



FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN EN ARCHITECTUUR

VAKGROEP WISKUNDIGE ANALYSE

**De reconstructie van een tijdsafhankelijke
convolutiekern in een semilineaire parabolische
integraal-differentiaal vergelijking**

Fien GISTELINCK

Promotor: Prof. Dr. M. Slodička

Begeleider: Drs. K. Van Bockstal

Masterproef ingediend tot het behalen van de academische graad van master in de
wiskunde, afstudeerrichting toegepaste wiskunde.

Academiejaar 2014-2015



FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN EN ARCHITECTUUR

VAKGROEP WISKUNDIGE ANALYSE

**De reconstructie van een tijdsafhankelijke
convolutiekern in een semilineaire parabolische
integraal-differentiaal vergelijking**

Fien GISTELINCK

Promotor: Prof. Dr. M. Slodička

Begeleider: Drs. K. Van Bockstal

Masterproef ingediend tot het behalen van de academische graad van master in de
wiskunde, afstudeerrichting toegepaste wiskunde.

Academiejaar 2014-2015

Voorwoord

Wiskunde vormt de basis van alle wetenschap. Het klinkt grotesk, maar er zit waarheid in. Denk maar aan de fysica met al zijn formules, de chemie met de grafieken van verval of de genetica uit de biologie. Al vanaf het middelbaar kriebelde het bij mij om de theoretische achtergrond van deze fundamenteen uit te diepen. Met deze instelling wist ik me door de jaren van de Bachelor Wiskunde heen te sleuren, tot ik het vak “Partiële Differentiaal Vergelijkingen” kreeg in het eerste masterjaar. Dit vak deed me herinneren aan de sterke band tussen theorie en praktijk. Bijna elk fenomeen, hoe gewoon of spectaculair deze ook leek, wist zich te transformeren in een wiskundig model met partiële differentiaalvergelijkingen.

Datzelfde jaar moest een thesisonderwerp gekozen worden en net zoals vijf jaar geleden, kon ik het niet laten om het mysterie achter de praktijk uit te pluizen. Is er tenslotte iets mooier dan het exploiteren van de theoretische kennis, opgedaan doorheen al die jaren, en het toe te passen op de werkelijkheid? Voor ik me ervan bewust was, had Prof. Dr. M. Slodička me een passend onderwerp aangeboden.

Na een intensief jaar, beëindig ik met deze thesis vijf jaar universiteit. Ik dank mijn promotor Prof. Dr. M. Slodička, die mij een boeiend onderwerp heeft aangeboden, om de thesis in goede banen te leiden en om mij regelmatig te ontvangen voor het nakijken van mijn werk. Mijn oprechte dank gaat daarnaast ook naar mijn begeleider Drs. K. Van Bockstal voor de hulp bij het numerieke deel en de afwerking van de thesis. Ik dank hem voor de energie en de tijd die hij heeft gespendeerd aan het oplossen van mijn problemen en het herlezen van de thesis.

Daarnaast gaat mijn dank naar mijn ouders die mij de mogelijkheid hebben gegeven mij te kunnen ontplooien in de wiskundige wereld. Ik dank ook mijn broers voor de kans die ze mij hebben gegeven om mijn schoolwerk verder te kunnen zetten in het weekend en de last op mijn schouders te verlichten. Tenslotte ben ik mijn vriendenkring dankbaar voor hun morele steun en geduld in moeilijke tijden.

Zwevegem, 31 mei 2015

Fien Gistelinck

“ Mathematics reveals its secrets only to those
who approach it with pure love, for its own beauty”
-Archimedes

Toelating tot bruikleen

“De auteur geeft de toelating deze masterproef voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van de masterproef te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit deze masterproef.”

Zwevegem, 31 mei 2015,
Fien Gistelinck

Handtekening

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
2	Theoretische achtergrond	3
2.1	Enkele begrippen uit de functionaalanalyse	3
2.1.1	Banachruimten	3
2.1.2	Hilbertruimte	4
2.1.3	Ruimten van meetbare functies	5
2.1.4	Ruimten van continue functies	7
2.1.5	Sobolevruimten	9
2.2	Partiële differentiaalvergelijkingen	11
2.2.1	Randcondities	13
2.2.2	Galerkin benadering	15
2.2.3	Eindige elementenmethode	17
3	Probleemstelling	19
4	Analyse van het probleem	21
4.1	Opstellen van de variationele formulering	21
4.2	Stabiliteitsanalyse	24
4.3	Tijdsdiscretisatie	31
4.4	A priori afschattingen	38
4.5	Goed gedefinieerdheid	46
4.6	Foutenschatting	69
5	Numeriek experiment	71
5.1	Voorbeeld 1	75
5.2	Voorbeeld 2	77
6	Algemeen besluit	79
	Bijlage A English summary	81

Bijlage B Lijst van hulpstellingen	84
B	
Referenties	95

1 Inleiding

Partiële differentiaalvergelijkingen vormen de basis voor wiskundige modellen. Verschillende fenomenen uit de fysica, mechanica, biologie of zelf sociale wetenschappen die in de ruimte en/of tijd afspelen, kunnen met behulp van wiskundige gelijkheden worden geformuleerd. Denk maar aan de golfvergelijking die de voortplanting van warmte of geluid beschrijft of de vergelijkingen van Maxwell die het fundament vormen van het elektromagnetisme. Het opstellen van dergelijke wiskundige modellen is één facet, het oplossen ervan is een ander. Wiskundige modellen worden opgesteld zodat deze kunnen opgelost worden en zo antwoorden kunnen bieden op de praktische vragen rond het fenomeen die het model beschrijft. Het vinden van een oplossing is echter niet zo simpel. Omdat er zo veel uiteenlopende fenomenen zijn en er dus ook heel veel variaties bestaan tussen de verschillende modellen, is er tot nu toe nog geen algemene methode gevonden voor het vinden van een oplossing. Hierdoor moet elk model vaak op zichzelf beschouwd worden en met behulp van bestaande strategieën opgelost worden.

In deze thesis werd een wiskundig model geïntroduceerd en geanalyseerd. Het probleem is een invers semilineair parabolisch probleem die bijvoorbeeld de verontreiniging van een verzadigde bodem beschrijft:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (K * u)(t) = \int_0^t f(u(s)) ds & \text{in } \Omega \times]0, T], \\ -\nabla u \cdot \mathbf{n} = g & \text{op } \Gamma \times]0, T], \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Het doel van deze thesis is de theoretische analyse van het bestaan en de uniciteit van de oplossingsfunctie $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Deze analyse wordt bemoeilijkt door het feit dat de kernfunctie K uit de convolutie onbekend is. Een extra globale meting is noodzakelijk om deze onbekende variabele te reconstrueren.

In Hoofdstuk 2 wordt de theoretische basis gelegd voor de rest van de thesis. Hierbij worden eerst enkele basisbegrippen uit de functionaalanalyse herhaald zoals de Hilbertruimten en Sobolevruimten. Daarnaast wordt een introductie gegeven over het concept van partiële differentiaalvergelijkingen. Er wordt dieper ingegaan op de definitie van de begin- en randvoorwaarden. De Galerkin methode waarbij een benadering van de exacte oplossing wordt berekend, wordt uitgelegd alsook de eindige elementenmethode welke gebruikt wordt bij de numerieke berekening van de Galerkin benadering.

In het derde hoofdstuk wordt het wiskundig model geïntroduceerd en gesitueerd in een praktische toepassing. Daarna wordt in Hoofdstuk 4, het probleem geanalyseerd. Er wordt eerst overgegaan naar een variationele formulering. Dan wordt een stabiliteitsanalyse uitgevoerd voor de zwakke oplossing in de veronderstelling dat de oplossing bestaat. Vervolgens wordt de variationele formulering gediscretiseerd naar de tijd. Hierdoor is het mogelijk om het bestaan en de uniciteit van de zwakke oplossing op elk tijdstip te bewij-

zen alsook de stabiliteit van de zwakke oplossing na te gaan. Tenslotte worden de zwakke oplossingen op elk tijdstip samengevoegd met behulp van de Rothe-functies en wordt de convergentie van deze functies naar de exacte oplossing onderzocht. Bij deze laatste stap wordt ook de snelheid van convergentie beschouwd.

Tenslotte wordt in Hoofdstuk 5 twee numerieke voorbeelden uitgewerkt. In dit deel zal de convolutiekern worden gereconstitueerd en de oplossingsfunctie u worden benaderd. Hierbij worden bijhorende figuren gemaakt die de theorie staven, zoals de snelheid van de convergentie.

2 Theoretische achtergrond

Vooraleer het semilineaire parabolische begin- en randwaardenprobleem van deze thesis te analyseren, wordt de theoretische achtergrond gegeven die noodzakelijk is voor de thesis. Eerst zullen enkele begrippen worden gedefinieerd waarin partiële differentiaalvergelijkingen plaatsvinden inclusief functieruimten die ook in deze thesis zullen voorkomen. Hierbij worden enkele hulpstellingen, zoals de stelling van Green en de spoorstelling, gegeven die gebruikt zullen worden in de analyse van het probleem. Daarenboven zullen bepaalde methodes worden verduidelijkt die in het latere deel van de thesis wordt toegepast.

2.1 Enkele begrippen uit de functionaalanalyse

Een partiële differentiaalvergelijking is een wiskundige relatie tussen een onbekende functie in verschillende onafhankelijke veranderlijken en één of meerdere van zijn partiële afgeleiden ten opzichte van deze variabelen. Indien de functie slechts één veranderlijke kent, wordt er eerder gesproken over een gewone differentiaalvergelijking. De onbekende functie die voorkomt in de partiële differentiaalvergelijking voldoet meestal aan bepaalde voorwaarden en wordt verondersteld afkomstig te zijn van een welbepaalde genormeerde ruimte. Een genormeerde ruimte is echter te algemeen om verder onderzoek uit te kunnen voeren op de onbekende functie. Hiervoor wordt de genormeerde ruimte verder uitgediept tot meer specifieke ruimten ([1], [2], [3], [4], [5]). Er wordt verondersteld dat de lezer voldoende kennis bezit over het concept van een genormeerde ruimte en de daarbijhorende notatie $\|\cdot\|$ voor de corresponderende norm van de ruimte. Voor meer achtergrond informatie over dat onderwerp, wordt de lezer doorverwezen naar [6] en [2].

