dit assenstelsel; meer bepaald noemt men x de *X-coördinaat* of *abscis* van $\mathbf{p}$ en y de *Y-coördinaat* of *ordinaat* van $\mathbf{p}$.

Als de assen van een assenstelsel loodrecht op elkaar staan, spreekt men van een *orthogonaal* assenstelsel.

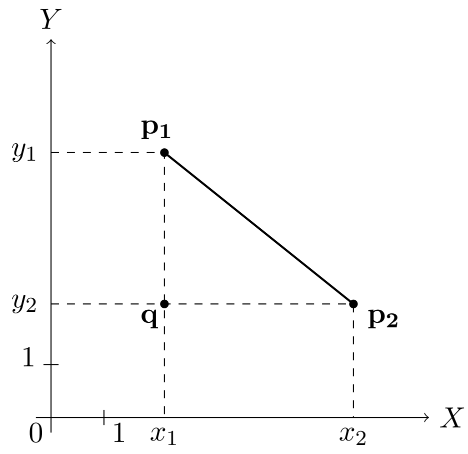
Als de afstand tussen $\mathbf{o}$ en $\mathbf{e}_1$ gelijk is aan de afstand tussen $\mathbf{o}$ en $\mathbf{e}_2$, dan zegt men dat het assenstelsel *genormeerd* is.

Is een assenstelsel tegelijkertijd orthogonaal en genormeerd dan spreekt men van een *orthonormaal* assenstelsel.

In hetgeen volgt zullen we steeds onderstellen dat het gebruikte assenstelsel **orthonormaal** is.

6.2.1 Afstand tussen twee punten

Zijn $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$ punten van het vlak Π en zijn (x_1, y_1) en (x_2, y_2) hun respectievelijke coördinaten t.o.v. eenzelfde orthonormaal assenstelsel van Π.



De afstand van $\mathbf{p_1}$ tot $\mathbf{p_2}$, die men noteert als $d(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2})$, is gelijk aan de lengte van het lijnstuk $[\mathbf{p_1 p_2}]$. Passen we in de rechthoekige driehoek $\mathbf{p_1 p_2 q}$ de stelling van Pythagoras toe, dan bekomen we

$$\begin{aligned}\big(d(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2})\big)^2 &= \big(d(\mathbf{p_2}, \mathbf{q})\big)^2 + \big(d(\mathbf{p_1}, \mathbf{q})\big)^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2,\end{aligned}$$

waaruit volgt

$$d(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

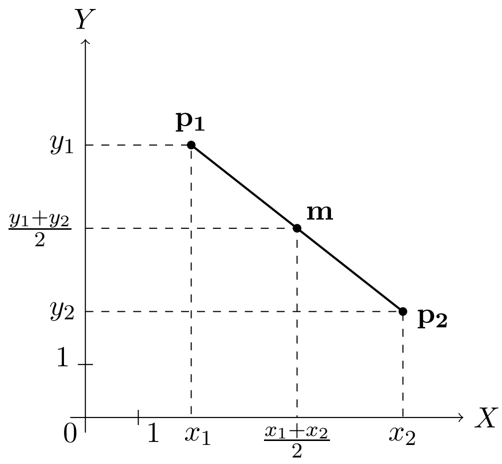
6.2.2 Midden van een lijnstuk

Zijn $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$ twee verschillende punten uit het vlak Π. Er bestaat dan juist één punt $\mathbf{m}$ van Π dat gelegen is op de rechte door $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$ en waarvoor geldt dat $d(\mathbf{m}, \mathbf{p_1}) = d(\mathbf{m}, \mathbf{p_2})$. Dit punt noemt men het midden van het lijnstuk $[\mathbf{p_1 p_2}]$.

Zijn (x_1, y_1) en (x_2, y_2) de coördinaten van resp. $\mathbf{p_1}$ en $\mathbf{p_2}$ t.o.v. eenzelfde orthonormaal assenstelsel van Π.