2.1.1 Banachruimten

Definitie 2.1.

Een rij $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in een genormeerde ruimte is een Cauchy-rij indien

$$\|f_p - f_q\| \rightarrow 0, \quad \text{voor } p, q \rightarrow +\infty.$$

Elke convergente rij in een genormeerde ruimte is dus een Cauchy-rij, maar het omgekeerde is niet altijd waar. Een tegenvoorbeeld is de Taylorontwikkeling van de exponentiële functie in $\mathcal{P}([0, 1])$, de verzameling van alle polynomen over het eenheidsinterval.

Definitie 2.2.

Een genormeerde ruimte V wordt compleet genoemd indien deze aan het criterium van Cauchy voldoet, i.e. elke Cauchy-rij uit V convergeert in V .

Een Banachruimte is een genormeerde ruimte die compleet is.

2.1.2 Hilbertruimte

Een specifieke klasse van genormeerde vectorruimten is de inproductruimte. Een inproduct kan namelijk op natuurlijke wijze geassocieerd worden met een norm. Hierdoor kunnen de begrippen zoals compactheid ook in de context van een inproductruimte worden gedefinieerd. Als gevolg hiervan kan er analoog gesproken worden over een aparte klasse van Banachruimten, namelijk de Hilbertruimte.

Definitie 2.3.

Een Hilbertruimte is een inproductruimte die compleet is.

Later in dit hoofdstuk zal er echter ook gesproken worden over separabele Hilbertruimten. Hiervoor moeten eerst volgende begrippen worden gedefinieerd.

Definitie 2.4.

Een orthogonaal systeem is een verzameling niet-nul vectoren in een inproductruimte waarvan elke twee verschillende vectoren uit die verzameling loodrecht op elkaar staan, i.e. het inproduct van elke twee verschillende vectoren is gelijk aan 0.

Een orthonormaal systeem is een orthogonaal systeem waarbij alle vectoren eenheidsvectoren zijn, i.e. het inproduct met zichzelf is gelijk aan 1.

Een orthonormale rij is een orthonormaal systeem waarbij de verzameling vectoren een rij vormen.

Een orthonormale rij (e_n) wordt volledig genoemd indien voor elke vector v uit de onderliggende inproductruimte met inproduct (\cdot, \cdot) geldt dat:

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} (v, e_j) e_j.$$

Met behulp van deze termen kan het begrip separabiliteit als volgt worden gedefinieerd.

Definitie 2.5.

Een Hilbertruimte wordt separabel genoemd indien deze een volledige orthonormale rij bevat.

In een Hilbertruimte kunnen functies gedefinieerd worden die inwerken op de Hilbertruimte en deze elementen op de reële getallen afbeeldt. Dergelijke afbeeldingen kunnen lineair en begrensd zijn.

Definitie 2.6.

Een functionaal is een afbeelding van Hilbertruimte V naar \mathbb{R} .

Een functionaal f is lineair indien deze voldoet aan:

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v), \quad \forall u, v \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Een lineaire functionaal is begrensd indien $\exists C > 0$:

$$|f(v)| \leq C \|v\|, \quad \forall v \in V.$$

De verzameling $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ van alle lineaire begrensde functionalen $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ wordt de duale ruimte V^* genoemd.

Stelling 2.1 (Riesz-representatiestelling).

Als f een begrensd lineaire functionaal is op een Hilbertruimte V met inproduct (\cdot, \cdot) ,

Dan bestaat er een unieke $v_0 \in V : f(v) = (v, v_0)$.

Bovendien geldt dat $\|f\|_V^* = \sup_{\|v\|=1} |f(v)| = \|v_0\|$.

Het bewijs hiervan is terug te vinden in [2] of [3]. Bovenstaande stelling geeft eigenlijk een direct verband aan tussen een functionaal en het inproduct van de ruimte waarop de functionaal inwerkt. Deze stelling vormt namelijk de basis van de Lax-Milgram stelling die later in dit hoofdstuk zal gegeven worden.

Naast functionalen, kunnen er op een Hilbertruimte ook bilineaire vormen worden gedefinieerd.

Definitie 2.7.

Een bilineaire vorm is een afbeelding van Hilbertruimte $V \times V$ naar \mathbb{R} , waarvoor geldt dat:

$$\begin{aligned} a(\lambda u + \mu v, w) &= \lambda a(u, w) + \mu a(v, w) & \forall u, v, w \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ a(u, \lambda v + \mu w) &= \lambda a(u, v) + \mu a(u, w) & \forall u, v, w \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Een bilineaire vorm is symmetrisch indien $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$.

Een bilineaire vorm is begrensd indien $\exists C > 0$:

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|.$$

Een bilineaire vorm is V -elliptisch indien $\exists C > 0$:

$$a(v, v) \geq C \|u\|^2.$$

2.1.3 Ruimten van meetbare functies

Vooraleer de belangrijkste functieruimten zullen herhaald worden, welke de onbekende functie van de partiële differentiaalvergelijking toebehoort, worden er eerst nog enkele definities in verband met domeinen gegeven.

Definitie 2.8.

Een domein is een open samenhangende deelverzameling Ω van \mathbb{R}^d met $d \geq 1$. De rand van een domein wordt meestal voorgesteld door $\partial\Omega$ of Γ .

Een domein Ω is begrensd indien Ω een begrensde maat heeft. Een begrensd domein Ω heeft een stuksgewijs gladde rand indien Γ bestaat uit een eindig aantal gladde delen en de uitwendige normaalvector ν bestaat in bijna alle punten van de rand.

Definitie 2.9.

Een domein is een Lipschitz-domein indien zijn rand Lipschitz-continu is, i.e. indien $\exists \alpha, \beta > 0$ en er bestaan m ($\in \mathbb{N}$) continue functies $a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)})$ met $r = 1, \dots, m$ die gedefinieerd zijn in $(d-1)$ -dimensionale open kubussen

$$K^{(r)} = \left\{ \left(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)} \right) \mid \left| x_i^{(r)} \right| < \alpha \quad i = 1, \dots, d-1 \right\}$$

zodanig dat

1. elk punt van Γ kan in tenminste één van de coördinaatsystemen uitgedrukt worden als

$$\mathbf{x} = \left(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)}, a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)}) \right)$$

2. de punten $\mathbf{x} = \left(x_1^{(r)}, \dots, x_d^{(r)} \right)$, waarvoor $\left| x_i^{(r)} \right| < \alpha$ voor $i = 1, \dots, d-1$ en

$$a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)}) < x_d^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)}) + \beta,$$

respectievelijk,

$$a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)}) - \beta < x_d^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)})$$

liggen in Ω , respectievelijk buiten $\bar{\Omega}$

3. alle functies $a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)})$ voor $r = 1, \dots, m$ zijn Lipschitz-continu in de kubus $K^{(r)}$. Er bestaat dus een $C > 0$:

$$\left| a_r(x_1^{(r)}, \dots, x_{d-1}^{(r)}) - a_r(y_1^{(r)}, \dots, y_{d-1}^{(r)}) \right|^2 \leq C \sum_{i=1}^{d-1} \left| x_i^{(r)} - y_i^{(r)} \right|^2.$$

Dan kunnen nu de volgende functieruimten gedefinieerd worden. Hierbij wordt er verondersteld dat $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, een begrensd domein is met stuksgewijs continue rand.

Definitie 2.10.

Stel $1 \leq p < \infty$, dan is

$$L_p(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ is meetbaar en } \int_{\Omega} |\varphi|^p d\mathbf{x} < \infty \right\}.$$

Dit betekent dat voor $p = 1$, de ruimte $L_1(\Omega)$ bestaat uit de functies die integreerbaar zijn over Ω en dat voor $p = 2$, de ruimte $L_2(\Omega)$ bestaat uit de functies die meetbaar zijn en kwadratisch integreerbaar over Ω . De ruimte L_∞ wordt gedefinieerd als de ruimte van alle functies die meetbaar zijn en bijna overal begrensd zijn over Ω , i.e.

$$\sup_{\text{b.o. in } \Omega} |f| < \infty,$$

waarbij b.o. de afkorting is voor ‘‘bijna overal’’, met andere woorden, de verzameling van punten waarvoor de eigenschap niet geldt heeft maat nul. Het is duidelijk dat al deze functieruimten voor $p \neq \infty$ Banach-ruimten zijn met als norm:

$$\|\varphi\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\varphi|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Enkel de ruimte $L_2(\Omega)$ is ook een Hilbertruimte met als natuurlijk inproduct:

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

2.1.4 Ruimten van continue functies

Beschouw een begrensd domein $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ voor $d \geq 1$ met een stuksgewijs continue grens en een functie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Definitie 2.11.

Een functie is continu indien

$$\forall \mathbf{y} \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon, \mathbf{y}}, \forall \mathbf{x} \in \Omega : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Een functie is uniform continu indien

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Een functie is Lipschitz-continu indien

$$\exists L > 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega : |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Definitie 2.12.

Hieronder wordt de definitie gegeven van ruimten van continue functies:

- $C^0(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ is continu op } \Omega\}$
- $C^0(\bar{\Omega}) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \in C^0(\Omega) \text{ en is uniform continu over } \Omega\}$
- $C^p(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ alsook tot en met zijn } p\text{-de partiële afgeleiden zijn continu op } \Omega\}$

- $C^p(\overline{\Omega}) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \in C^p(\Omega) \text{ en } \varphi \text{ alsook tot en met zijn } p\text{-de partiële afgeleiden zijn uniform continu over } \Omega\}$
- $C^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \in C^k(\Omega), \forall k \in \mathbb{N}\}$
- $C^\infty(\overline{\Omega}) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \in C^k(\overline{\Omega}), \forall k \in \mathbb{N}\}.$

Bovenstaande ruimten zijn allemaal genormeerde ruimten. De overeenkomstige norm wordt hieronder gedefinieerd.

Definitie 2.13.

De norm van een functie $u \in C^k(\overline{\Omega})$ is het getal

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|=i} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(\mathbf{x})|.$$

Hierbij wordt de multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ met $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, gebruikt om de operator D^α te definiëren als:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Bijvoorbeeld, in het één-dimensionele geval geldt er dat $\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$, terwijl de norm $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} = \|u'\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}$. De norm op $C^k(\overline{\Omega})$ kan ook gedefinieerd worden op basis van de semi-norm. De alternatieve definitie zal gebruikt worden bij het definiëren van de Sobolevruimten.

Definitie 2.14.

De semi-norm van de i -de afgeleide van een functie $u \in C^k(\overline{\Omega})$ met $i \leq k$, is het getal

$$|u|_{i,p} = \left(\sum_{|\alpha|=i} \|D^\alpha u\|_{L_p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

met $p \geq 1$. Hierbij wordt opnieuw gebruik gemaakt van de multi-index en de operator D^α , gedefinieerd in Definitie 2.13.

Dit wordt een semi-norm genoemd omdat de voorwaarde dat $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$ voor een norm hier niet meer geldt.

Definitie 2.15.

De norm van een functie $u \in C^k(\overline{\Omega})$ is het getal

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{i=0}^k |u|_{i,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.1.5 Sobolevruimten

Definitie 2.16.

De Sobolevruimte $W^{k,p}$ is de sluiting van de ruimte $C^\infty(\Omega)$ ten opzichte van de norm gedefinieerd in Definitie 2.15.

Een Sobolevruimte is een Banachruimte. Indien $p = 2$ wordt gekozen, is de overeenkomstige Sobolevruimte een Hilbertruimte met als inproduct:

$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx$$

De norm geïnduceerd door dit inproduct valt samen met de norm gedefinieerd in Definitie 2.15. De Hilbertruimte $W^{k,2}(\Omega)$ wordt meestal genoteerd als $H^k(\Omega)$.

Bijvoorbeeld, de norm $\|u\|_{H^1(\Omega)}^2$ voor $H^1(\Omega)$ komt overeen met $\|u\|_{1,2}^2 = \|u\|_{0,2}^2 + \|\nabla u\|_{0,2}^2$. Hieronder worden enkele stellingen gegeven die belangrijk zijn bij de analyse van een wiskundig probleem.

Stelling 2.2 (Spoorstelling).

Als $u \in H^1(\Omega)$,

dan bestaat er een unieke lineaire afbeelding $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Gamma)$ die voldoet aan:

1. $\gamma(u) = u|_{\Gamma} \quad \forall u \in H^1(\Omega) \cup C^0(\bar{\Omega})$
2. $\exists C(\Omega) > 0 : \|\gamma(u)\|_{L_2(\Gamma)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$.

Het bewijs van deze stelling is terug te vinden in [7]. De functie γ , de spooroperator genoemd en $\gamma(u)$, het spoor van u . De volgende stelling is de stelling van Friedrichs waarna de ongelijkheid van Nečas wordt gegeven.

Stelling 2.3 (Friedrichs).

Als $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ text, begrensd met Lipschitz – continueranden

$\Gamma_0 \subset \Gamma$ met $|\Gamma_0| > 0$,

dan $\exists C(\Omega, \Gamma_0) > 0, \forall u \in H^1(\Omega) : \|u\|_{1,2} \leq C \left(\|u\|_{0,2}^2 + \int_{\Gamma_0} u^2 d\Gamma_0 \right)$

Het bewijs van deze stelling is terug te vinden in [8].

Stelling 2.4 (Nečas).

Als $u \in H^1(\Omega)$,

$\varepsilon \in]0, 1[$ en

$\Gamma_0 \subset \Gamma$

dan $\exists C > 0 : \|u\|_{\Gamma}^2 \leq \varepsilon \|\nabla u\|^2 + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|^2$.

Het bewijs van deze stelling is terug te vinden in [9]. Deze ongelijkheid van Nečas, samen met de spoorstelling zullen handig zijn tijdens de analyse van het probleem uit deze thesis. Ten slotte wordt nog de stelling van Green gegeven, waarvan het bewijs terug te vinden is in [3].

Stelling 2.5 (Green).

Als $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$

dan geldt:

$$\int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla v(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} v(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nu d\Gamma.$$

Vooraleer er overgegaan wordt naar het concept van een partiële differentiaalvergelijking met bijhorende begrippen, worden eerst enkele belangrijke ruimten herhaald die essentieel zijn bij het vervolg van deze thesis.

Definitie 2.17.

Veronderstel dat $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ een begrensde domein is met stuksgewijs gladde rand en dat X een Banachruimte is met norm $\|\cdot\|_X$. Dan geldt:

$$L_2(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ is meetbaar en } \int_{\Omega} |\varphi|^2 < \infty \right\}$$

$$L_2(\Omega, X) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow X \mid \varphi \text{ is meetbaar en } \int_{\Omega} |\varphi|^2 < \infty \right\}$$

$$C^k(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|=i} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha} u(\mathbf{x})| < \infty \right\}$$

$$C^k(\Omega, X) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow X \mid \sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|=i} \sup_{x \in \Omega} \|D^{\alpha} u(\mathbf{x})\|_X < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \{ \varphi \in L_2(\Omega) \mid \nabla \varphi \in L_2(\Omega) \}$$

$$H^2(\Omega) = \{ \varphi \in L_2(\Omega) \mid \Delta \varphi \in L_2(\Omega) \}$$

2.2 Partiële differentiaalvergelijkingen

Zoals eerder vermeld, is een differentiaalvergelijking een wiskundige relatie van een functie en zijn afgeleiden. Indien de functie slechts één argument heeft, wordt er gesproken over een gewone differentiaalvergelijking. Indien de functie echter meerdere variabelen heeft, wordt er gesproken over partiële differentiaalvergelijkingen ([1], [3], [10]).

Definitie 2.18.

Een partiële differentiaalvergelijking van orde m ($\in \mathbb{N}$) is een uitdrukking van de vorm

$$F(\mathbf{x}, D^{(m,0,\dots,0)}u, \dots, D^\alpha u, \dots, D^{(0,\dots,0)}u) = 0,$$

met $\mathbf{x} \in \Omega$ en $|\alpha| \leq m$.

Een partiële differentiaalvergelijking kan op verschillende manieren geclassificeerd worden. De eerste classificatie is volgens zijn orde $m \in \mathbb{N}$. De tweede soort classificatie is volgens lineariteit.

Definitie 2.19.

Een partiële differentiaalvergelijking is lineair indien deze van volgende vorm is voor $\mathbf{x} \in \Omega$:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u = f(\mathbf{x}),$$

met andere woorden, indien alle coëfficiënten onafhankelijk zijn van de onbekende functie u .

Een partiële differentiaalvergelijking is semilineair indien deze van volgende vorm is voor $\mathbf{x} \in \Omega$ en $|\beta| \leq m - 1$:

$$F(\mathbf{x}, D^\beta u) \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u = f(\mathbf{x}),$$

met andere woorden, indien de hoogste orde coëfficiënten onafhankelijk zijn van de onbekende functie u .

Een partiële differentiaalvergelijking is quasilineair indien deze van volgende vorm is voor $\mathbf{x} \in \Omega$ en $|\beta| \leq m - 1$:

$$F(\mathbf{x}, D^\beta u) \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(\mathbf{x}, D^\beta u) D^\alpha u = f(\mathbf{x}),$$

met andere woorden, indien de hoogste orde coëfficiënten afhankelijk zijn van de onbekende functie u en zijn afgeleiden tot zijn orde m , maar niet van de m -de afgeleide van u .

Een partiële differentiaalvergelijking is volledig niet lineair indien deze van volgende vorm is voor $\mathbf{x} \in \Omega$ en $|\beta| \leq m$:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\mathbf{x}, D^\beta u) D^\alpha u = f(\mathbf{x}),$$

met andere woorden, indien de hoogste orde coëfficiënten afhankelijk zijn van de onbekende functie u en zijn afgeleiden tot en met de m -de orde.

Indien de partiële differentiaalvergelijking in $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ semilineair is en van de tweede orde, i.e. $m = 2$ in Definitie 2.18, kan de vergelijking als volgt worden geschreven:

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}, u) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (1)$$

waarbij a_{ij}, b_i, c en f functies zijn van Ω naar \mathbb{R} .

Definitie 2.20. Een partiële differentiaalvergelijking (1)

- is homogeen indien $f = 0$.
- is niet-homogeen indien $f \neq 0$.
- heeft constante coëfficiënten indien a_{ij}, b_i en c constanten zijn.

De hoogste graadsterm van van dergelijke partiële differentiaalvergelijkingen is dan:

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}.$$

De coëfficiënten van deze term zijn te bundelen tot een matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots d}$ waarvan de eigenwaarden λ_i voor $i = 1, \dots, d$, het karakter van de differentiaalvergelijking bepalen.

Definitie 2.21. Een partiële differentiaalvergelijking (1) is

- parabolisch indien $\exists i \in \{1, \dots, d\} : \lambda_i = 0$
- elliptisch indien $\forall i \in \{1, \dots, d\} : \lambda_i \neq 0$ en ze hebben allemaal hetzelfde teken
- hyperbolisch indien $\forall i \in \{1, \dots, d\} : \lambda_i \neq 0$ en ze hebben allemaal hetzelfde teken op één eigenwaarde na.