Er geldt:

$$\mathbf{m} \text{ is het midden van } [\mathbf{p_1 p_2}] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{m} \text{ heeft als coördinaten } \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$



6.3 Rechten

6.3.1 Lineaire vergelijkingen en rechten

Definitie

Een vergelijking van de vorm $px+qy+r=0$, waarbij $p,q,r \in \mathbb{R}$ en p en q niet tegelijkertijd nul, noemt men een *lineaire vergelijking* of een *vergelijking van de eerste graad in de veranderlijken x en y*.

Stelling

Zij Π een coördinatenvlak. Dan heeft elke rechte van Π als vergelijking een lineaire vergelijking. Omgekeerd, elke lineaire vergelijking is de vergelijking van een rechte van Π.

Bijzondere gevallen

1. Rechten door de oorsprong hebben een vergelijking van de gedaante $px+qy=0$ met $(p,q) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en omgekeerd.

2. Rechten evenwijdig met de X-as hebben een vergelijking van de gedaante $y=r$ met $r \in \mathbb{R}$, en omgekeerd.

3. Rechten evenwijdig met de Y-as hebben een vergelijking van de gedaante $x=r$ met $r \in \mathbb{R}$, en omgekeerd.

4. Zij L een rechte met vergelijking $px+qy+r=0$ waarbij $p,q \in \mathbb{R}_0$, dan snijdt L de X-as in het punt met coördinaten $\left(-\frac{r}{p},0\right)$ en de Y-as in het punt met coördinaten $\left(0,-\frac{r}{q}\right)$.

6.3.2 Richtingscoëfficiënt

Zij L een rechte met vergelijking $px + qy + r = 0$, waarbij $p, q, r \in \mathbb{R}$ en $q \neq 0$, dan kan deze vergelijking ook geschreven worden in de gedaante

$$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q},$$

of nog, als

$$y = mx + c \quad \text{met } m, c \in \mathbb{R}.$$

Merk op dat het getal c gelijk is aan de Y-coördinaat van het snijpunt van de rechte L met de Y-as. Immers, als $x = 0$, dan is $y = m \cdot 0 + c = c$.

De coëfficiënt van x in de vergelijking $y = mx + c$ noemt men de *richtingscoëfficiënt* of *helling* van de rechte L.

Grafische betekenis

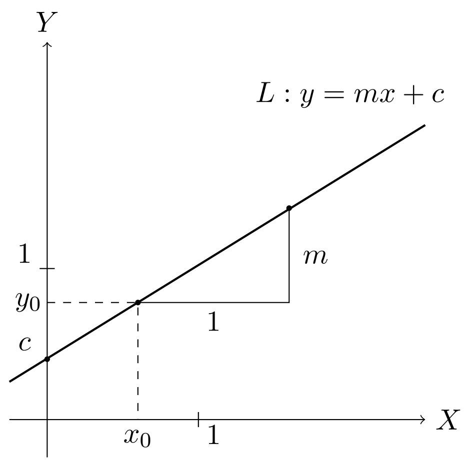
Beschouw een willekeurig punt (x_0, y_0) op L. We stellen ons de vraag wat de Y-coördinaat van het punt op L zou zijn dat correspondeert met de X-coördinaat $x_0 + 1$. Indien we deze Y-coördinaat voorstellen door y_1, dan

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) \in L &\quad\Leftrightarrow\quad y_0 = mx_0 + c \\ (x_0 + 1, y_1) \in L &\quad\Leftrightarrow\quad y_1 = m(x_0 + 1) + c. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$y_1 = m(x_0 + 1) + c = (mx_0 + c) + m = y_0 + m.$$

We concluderen dus dat, wanneer x_0 met één eenheid toeneemt, de corresonderende Y-coördinaat met m eenheden wijzigt. Deze wijziging is een toename als $m > 0$ (de rechte L stijgt dan) en een afname als $m < 0$ (de rechte L is dan dalend). Als $m = 0$, is er geen wijziging in de Y-coördinaat en de rechte L is dan horizontaal.



6.3.3 Evenwijdigheid

Twee verschillende rechten noemen we *evenwijdig* indien zij geen gemeenschappelijk punt hebben. Dit zal het geval zijn als ze beiden evenwijdig zijn met de Y-as of als ze dezelfde helling bezitten. Vandaar de volgende stelling.