Partiële differentiaalvergelijkingen worden meestal gebruikt als wiskundig model om fysische systemen te beschrijven. Elke symmetrie of behoudswet uit de fysica of uit de mechanica kan namelijk gemakkelijk met behulp van een wiskundige gelijkheid beschreven worden. Een wiskundig probleem zal echter, naast de partiële differentiaalvergelijking, ook bestaan uit enkele vergelijkingen die de begin- en randcondities van het systeem beschrijven. Deze dragen namelijk bij tot het goed gedefinieerd zijn van het wiskundige probleem.

2.2.1 Randcondities

Er bestaan verschillende soorten randcondities. Hieronder worden de drie meest bekende gegeven.

Definitie 2.22.

Een Dirichlet-randconditie legt een voorwaarde op welke waarde de functie uit de partiële differentiaalvergelijking aanneemt op de rand van het domein.

Een Neumann-randconditie legt een voorwaarde op welke waarde de normale afgeleide van de functie uit de partiële differentiaalvergelijking aanneemt op de rand van het domein.

Een Robin-randconditie legt een voorwaarde op welke waarde een welbepaalde lineaire combinatie van de functie uit de partiële differentiaalvergelijking en zijn normale afgeleide ervan aanneemt op de rand van het domein. Deze laatste conditie wordt ook wel de Newton- of Cauchy-randconditie genoemd.

Het is mogelijk dat al deze drie randcondities tegelijkertijd voorkomen in een wiskundig probleem. In dat geval is de rand op te splitsen in verschillende deelranden, welke onderling disjunct zijn.

Definitie 2.23.

Een begin-voorwaarde komt overeen met een Dirichlet-randvoorwaarde, maar in plaats van de rand van het ruimtelijke domein Ω te beschouwen, wordt deze van het tijdsdomein beschouwd. De voorwaarde beschijft dus de staat van het tijdsafhankelijk systeem op tijdstip $t = 0$.

Definitie 2.24.

Een wiskundig probleem is goed gedefinieerd in de betekenis van Hadamard indien deze voldoet aan volgende voorwaarden:

- *er bestaat een oplossing*
- *de oplossing is uniek*
- *de oplossing is continu afhankelijk van de gekende data (rand-en beginvoorwaarden, coëfficiënten, ...).*

Het nagaan van goed gedefinieerdheid van een wiskundig probleem is vaak erg moeilijk en tot nu toe bestaat er nog geen algemene theorie. Dit komt vooral door de grote variatie aan problemen waardoor elk probleem telkens op zich moet worden beschouwd met behulp van verschillende bestaande strategieën. Vooral inverse problemen lijken een uitdaging te vormen in de wiskundige analyse.

Definitie 2.25.

Een invers probleem is een wiskundig probleem waarbij de onderzoeker op zoek is naar de modelparameters \mathbf{m} zodanig dat

$$\mathbf{d} = G(\mathbf{m}),$$

waarbij G een operator is die de expliciete relatie beschijft tussen de modelparameters en de gekende data \mathbf{d} . Dergelijke systemen worden vaak ook achterwaartse problemen genoemd.

Een voorwaarts probleem is een wiskundig probleem waarbij de onderzoeker de dataparameters probeert te voorspellen aan de hand van gekende modelparameters.

De uitdaging van inverse problemen ligt in het feit dat bepaalde modelparameters \mathbf{m} onbekend zijn waardoor deze met behulp van een extra meting moeten berekend worden. Daarenboven is het vinden van de klassieke oplossing vaak onmogelijk omdat deze veel te sterke eisen oplegt op de onbekende functie uit de partiële differentiaalvergelijking. Hierdoor wordt er meestal overgegaan naar het variationele kader waarbij de partiële differentiaalvergelijking wordt getransformeerd naar een variationele formulering. Dit betekent dat in plaats van te zoeken naar een oplossing in een ruimte V , er gezocht wordt naar een oplossing van een vergelijking uit de duale ruimte V^* . Dit wordt eenvoudig bekomen door de vergelijking eerst te vermenigvuldigen met een testfunctie φ en daarna te integreren over het domein Ω zodat de stelling van Green kan worden toegepast. Het feit dat dergelijke gelijkheid dan overeenkomt met een vergelijking uit de duale ruimte volgt uit de Riesz-representatiestelling, zie Stelling 2.1.

Veronderstel dat de partiële differentiaalvergelijking die onderzocht moet worden, te schrijven is als $Au = f$. Hierbij is A een lineaire differentiaaloperator van de tweede orde en f is een continue functie. De oplossing van de vergelijking in deze vorm wordt een sterke oplossing genoemd. Door overgang naar het variationele kader wordt deze vorm omgezet naar een vergelijking van de vorm $a(u, \varphi) = (f, \varphi)$. Hierbij stelt $a(\cdot, \cdot)$ een bilineaire vorm voor die geassocieerd is met de operator A . De oplossing voor de nieuwe vergelijking wordt zwak genoemd.

Definitie 2.26.

Een element $u \in V$ wordt een zwakke oplossing genoemd voor het probleem (V, a, f) indien voor alle $\varphi \in V$ geldt dat:

$$a(u, \varphi) = (f, \varphi)$$

Doordat de vergelijking nu omgezet is naar een variationele formulering, is het mogelijk om de stelling van Lax-Milgram toe te passen. Deze stelling verzekert het bestaan en de uniciteit van een zwakke oplossing. Het bewijs van deze stelling is terug te vinden in [11].

Stelling 2.6 (Lax-Milgram).

Als V een Hilbertruimte,
 $a(\cdot, \cdot)$ een continue bilinaire vorm is die V -elliptisch is in V en
de functie f uit het (V, a, f) -probleem is afkomstig van V^* ,
dan bestaat er een unieke zwakke oplossing voor het (V, a, f) -probleem.

2.2.2 Galerkin benadering

Ondanks het feit dat de stelling van Lax-Milgram kan gebruikt worden, blijft het vaak een probleem om de exacte zwakke oplossing te vinden. Dit komt vooral doordat de Hilbertruimte V waartoe de oplossing behoort, oneindig-dimensionaal is. Daarom is het aangewezen om een benaderende oplossing te zoeken. De ruimte V wordt vervangen door eindig-dimensionale deelruimte $V_h \subset V$, waarin de benaderende oplossing u_h wordt gezocht voor de exacte zwakke oplossing u .

De index $h \in]0, 1]$ van de ruimte V_h komt overeen met de kwaliteit van de benadering van V door V_h . Hoe dichter h bij 0, hoe beter de benadering van V door V_h . Merk op dat $V_h \subset V$ waardoor alle eigenschappen van de bilineaire vorm a van V geldig blijven in de deelruimte V_h . Indien dus de stelling van Lax-Milgram geldt in de ruimte V impliceert dit dat deze stelling ook geldt in de deelruimte V_h .

Definitie 2.27.

Een element $u_h \in V_h$ wordt een Galerkin benadering genoemd van de oplossing u voor het probleem (V, a, f) indien voor alle $\varphi_h \in V_h$ geldt dat:

$$a(u_h, \varphi_h) = (f, \varphi_h),$$

in andere woorden, komt de Galerkin benadering overeen met de oplossing van het benaderende probleem (V_h, a, f) .

Doordat de ruimte eindig-dimensionaal is, is het nu mogelijk het probleem om te zetten naar een algebraïsch systeem die oplosbaar is met behulp van wiskundige computerprogramma's zoals Matlab of FEniCS. Stel namelijk dat $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ de basisfuncties zijn van de deelruimte V_h . Het zoeken naar de Galerkin benadering u_h komt dan overeen met het zoeken naar de coëfficiënten c_i voor $i = 1, \dots, n$ waarvoor:

$$u_h = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i.$$

Deze identiteit kan gesubstitueerd worden in het probleem (V_h, a, f) . Op basis van de eigenschappen van de bilineaire vorm a volgt:

$$\sum_{i=1}^n c_i a(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j),$$

welke overeenkomt met een algebraïsch systeem $M\mathbf{c} = \mathbf{F}$ met $\mathbf{F} = ((f, \varphi_1), \dots, (f, \varphi_n))^T$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ en

$$M = \begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_1, \varphi_n) \\ a(\varphi_2, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_2, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_n, \varphi_1) & a(\varphi_n, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

Dit algebraïsch systeem kent een oplossing indien de matrix M positief-definiet is, welke volgt uit het V -elliptisch zijn van de bilineaire vorm a . Het positief-definiet zijn van een matrix betekent namelijk dat $\beta^T M \beta > 0$ moet zijn en er geldt, indien $a(\cdot, \cdot)$ V -elliptisch is, dat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_m} a\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi_j\right) &= \frac{1}{C_m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a(\varphi_i, \varphi_j) \\ &= \frac{1}{C_m} \beta^T M \beta \\ &\geq \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i \right\|^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Het benaderen van de ruimte V door een deelruimte V_h heeft natuurlijk gevolgen op de benadering van de exacte oplossing u door de Galerkin benadering u_h . Met behulp van Cea's lemma is het echter duidelijk dat de benadering niet slechter presteert dan wanneer de oplossingsfunctie uit de ruimte V_h zelf zou komen, op een constante na. De stelling geeft namelijk de benaderingsfout weer tussen de oplossing u en zijn benaderende functie u_h . Het bewijs ervan is terug te vinden in [11].

Stelling 2.7 (Cea's lemma).

Als u de oplossing is van het (V, a, f) -probleem en u_h de oplossing is van het (V_h, a, f) -probleem, dan $\exists C > 0 : \|u - u_h\| \leq C \inf_{v \in V_h} \|u - v\|$.

Merk op dat de constante uit Cea's lemma onafhankelijk is van de ruimte V_h . Hierdoor is het toegelaten om verschillende deelruimtes $V_h \subset V$ te beschouwen om de Galerkin benadering te berekenen. Bij deze kan een rij $\{V_h\}_h$ van eindig-dimensionale deelruimten van V beschouwd worden.

Definitie 2.28.

De rij van Galerkin benaderingen $(u_h)_h$ convergeert naar de oplossing $u \in V$ voor het (V, a, f) -probleem indien

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0.$$

Uit Cea's lemma volgt dus dat een rij van eindig-dimensionale deelruimten V_h van V geconstrueerd moet worden waar $\forall u \in V$ geldt dat:

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\| \rightarrow 0 \quad \text{voor } h \rightarrow 0.$$

Hierdoor zal de rij van Galerkin benaderingen convergeren naar de unieke zwakke oplossing u van het probleem.

2.2.3 Eindige elementenmethode

Ondanks het gebruik van de Galerkin benadering, kan het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen nog steeds voor computationele uitdagingen zorgen. Vooral de keuze van de deelruimte V_h maakt het zoeken naar een oplossing nogal complex omdat deze zo goed mogelijk moeten voldoen bepaalde voorwaarden.

- Het lokale karakter van de basisfuncties φ_i , i.e. zijn drager, moet zo klein mogelijk zijn.
- De basis $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ moet een zo goed mogelijke benadering zijn van de volledige basis.
- De regulariteit van de basisfuncties bepalen de regulariteit van de benaderende oplossing, waardoor het aangewezen is om de regulariteit van de basisfuncties zo dicht mogelijk bij deze van de oplossing te laten aanleunen.

De eindige elementenmethode is een dergelijke numerieke toenadering die zoveel mogelijk met deze voorwaarden rekening houdt. Het bouwt een nauwkeurig numeriek benaderingsschema op zodat er zowel kwalitatieve als kwantitatieve informatie kan gevonden worden over de exacte oplossing. Het basisprincipe achter deze methode om dergelijke deelruimtes V_h te constueren, is het discretiseren van het domein Ω . Het domein Ω zal als het ware worden opgesplitst in onderling disjuncte deeldomeinen Ω_i voor $i = 1, \dots, n$, i.e. $\Omega_i \cap \Omega_j = \Omega_i \delta_{ij}$, waarvoor geldt dat:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n \overline{\Omega}_i.$$

Op elk van deze deeldomeinen zal de exacte oplossing u benaderd worden met behulp van gladde functies. De keuze van gladde functies is afhankelijk van de gewenste regulariteit voor de exacte oplossing u . Om het principe van de eindige elementenmethode iets meer te verduidelijken, zal deze methode voor $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ verder worden uitgediept.

Doordat het domein Ω 1-dimensionaal is, komt het opsplitsen van Ω overeen met het opsplitsen van een interval in n deelintervallen:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

waarbij $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$ voor $i = 1, \dots, n$. Stel $P_k(\Omega_i)$ is de verzameling van alle polynomen van de orde k over Ω_i , dan kan de deelruimte V_h gedefinieerd worden als de verzameling $V_h^{m,k}$:

$$V_h^{m,k} = \{\varphi \in C^m(\bar{\Omega}) \mid \varphi|_{\Omega_i} \in P_k(\Omega_i), i = 1, \dots, n\},$$

voor $m \in \mathbb{N}$. Dit betekent dat de basisfuncties continu zijn tot en met hun m -de afgeleide over heel het domein Ω en dat de basisfuncties op het deeldomein Ω_i polynomen zijn van de orde k . Indien $m = 0$, worden de functies uit de verzameling $V_h^{0,k}$ Lagrange polynomen genoemd van de orde k . Indien $m > 0$, wordt er eerder over Hermit polynomen gesproken.

Een voorbeeld van dergelijke ruimte is $V_h^{0,1}$, de verzameling van de eerste orde Lagrange polynomen. Deze verzameling bestaat uit stuksgewijs lineaire functies die continu zijn over het volledige Ω .

Stelling 2.8.

De ruimte $V_h^{0,1}$ is eindig dimensionaal. De basisfuncties $\varphi_i \in V^{0,1}$ voor $i = 1, \dots, n$ zijn als volgt te definiëren:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i} & x \in \Omega_i \\ 1 - \frac{x - x_i}{h_i} & x \in \Omega_{i+1} \\ 0 & x \notin \Omega_i \cup \Omega_{i+1}, \end{cases}$$

waarbij $h_i = |\Omega_i| = x_i - x_{i-1}$. De basisfuncties voldoen aan $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ voor alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Het bewijs is terug te vinden in [10]. Met behulp van dergelijke ruimte $V_h^{m,k}$ is het mogelijk om de Galerkin benadering u_h te berekenen als benaderende oplossing voor de exacte oplossing u voor het (V, a, f) -probleem. Merk op dat uit de definitie van de basisfuncties duidelijk is dat $V_h^{0,1} \subset H^1(\Omega)$.

In de bijlage worden enkele handige hulpstellingen en ongelijkheden opgesomd die doorheen de thesis zullen gebruikt worden.

3 Probleemstelling

In dit hoofdstuk wordt het op te lossen probleem voorgesteld. Daarnaast zal ook een praktisch kader worden beschreven waarbij dit theoretisch probleem zich voordoet.

Beschouw het volgende semilineair parabolisch systeem:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (K \star u)(t) = \int_0^t f(u(s)) ds & \text{in } \Omega \times]0, T], \\ -\nabla u \cdot \mathbf{n} = g & \text{op } \Gamma \times]0, T], \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Hierbij wordt er verondersteld dat het domein Ω een begrensd, Lipschitz-domein is in \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. De rand van dit domein wordt voorgesteld door Γ . Het tijdsinterval is $[0, T]$ met $T > 0$. Daarnaast bevat het systeem volgende data-functies:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $g : \Gamma \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$
- $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

De functie K is enkel tijdsafhankelijk, maar is in het huidige systeem, net zoals de functie $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, een onbekende functie. Hierdoor is een extra globale meting nodig om K te kunnen bepalen. Deze globale meting is als volgt:

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = m(t), \quad (3)$$

waarbij de functie $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Het doel van deze thesis is het vinden van het oplossingskoppel (u, K) voor het semilineair parabolisch systeem (2) met bijhorende meting (3). Merk op dat het symbool “ \star ”, het convolutieproduct voorstelt. Dit betekent dat de term $(K \star u)(t)$ ook als volgt kan geschreven worden:

$$(K \star u)(t) = \int_0^t K(t-s)u(\mathbf{x}, s) ds \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T],$$

vandaar dat de functie K , de convolutiekern van het probleem zal worden genoemd.

Dit systeem beschrijft bijvoorbeeld de verontreiniging van een verzadigde bodem. Een fabriek of een vuilnisbelt kan een lekkage hebben van vervuilende stoffen. Deze stoffen komen met behulp van regenwater terecht in de bodem. Dit soort water wordt percolaatwater genoemd en bevat meestal zware metalen en chemische verbindingen die het milieu kunnen aantasten. Het percolaatwater sijpelt verder door tot in het grondwater waardoor milieuverontreiniging wordt veroorzaakt [12].

Het doorsijpelen van het percolaatwater wordt beschreven aan de hand van volgende differentiaal vergelijking [13]:

$$\partial_t C + \nabla \cdot (\mathbf{V}C) - \Delta C = \frac{-\rho_b}{n} \partial_t S.$$

Hierbij stelt C de waterige concentratie voor van het percolaatwater en S de opgenomen concentratie van de vervuilende vaste stoffen. De bijhorende constanten stellen het volgende voor:

- \mathbf{V} : de snelheid van het grondwater
- ρ_b : de massadichtheid van de watervoerende ondergrond
- n : de poreusheid van de watervoerende ondergrond

Bij deze, stelt het rechterlid uit de vergelijking, de snelheid van verlies aan verontreinigde stof voor door de fabriek of vuilnisbelt die wordt opgenomen door de ondergrond. Deze hoeveelheid is gelijk aan de hoeveelheid vervuilende stof die wegsijpelt onder de vorm van percolaatwater, richting grondwater. Hierbij kan $\partial_t S$ wiskundig beschreven worden als:

$$\partial_t S = K_r(K_d C - S),$$

waarbij K_r de snelheid van de vrijkomende stof voorstelt en K_d de evenwichtscoefficiënt van de verspreiding. De bovenstaande vergelijking kan analytisch opgelost worden tot:

$$S(t) = e^{K_r t} S_0 + K_r K_d \int_0^t e^{-K_r(t-\xi)} C(\xi) d\xi.$$

Hierdoor kan de vergelijking voor C herschreven worden tot:

$$\partial_t C + \nabla \cdot (\mathbf{V}C) - \Delta C = \frac{-\rho_b}{n} K_r K_d C + \frac{\rho_b}{n} K_r S_0 e^{K_r t} - \int_0^t \frac{-\rho_b}{n} K_r^2 K_d e^{-K_r(t-\xi)} C(\xi) d\xi.$$

Veronderstel nu dat het grondwater waar het percolaatwater naartoe sijpelt stil staat, i.e. $\mathbf{V} = 0$, en dat de bodem bij start van het onderzoek nog niet verontreinigd is, i.e. $S_0 = 0$. Dan kan het linkerlid van systeem (2) worden bekomen door $C = u$ en $K(t) = \frac{-\rho_b}{n} K_r^2 K_d e^{-K_r t}$. Het rechterlid wordt verondersteld een integraal naar de tijd te zijn met integrandum afhankelijk van C . Deze veronderstelling wordt gemaakt zodat later in dit project, een formule kan worden bekomen voor de onbekende convolutiekern $K(t)$ waarbij het rechterlid onafhankelijk blijft van de tijdsafgeleide van de functie C .

4 Analyse van het probleem

In dit hoofdstuk zal het bestaan en de uniciteit van de zwakke oplossing $\langle u, K \rangle$ worden onderzocht met behulp van Rothe-methode. Daarnaast zullen er bijhorende foutenschattingen worden opgesteld voor de tijdsdiscretisatie.