Stelling

Twee rechten met respectievelijke richtingscoëfficiënten m en m' zijn evenwijdig als en slechts als $m = m'$.

6.3.4 Rechten bepaald door hun richtingscoëfficiënt en een punt

Kennen we de richtingscoëfficiënt m en een punt met coördinaten (x_1, y_1) van een rechte L, dan kunnen we op éénduidige wijze de vergelijking van L bepalen. Dit gebeurt als volgt.

De rechte L heeft richtingscoëfficiënt m en heeft dus een vergelijking van de gedaante $y = mx+c$. Ook geldt er

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \in L \quad &\Leftrightarrow \quad y_1 = mx_1 + c \\ &\Leftrightarrow \quad c = y_1 - mx_1 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de vergelijking van L gegeven wordt door

$$y = mx + (y_1 - mx_1)\,,$$

of nog, door

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)\,.$$

6.3.5 Rechten bepaald door twee punten

Gegeven twee punten van een rechte L met coördinaten (x_1, y_1) en (x_2, y_2).

De rechte L is evenwijdig met de Y-as als en slechts als $x_1 = x_2$ en haar vergelijking is dan $x = x_1$.

Is $x_1 \neq x_2$, dan is L niet evenwijdig met de Y-as en heeft dus een vergelijking van de vorm $y = mx + c$. Er geldt dan

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1, y_1) \in L \\ (x_2, y_2) \in L \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = mx_1 + c \\ y_2 = mx_2 + c \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\[2ex] c = y_1 - \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x_1 \end{array} \right.$$

De vergelijking van L is dus in dit geval

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)\,.$$

Samengevat, de vergelijking van de rechte L, die door twee verschillende gegeven punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gaat, is bepaald door

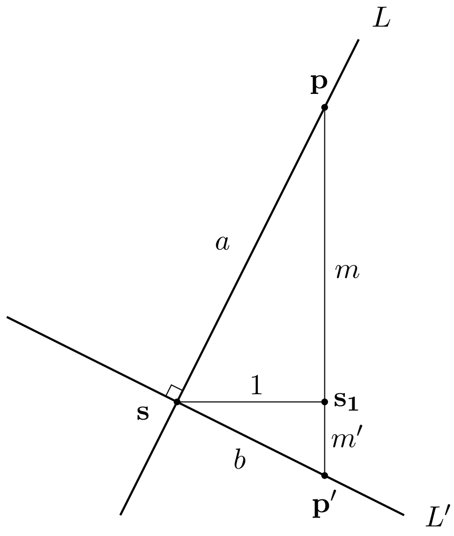
$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1).$$

6.3.6 Loodrechte stand

We beschouwen twee rechten L en L' met respectievelijke richtingscoëfficiënten m en m'.

De vraag is nu hoe m en m' zich t.o.v. elkaar verhouden als L en L' onderling loodrecht zijn.

Om dit uit te zoeken maken we de situatie aanschouwelijk in de volgende figuur. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we onderstellen dat L de stijgende rechte is en L' de dalende rechte.



In bovenstaande figuur zijn de driehoeken $\mathbf{sps}_1$ en $\mathbf{sp's}_1$ rechthoekige driehoeken. Door de onderling loodrechte stand van L en L' is de driehoek $\mathbf{spp'}$ ook een rechthoekige driehoek.

De stelling van Pythagoras, toegepast op de driehoeken $\mathbf{sps}_1$ en $\mathbf{sp's}_1$ geeft achtereenvolgens

$$a^2 = 1 + m^2 \tag{6.1}$$
$$b^2 = 1 + (m')^2 \tag{6.2}$$

Verdere toepassing van de stelling van Pythagoras op de driehoek $\mathbf{spp'}$ levert[1]

$$(m - m')^2 = a^2 + b^2$$

Als we hierin het linkerlid uitwerken en in het rechterlid de vergelijkingen (6.1) en (6.2) substitueren, dan krijgen we

$$m^2 + (m')^2 - 2mm' = 1 + m^2 + 1 + (m')^2$$

[1]De lengte van de schuine zijde is $m + (-m') = m - m'$, omdat m' negatief werd ondersteld door het dalend karakter van L'.