4.1 Opstellen van de variationele formulering

Beschouw de eerste vergelijking uit het systeem (2):

$$\partial_t u - \Delta u + (K \star u)(t) = \int_0^t f(u(s)) ds.$$

De oplossing $u(t)$ van dergelijke vergelijking, indien deze bestaat, is een functie die behoort tot $C^2(\Omega)$ en wordt een klassieke oplossing genoemd. In vele toepassingen bestaat de klassieke oplossing echter niet. In dat geval, wordt er vaak overgegaan naar het variationele kader. Hierbij wordt de vergelijking omgezet naar een vergelijking in de duale ruimte. Dit gebeurt door beide leden eerst te vermenigvuldigen met een testfunctie $\varphi \in L_2(\Omega)$ en daarna te integreren over het domein Ω . De vergelijking wordt als volgt:

$$\int_{\Omega} \partial_t u \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \Delta u \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (K \star u)(t) \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_0^t f(u(s)) ds \, \varphi \, d\mathbf{x}.$$

Indien de notatie (\cdot, \cdot) gebruikt wordt voor het inwendig product in $L_2(\Omega)$, met andere woorden voor de bewerking $(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, dan wordt de vergelijking als volgt:

$$(\partial_t u, \varphi) - (\Delta u, \varphi) + ((K \star u)(t), \varphi) = \left(\int_0^t f(u(s)) ds, \varphi \right).$$

Nu behoort de oplossing $u(t)$ voor elk tijdstip tot $H^2(\Omega)$. De regulariteit van de oplossing kan echter verlaagd worden met behulp van de stelling van Green, zie Stelling 2.5. Het gevolg, de kost voor het toepassen van deze stelling is het opleggen van een hogere regulariteit op de testfunctie, met name dat φ tot $H^1(\Omega)$ moet behoren. Na het toepassen van de stelling van Green, wordt de volgende vergelijking bekomen:

$$(\partial_t u, \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) - (\nabla u \cdot \mathbf{n}, \varphi)_{\Gamma} + ((K \star u)(t), \varphi) = \left(\int_0^t f(u(s)) ds, \varphi \right).$$

Hierbij staat de notatie $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ voor de bewerking $\int_{\Gamma} \cdot \, d\mathbf{x}$. De oplossing $u(t)$ van deze vergelijking wordt de zwakke of variationele oplossing genoemd en behoort tot $H^1(\Omega)$.

De bovenstaande vergelijking kan vereenvoudigd worden met behulp van de tweede vergelijking uit het systeem (2):

$$(\partial_t u, \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) + ((K \star u)(t), \varphi) = \left(\int_0^t f(u(s)) ds, \varphi \right) - (g, \varphi)_{\Gamma}. \quad (4)$$

De variationele formulering, hierboven vermeld, bevat nog steeds de onbekende convolutiekern. Om deze extra parameter te kunnen berekenen, wordt de globale meting (3) geïntroduceerd. Om dit te bereiken, wordt de testfunctie φ in de variationele vergelijking (4) gelijk gesteld aan de constante functie met waarde 1, i.e.

$$(\partial_t u, 1) + (\nabla u, \nabla 1) + ((K \star u)(t), 1) = \left(\int_0^t f(u(s)) ds, 1 \right) - (g, 1)_\Gamma.$$

Hierbij gelden de volgende gelijkheden:

- $(\partial_t u, 1) = \int_\Omega \partial_t u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$
 $= \partial_t \left\{ \int_\Omega u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right\}$
 $= \partial_t \{m(t)\} \quad \text{wegens (3)}$
 $= m'(t) \quad \text{indien } m \in C^1([0, T])$
- $(\nabla u, \nabla 1) = 0$
- $((K \star u)(t), 1) = \int_\Omega \int_0^t K(t-s) u(\mathbf{x}, s) ds d\mathbf{x}$
 $= \int_0^t K(t-s) \int_\Omega u(\mathbf{x}, s) d\mathbf{x} ds$
 $= \int_0^t K(t-s) m(s) ds \quad \text{wegens (3)}$
 $= (K \star m)(t)$

Dus, door $\varphi = 1$ te stellen, kan de volgende vergelijking worden neergeschreven:

$$K \star m = \left(\int_0^t f(u(s)) ds, 1 \right) - (g, 1)_\Gamma - m' \quad (5)$$

Deze vergelijking is echter niet praktisch om de convolutiekern uit op te lossen. Daarom zal deze vergelijking worden afgeleid naar de tijd zodat de convolutie in het linkerlid wordt vereenvoudigd. Alvorens dit te doen, wordt er eerst een lemma gegeven dat hierbij gebruikt zal worden.

Lemma 4.1.

Als $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; meetbare functies

b is afleidbaar,

dan geldt $(a \star b)'(t) = a(t)b(0) + (a \star b')(t)$

Bewijs. Uit de definitie van het convolutieproduct en de kettingregel volgt het te bewijzen:

$$\begin{aligned} (a \star b)'(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t a(s)b(t-s) ds \right\} \\ &= a(s)b(t-s)|_{s=t} + \int_0^t a(s) \frac{d}{dt} \{b(t-s)\} ds \\ &= a(t)b(0) + \int_0^t a(s)b'(t-s) ds \\ &= a(t)b(0) + (a \star b)'(t) \end{aligned}$$

□

Gebruikmakend van Lemma 4.1, wordt een variationele formulering bekomen voor de convolutie-kern.

- $(K \star m)'(t) = K(t)m_0 + (K \star m')(t)$ wegens Lemma 4.1
- $(\int_0^t f(u(\mathbf{x}, s)) ds, 1)' = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^t f(u(\mathbf{x}, s)) ds d\mathbf{x}$
 $= \int_{\Omega} f(u(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}$
- $(g, 1)'_{\Gamma} = \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} g(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$
 $= \int_{\Gamma} \partial_t g(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ op voorwaarde dat $g \in C^1((0, T), L_2(\Gamma))$

Merk op dat de laatste gelijkheid ook geldt indien $\partial_t g \in C([0, T], L_2(\Gamma))$. Deze voorwaarde is zwakker dan de beperking $g \in C^1((0, T), L_2(\Gamma))$. Omdat g echter een data-functie, zal voor de eenvoud de sterkere voorwaarde $g \in C^1((0, T), L_2(\Gamma))$ worden opgelegd. De variationele formulering (5) is als volgt te herschrijven:

$$K(t)m_0 + (K \star m')(t) = \int_{\Omega} f(u(t)) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \partial_t g d\mathbf{x} - m''(t), \quad (6)$$

op voorwaarde dat $m \in C^2([0, T])$, $m_0 \neq 0$ en $g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma))$.

Door gebruik van de globale meting, werd het invers probleem (2) omgezet naar een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden, namelijk u en K . Het doel deze thesis wordt daarbij omgevormd tot het zoeken van de zwakke oplossing $\langle u, K \rangle$ voor het direct probleem:

$$\begin{cases} K(t)m_0 + (K \star m')(t) = \int_{\Omega} f(u(t)) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \partial_t g d\mathbf{x} - m''(t) \\ (\partial_t u, \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) + ((K \star u)(t), \varphi) = (\int_0^t f(u(s)) ds, \varphi) - (g, \varphi)_{\Gamma}, \end{cases} \quad (7)$$

waarbij minstens geldt dat:

$$\begin{cases} m \in C^2([0, T]) \text{ en } m_0 \neq 0 \\ g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma)) \end{cases}$$

Merk op dat deze voorwaarden doorheen de thesis zullen versterkt worden opdat de oplossing zou bestaan en uniek zou zijn.

4.2 Stabiliteitsanalyse

Nu de variationele formulering van het probleem is opgesteld, kunnen de eerste stellingen in verband met de stabiliteit van het probleem bewezen worden.

Stelling 4.1.

Als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continu en begrensd is,
 $g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma))$ en
 $m \in C^2([0, T])$ met $m_0 \neq 0$,
 dan geldt dat $\forall t \in [0, T], \exists C > 0 : |K(t)| \leq C$.

Bewijs. Beschouw de variariële formulering (6):

$$K(t) = \frac{1}{m_0} \left\{ \int_{\Omega} f(u(t)) - \int_{\Gamma} \partial_t g - m'' - (K \star m') \right\}$$

want $m_0 \neq 0$

Neem de absolute waarde van beide leden en vergroot opnieuw het rechterlid met behulp van onder andere de driehoeksregel.

$$\begin{aligned} |K(t)| &\leq C \left\{ \int_{\Omega} |f(u(t))| + \int_{\Gamma} |\partial_t g| + |m''| \right\} + C \int_0^t |K(s)| |m'(t-s)| ds \\ &\leq C \left\{ \int_{\Omega} |f(u(t))| + \int_{\Gamma} |\partial_t g| + C \right\} + C \int_0^t |K(s)| ds \\ &\quad \text{want } m \in C^2([0, T]) \\ &\leq C \left\{ \int_{\Omega} |f(u(t))| + C \right\} + C \int_0^t |K(s)| ds \\ &\quad \text{want } \partial_t g \in C([0, T], L_2(\Gamma)) \Rightarrow \int_{\Gamma} |\partial_t g| \leq C |\Gamma| \leq C \\ &\leq C + C \int_0^t |K(s)| ds \\ &\quad \text{want } f \text{ is continu en begrensd} \Rightarrow \int_{\Omega} |f(u(t))| \leq C |\Omega| \leq C \end{aligned}$$

Pas nu Grönwall (zie stelling B.8) toe om het gevraagde te bekomen:

$$|K(t)| \leq C e^{tC} \leq C.$$

□

Merk op dat de constante in bovenstaande stelling afhankelijk is van het gekozen tijdstip $t \in [0, T]$. Vooraleer de stabiliteitsanalyse van de oplossingsfunctie u wordt bewezen, worden er enkele eigenschappen aangetoond.

Lemma 4.2.

Als $G \in L_2(0, T)$,
 dan geldt $\forall v, w \in L_2((0, T); L_2(\Omega)), \exists \varepsilon > 0, \exists C_{\varepsilon} > 0 :$

$$\left| \int_0^{\eta} (G \star v, w) dt \right| \leq \varepsilon \int_0^{\eta} \|w\|^2 dt + C_{\varepsilon} \int_0^{\eta} \int_0^t \|v(s)\|^2 ds dt.$$

Bewijs. Uit het toepassen van Cauchy-Schwartz en Young volgt het te bewijzen.