wat te vereenvoudigen is tot

$$mm' = -1.$$

Het product van de richtingscoëfficiënten moet dus gelijk zijn aan -1 bij onderling loodrechte stand van de betrokken rechten. Men kan bewijzen dat de omgekeerde conclusie eveneens opgaat. Zodoende krijgen we de volgende stelling:

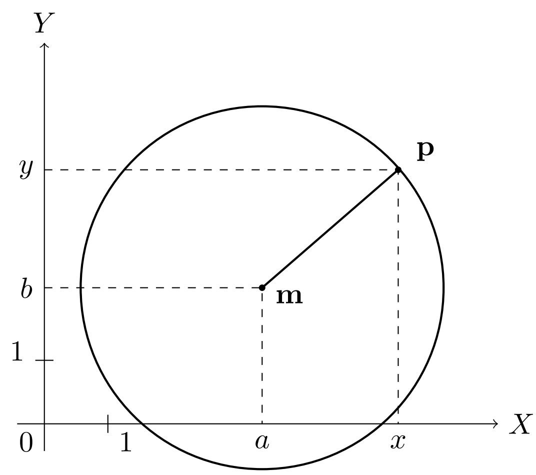
Stelling

Twee rechten met respectievelijke richtingscoëfficiënten m en m' zijn onderling loodrecht als en slechts als $m \cdot m' = -1$.

6.4 Cirkels

Een cirkel met middelpunt $\mathbf{m}$ en straal r ($r \in \mathbb{R}_0^+$) is de verzameling van alle punten $\mathbf{p}$ die op vaste afstand r van het punt $\mathbf{m}$ liggen. We duiden zo'n cirkel aan met de notatie $C(\mathbf{m}, r)$.

In het vlak Π, voorzien van een orthonormaal assenstelsel, krijgen we de volgende algemene figuur:



De vraag is nu aan welke voorwaarde de coördinaten van een willekeurig punt $\mathbf{p}$ op de cirkel $C(\mathbf{m}, r)$ moeten voldoen.

Duid hiervoor de coördinaten van $\mathbf{m}$ aan met (a, b) en van $\mathbf{p}$ met (x, y). Dan geldt

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} \in C(\mathbf{m}, r) \quad &\Leftrightarrow \quad d(\mathbf{p}, \mathbf{m}) = r \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \\
&\Leftrightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.
\end{aligned}$$

Deze laatste vergelijking noemt men dan de vergelijking van de cirkel $C(\mathbf{m}, r)$ t.o.v. het gebruikte orthonormale assenstelsel.

6.5 Oefeningen

Oefening 6.1. Bepaal de richtingscoëfficiënt en de snijpunten met de X-as en de Y-as van de rechte met de volgende vergelijking.

(1) $y = 2x - 1$

(2) $(x-1)+(y-2)=0$

(3) $x + 2y - 3 = 0$

(4) $x + 4 = 7$

(5) $2y - 3 = 0$

(6) $3x + 4y - 7 = 2x + 3y - 6$

(7) $4x + 9y = 5$

(8) $y + 7 = 0$

(9) $\frac{y}{-2} + \frac{x}{3} = 1$

(10) $\frac{3}{4}\,x = \frac{7}{3}\,y + \frac{1}{4}$

Oefening 6.2. Bepaal de vergelijking van de rechte die door de volgende twee punten gaat.

(1) $(-3\,,8)$ en $(4,-2)$

(2) $(1\,,2)$ en $(4\,,8)$

(3) $(5,-2)$ en $(4,-2)$

(4) $(-2\,,4)$ en $(-2\,,8)$

(5) $(0,-6)$ en $(3\,,0)$

(6) $(6,-3)$ en $(-7\,,5)$

Oefening 6.3. Bepaal de vergelijking van de rechte met de gegeven richtingscoëfficiënt en die door het gegeven punt gaat.