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\eta (G \star v, w) dt \right| &\leq \int_0^\eta \|G \star v\| \|w\| dt \\
&\text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
&\leq \varepsilon \int_0^\eta \|w\|^2 dt + C_\varepsilon \int_0^\eta \|G \star v\|^2 dt \\
&\text{wegens Young} \\
&\leq \varepsilon \int_0^\eta \|w\|^2 dt + C_\varepsilon \int_0^\eta \int_\Omega \left\{ \int_0^t |G(t-s)| |v(\mathbf{x}, s)| ds \right\}^2 d\mathbf{x} dt \\
&\leq \varepsilon \int_0^\eta \|w\|^2 dt \\
&\quad + C_\varepsilon \int_0^\eta \int_\Omega \left\{ \int_0^t |G(t-s)|^2 ds \right\} \left\{ \int_0^t |v(\mathbf{x}, s)|^2 ds \right\} d\mathbf{x} dt \\
&\text{wegens Cauchy-Schwartz voor integralen} \\
&\leq \varepsilon \int_0^\eta \|w\|^2 dt + C_\varepsilon \int_0^\eta \int_\Omega C \left\{ \int_0^t |v(\mathbf{x}, s)|^2 ds \right\} d\mathbf{x} dt \\
&\text{want } G \in L_2(0, T) \\
&\leq \varepsilon \int_0^\eta \|w\|^2 dt + C_\varepsilon \int_0^\eta \int_0^t \|v(s)\|^2 ds dt
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.3.

Als $v : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

$\partial_t v \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$

$v_0 := v(\cdot, 0) \in L_2(\Omega)$,

dan geldt $\forall \mathbf{x} \in \Omega : \|v(\mathbf{x}, t)\|^2 \leq C \{ \|v_0\|^2 + \int_0^t \|\partial_t v(\mathbf{x}, s)\|^2 ds \}$

Bewijs. Neem willekeurige $\mathbf{x} \in \Omega$ en beschouw de hoofdeigenschap van de integralen:

$$\begin{aligned}
v(\mathbf{x}, t) - v(\mathbf{x}, 0) &= \int_0^t \partial_t v(\mathbf{x}, s) ds \\
\Leftrightarrow v(\mathbf{x}, t) &= v_0 + \int_0^t \partial_t v(\mathbf{x}, s) ds \\
\Leftrightarrow v^2(\mathbf{x}, t) &= \left(v_0 + \int_0^t \partial_t v(\mathbf{x}, s) ds \right)^2 \\
&\leq 2v_0^2 + 2 \left(\int_0^t \partial_t v(\mathbf{x}, s) ds \right)^2 \\
&\text{wegens Minkowski} \\
&\leq 2v_0^2 + 2 \left\{ \int_0^t |\partial_t v(s)|^2 ds \right\} \left\{ \int_0^t |1|^2 ds \right\} \\
&\text{wegens Hölder} \\
&\leq 2v_0^2 + 2t \int_0^t |\partial_t v(s)|^2 ds \\
\Leftrightarrow \int_\Omega v^2(t) d\mathbf{x} &\leq \int_\Omega 2v_0^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega 2t \int_0^t |\partial_t v(s)|^2 ds d\mathbf{x} \\
\Leftrightarrow \|v(t)\|^2 &\leq 2 \|v_0\|^2 + 2T \int_0^t \|\partial_t v(s)\|^2 ds \\
&\leq C \{ \|v_0\|^2 + \int_0^t \|\partial_t v(s)\|^2 ds \}
\end{aligned}$$

□

Alle nodige lemma's zijn nu beschikbaar om de stabiliteitsanalyse van de oplossingsfunctie u te kunnen uitvoeren.

Stelling 4.2.

Als alle voorwaarden van stelling 4.1 zijn voldaan en

$$u_0 \in L_2(\Omega),$$

dan geldt dat $\exists C > 0 : \max_{\eta \in [0, T]} \|u(\eta)\|^2 + \int_0^T \|\nabla u\|^2 dt \leq C$.

Bewijs. Beschouw de variacionele formulering (4) en stel $\varphi = u$:

$$\begin{aligned} (\partial_t u, u) + (\nabla u, \nabla u) &= \left(\int_0^t f(u(s)) ds, u \right) - (g, u)_\Gamma - (K \star u, u) \\ \Leftrightarrow \int_0^\eta (\partial_t u, u) + (\nabla u, \nabla u) dt & \\ &\leq \left| \int_0^\eta \left(\int_0^t f(u(s)) ds, u \right) - (g, u)_\Gamma - (K \star u, u) dt \right| \\ \Leftrightarrow \int_0^\eta (\partial_t u, u) dt + \int_0^\eta \|\nabla u\|^2 dt & \\ &\leq \left| \int_0^\eta \left(\int_0^t f(u(s)) ds, u \right) dt \right| + \left| \int_0^\eta (g, u)_\Gamma dt \right| + \left| \int_0^\eta (K \star u, u) dt \right| \end{aligned}$$

Hierbij gelden volgende ongelijkheden:

- $$\begin{aligned} \int_0^\eta (\partial_t u, u) dt &= \int_0^\eta \int_\Omega \partial_t u(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2} \int_0^\eta \partial_t (u^2(\mathbf{x}, t)) dt d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega u^2(\mathbf{x}, \eta) - u^2(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \|u(\eta)\|^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|^2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \left| \int_0^\eta \left(\int_0^t f(u(s)) ds, u \right) dt \right| &\leq \int_0^\eta \int_\Omega \left(\int_0^T |f(u(s))| ds \right) |u(\mathbf{x}, t)| d\mathbf{x} dt \\ &\leq CT \int_0^\eta \int_\Omega |u(\mathbf{x}, t)| d\mathbf{x} dt \\ &\quad \text{want } f \text{ is begrensd} \\ &\leq CT |\Omega| \int_0^\eta \|u(t)\| dt \\ &\quad \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\ &\leq C \sqrt{\int_0^\eta \|u(t)\|^2 dt} \sqrt{\int_0^\eta 1^2 dt} \\ &\quad \text{wegens Hölder} \\ &\leq C \int_0^\eta \|u\|^2 + C \\ &\quad \text{wegens Young} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad & \left| \int_0^\eta (g, u)_\Gamma dt \right| \leq \int_0^\eta \|g\|_\Gamma \|u\|_\Gamma dt \\
& \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
& \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \|g\|_\Gamma^2 dt + \varepsilon \int_0^\eta \|u\|_\Gamma^2 dt \\
& \text{wegens Young} \\
& \leq C_\varepsilon + \varepsilon \int_0^\eta \|u\|_\Gamma^2 dt \\
& \text{want } g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma)) \\
& \leq C_\varepsilon + \varepsilon \int_0^\eta \{\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2\} dt \\
& \text{wegens de spoorstelling} \\
& \leq C_\varepsilon + \varepsilon \int_0^\eta \|u\|^2 dt + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla u\|^2 dt \\
\bullet \quad & \left| \int_0^\eta (K \star u, u) dt \right| \leq \varepsilon \int_0^\eta \|u\|^2 dt + C_\varepsilon \int_0^\eta \int_0^t \|u(s)\|^2 ds dt \\
& \text{wegens Lemma 4.2} \\
& \text{want wegens Stelling 4.1:} \\
& \quad \forall t \in [0, T] : |K(t)| \leq C \Rightarrow K \in L_2((0, T)) \\
& \leq \varepsilon \int_0^\eta \|u\|^2 dt + C_\varepsilon \int_0^\eta \|u\|^2 dt \\
& \text{want } t \in [0, \eta] \Rightarrow \int_0^t \cdot ds \leq \int_0^\eta \cdot ds \\
& \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \|u\|^2 dt
\end{aligned}$$

Met behulp van bovenstaande ongelijkheden, kan na het herschikken van bepaalde termen, de oorspronkelijke ongelijkheid herschreven worden als:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|u(\eta)\|^2 + (1 - \varepsilon) \int_0^\eta \|\nabla u\|^2 dt & \leq C_\varepsilon + C_\varepsilon \int_0^\eta \|u\|^2 dt + \frac{1}{2} \|u_0\|^2 \\
& \leq C_\varepsilon + C_\varepsilon \int_0^\eta \|u\|^2 dt \\
& \text{want } u_0 \in L_2(\Omega).
\end{aligned}$$

Kies ε klein genoeg en vast zodat er geldt dat:

$$\begin{aligned}
\|u(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla u\|^2 dt & \leq C + C \int_0^\eta \|u\|^2 dt \\
& \leq C + C \left\{ \int_0^\eta \|u\|^2 dt + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 ds dt \right\}
\end{aligned}$$

Pas nu Grönwall (zie stelling B.8) toe op bovenstaande ongelijkheid:

$$\|u(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla u\|^2 dt \leq C e^{\eta C} \leq C.$$

Maximaliseer de vergelijking om het te bewijzen te bekomen:

$$\max_{\eta \in [0, T]} \|u(\eta)\|^2 + \int_0^T \|\nabla u\|^2 dt \leq C.$$

□

De stabiliteitsanalyse kan uitgebreid worden met onderstaande stelling. Merk op dat er een sterkere regulariteitsvoorwaarde wordt verondersteld voor de beginconditie.

Stelling 4.3.

Als alle voorwaarden van stelling 4.1 zijn voldaan en

$$u_0 \in H^1(\Omega),$$

dan geldt dat $\exists C > 0 : \int_0^T \|\partial_t u\|^2 dt + \max_{\eta \in [0, T]} \|\nabla u(\eta)\|^2 \leq C$.