(1) $m = 2$ en $(1,-3)$

(2) $m = \frac{10}{7}$ en $(-3\,,8)$

(3) $m = -\frac{1}{2}$ en $(0\,,2)$

(4) $m = -3$ en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

Oefening 6.4. Bepaal de vergelijking van de rechte die voldoet aan de volgende beschrijving.

(1) door het punt $(-2\,,1)$ en evenwijdig met de rechte $2x + 3y = 7$

(2) de verticale rechte door $(2,-8)$

(3) de horizontale rechte door $(7\,,4)$

(4) door het punt $(1\,,1)$ en evenwijdig met de rechte $x = 3$

(5) door het punt $(4,-1)$ en loodrecht op de rechte $3y = x + 2$

(6) door de oorsprong en loodrecht op de rechte $x + y = 0$

Oefening 6.5. Ga na of de onderstaande rechten evenwijdig dan wel snijdend zijn. Bepaal in het laatste geval de coördinaten van hun snijpunt en ga ook na of ze loodrecht staan op elkaar.

(1) $2x + y = 0$ en $-7x - 4y = 1$

(2) $\frac{1}{3}x + 4y = -\frac{1}{3}$ en $2x + 2y = -2$

(3) $\frac{1}{5}x - \frac{1}{6}y = 3$ en $6x - 5y = 2$

(4) $3x + \frac{9}{2}y = 9$ en $\frac{2}{3}x + y = 2$

(5) $y = 3x + 2$ en $3y + 2x - 1 = 0$

(6) $3x = -1$ en $y = 2$

(7) $7x - 3y = 0$ en $3x + 7y = 0$

(8) $x + 2y = 3$ en $y - 2x = 4$

(9) $x + y = 0$ en $2x - 3y = 1$

(10) $y = -2x + \frac{1}{3}$ en $x + \frac{1}{2}y - 4 = 0$

Oefening 6.6. Bereken de omtrek van de driehoek met hoekpunten $(2\,,0)$, $(0\,,1)$ en $(2, -4)$.

Oefening 6.7. Gegeven de punten $\mathbf{a}(-2\,,3)$ en $\mathbf{b}(-6\,,0)$.

(1) Bereken de afstand tussen **a** en **b**.

(2) Bepaal de vergelijking van de rechte die door **a** en **b** gaat.

(3) Bepaal de coördinaten van het midden van het lijnstuk $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

(4) Bepaal de vergelijking van de middelloodlijn van $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Oefening 6.8. Bepaal de vergelijking van de cirkel met middelpunt $(4, -1)$ en straal 3. Welke van de punten $\mathbf{a}(1, -1)$, $\mathbf{b}(0, 0)$ en $\mathbf{c}(4, 2)$ liggen op deze cirkel?

Oefening 6.9. Bepaal telkens het middelpunt en de straal van de volgende cirkels.

(1) $x^2 + (y + 1)^2 = 2$

(2) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

(3) $x^2 - 4x + y^2 + 3y - 6 = 0$

(4) $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 23$

(5) $x^2 + y^2 - 2x - 14y + 34 = 0$

(6) $x^2 + y^2 + y = 1$

Oefening 6.10. Bepaal de snijpunten van de cirkel $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$ met de X-as.

Oefening 6.11. Gegeven de cirkel met middelpunt $(-2\,,2)$ en straal 5.

(1) Wat is de vergelijking van deze cirkel?

(2) In welke punten snijdt de rechte met vergelijking $y = x + 3$ deze cirkel?

(3) Voor welke waarden van de parameter p raakt de rechte met vergelijking $y = p$ deze cirkel? Wat zijn dan de raakpunten?

Oefening 6.12. Toon aan dat de rechte met vergelijking $x + y = 2$ en de cirkel met middelpunt de oorsprong en straal $\sqrt{2}$ elkaar raken en bepaal het raakpunt.

Oefening 6.13. Bepaal de snijpunten van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$

(1) met de eerste bissectrice

(2) met de cirkel $(x - 1)^2 + y^2 = 1$