Bewijs. Beschouw de variacionele formulering (4) en stel deze keer $\varphi = \partial_t u$:

$$\begin{aligned} & (\partial_t u, \partial_t u) + (\nabla u, \nabla(\partial_t u)) \\ &= \left(\int_0^t f(u(s)) ds, \partial_t u \right) - (g, \partial_t u)_\Gamma - (K \star u, \partial_t u) \\ \Leftrightarrow & \int_0^\eta (\partial_t u, \partial_t u) + (\nabla u, \nabla(\partial_t u)) dt \\ & \leq \left| \int_0^\eta \left(\int_0^t f(u(s)) ds, \partial_t u \right) - (g, \partial_t u)_\Gamma - (K \star u, \partial_t u) dt \right| \\ \Leftrightarrow & \int_0^\eta \|\partial_t u\|^2 dt + \int_0^\eta (\nabla u, \nabla(\partial_t u)) dt \\ & \leq \left| \int_0^\eta \left(\int_0^t f(u(s)) ds, \partial_t u \right) dt \right| + \left| \int_0^\eta (g, \partial_t u)_\Gamma dt \right| + \left| \int_0^\eta (K \star u, \partial_t u) dt \right| \end{aligned}$$

Hierbij gelden volgende ongelijkheden:

- $\int_0^\eta (\nabla u, \nabla(\partial_t u)) dt \leq \frac{1}{2} \|\nabla u(\eta)\|^2 - \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2$
wegens analoge redenering als in stelling 4.2
- $\left| \int_0^\eta \left(\int_0^t f(u(s)) ds, \partial_t u \right) dt \right| \leq \int_0^\eta \int_\Omega \left(\int_0^T |f(u(s))| ds \right) |\partial_t u(\mathbf{x}, t)| d\mathbf{x} dt$
 $\leq CT \int_0^\eta \int_\Omega |\partial_t u(\mathbf{x}, t)| d\mathbf{x} dt$
 want f is begrensd
 $\leq CT \int_0^\eta (\|\partial_t u(t)\| |\Omega|) dt$
 wegens Cauchy-Schwartz
 $\leq CT \int_0^\eta (\varepsilon \|\partial_t u(t)\|^2 + C_\varepsilon |\Omega|^2) dt$
 wegens Young
 $\leq \varepsilon \int_0^\eta \|\partial_t u\|^2 + C_\varepsilon$
- $\left| \int_0^\eta (g, \partial_t u)_\Gamma dt \right| = \left| \int_\Gamma \int_0^\eta g(\mathbf{x}, t) \partial_t u(\mathbf{x}, t) dt d\mathbf{x} \right|$
 $= \left| \int_\Gamma \{g(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t)|_0^\eta - \int_0^\eta \partial_t g(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) dt\} d\mathbf{x} \right|$
 wegens partiële integratie
 $\leq \left| \int_\Gamma g(\eta)u(\eta) - g_0 u_0 d\mathbf{x} \right| + \left| \int_\Gamma \int_0^\eta \partial_t g(t)u(t) d\mathbf{x} \right|$

$$\begin{aligned}
 \text{met } \left| \int_{\Gamma} g(\eta)u(\eta) - g_0u_0 d\mathbf{x} \right| &\leq \int_{\Gamma} |g(\eta)| |u(\eta)| d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} |g_0| |u_0| d\mathbf{x} \\
 &\leq \|g(\eta)\|_{\Gamma} \|u(\eta)\|_{\Gamma} + \|g_0\|_{\Gamma} \|u_0\|_{\Gamma} \\
 &\quad \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
 &\leq C_{\varepsilon} \|g(\eta)\|_{\Gamma}^2 + \varepsilon \|u(\eta)\|_{\Gamma}^2 + \|g_0\|_{\Gamma} \|u_0\|_{\Gamma} \\
 &\quad \text{wegens Young} \\
 &\leq C_{\varepsilon} + \varepsilon \|u(\eta)\|_{\Gamma}^2 + C \|u_0\|_{\Gamma}^2 \\
 &\quad \text{want } g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma)) \\
 &\leq C_{\varepsilon} + \varepsilon \{ \|u(\eta)\|^2 + \|\nabla u(\eta)\|^2 \} + C \|u_0\|_{H^1}^2 \\
 &\quad \text{wegens de spoorstelling} \\
 &\leq C_{\varepsilon} + \varepsilon \|u(\eta)\|^2 + \varepsilon \|\nabla u(\eta)\|^2 \\
 &\quad \text{want } u_0 \in H^1(\Omega) \\
 &\leq C_{\varepsilon} + \varepsilon \|\nabla u(\eta)\|^2 \\
 &\quad \text{want wegens Stelling 4.2 geldt:} \\
 &\quad \max_{\eta \in [1, T]} \|u(\eta)\|^2 \leq C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{en } \left| \int_0^{\Gamma} \int_0^{\eta} \partial_t g(t)u(t) d\mathbf{x} \right| &\leq \int_0^{\eta} \|\partial_t g\|_{\Gamma} \|u\| dt \\
 &\quad \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
 &\leq \int_0^{\eta} \left\{ \frac{1}{2} \|\partial_t g\|_{\Gamma}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{\Gamma}^2 \right\} dt \\
 &\quad \text{wegens Young} \\
 &\leq C + C \int_0^{\eta} \|u\|_{\Gamma}^2 dt \\
 &\quad \text{want } g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma)) \\
 &\quad \Rightarrow \partial_t g \in C([0, T], L_2(\Gamma)) \\
 &\leq C + C \int_0^{\eta} \{ \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \} dt \\
 &\quad \text{wegens de spoorstelling} \\
 &\leq C + C \int_0^{\eta} \|\nabla u\|^2 dt \\
 &\quad \text{wegens Stelling 4.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{dus } \left| \int_0^{\eta} (g, \partial_t u)_{\Gamma} dt \right| &\leq C_{\varepsilon} + \varepsilon \|\nabla u(\eta)\|^2 + C \int_0^{\eta} \|\nabla u\|^2 dt \\
 \bullet \left| \int_0^{\eta} (K \star u, \partial_t u) dt \right| &\leq \varepsilon \int_0^{\eta} \|\partial_t u\|^2 dt + C_{\varepsilon} \int_0^{\eta} \int_0^t \|u(s)\|^2 ds dt \\
 &\quad \text{wegens Lemma 4.2} \\
 &\quad \text{want wegens Stelling 4.1:} \\
 &\quad \forall t \in [0, T] : |K(t)| \leq C \\
 &\quad \Rightarrow K \in L_2(0, T) \\
 &\leq \varepsilon \int_0^{\eta} \|\partial_t u\|^2 dt + C_{\varepsilon} \\
 &\quad \text{wegens Stelling 4.2}
 \end{aligned}$$

Met behulp van bovenstaande ongelijkheden, kan na het herschikken van bepaalde termen de oorspronkelijke ongelijkheid herschreven worden als:

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) \int_0^t \|\partial_t u\|^2 dt + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \|\nabla u(\eta)\|^2 &\leq C_\varepsilon + C \int_0^\eta \|\nabla u\|^2 dt + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2 \\ &\leq C_\varepsilon + C \int_0^\eta \|\nabla u\|^2 dt \\ &\quad \text{want } u_0 \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Kies ε klein genoeg en vast zodat er geldt dat:

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\partial_t u\|^2 dt + \|\nabla u(\eta)\|^2 &\leq C + C \int_0^\eta \|\nabla u\|^2 dt \\ &\leq C + C \int_0^\eta \left\{ \int_0^t \|\partial_t u(s)\|^2 ds + \|\nabla u\|^2 \right\} dt. \end{aligned}$$

Pas nu Grönwall (zie stelling B.8) toe op bovenstaande ongelijkheid:

$$\int_0^t \|\partial_t u\|^2 dt + \|\nabla u(\eta)\|^2 \leq C e^{nC} \leq C.$$

Maximaliseer de vergelijking om het te bewijzen te bekomen:

$$\int_0^T \|\partial_t u\|^2 dt + \max_{\eta \in [0, T]} \|\nabla u(\eta)\|^2 \leq C.$$

□

4.3 Tijdsdiscretisatie

In dit deel zal het probleem worden gediscrètiseerd in de tijd met behulp van de achterwaartse Euler-methode. Dit betekent dat het tijdsinterval $[0, T]$ zal verdeeld worden in N equidistante deelintervallen met lengte τ . Per notatie zal $t_i = i\tau$. Over elk deelinterval $[t_{i-1}, t_i]$ voor $i = 1, \dots, N$, zullen de voorkomende functies worden benaderd met een constante, met andere woorden, de functies uit de variationele formuleringen (7) worden benaderd door stuksgewijs constante functies. Voor een functie z , wordt de benadering over het interval $]t_{i-1}, t_i]$ voor $i = 1, \dots, N$, als volgt genoteerd:

$$z_i \approx z(t_i),$$

en zijn bijhorende afgeleide naar de tijd, wordt met behulp van de achterwaartse Euler-methode gedefinieerd:

$$\delta z_i := \frac{z_i - z_{i-1}}{\tau} \approx \partial_t z(t_i)$$

Indien deze notatie voor alle functies uit de variationele formulering wordt toegepast, kunnen de gediscrètiseerde versies worden genoteerd. Voor $t \in]t_{i-1}, t_i]$ gelden volgende discretisaties:

- $K(t) \sim K_i$
- $g(t) \sim g_i$
- $m(t) \sim m_i$
- $u(t) \sim u_i$
- $f(u(t)) \sim f(u_{i-1})$

wegens de linearisatie van het probleem

- $(K \star m')(t) \sim (K \star m')(t_i)$
 $\sim \int_0^{t_i} K(s)m'(t_i - s)ds$
 $\sim \sum_{k=1}^i \int_{t_{k-1}}^{t_k} K(s)m'(t_i - s)ds$
 $\sim \sum_{k=1}^i K(t_k)m'(t_i - t_k)\tau$
 $\sim \sum_{k=1}^i K_k m'_{i-k}\tau$

- $\int_0^t f(u(s))ds \sim \int_0^{t_i} f(u(s))ds$
wegens de linearisatie van het probleem
 $\sim \sum_{k=1}^i \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(u(s))ds$
waarbij $u(\xi) \sim u_0$ voor $\xi < 0$
 $\sim \sum_{k=1}^i f(u_{k-1})\tau$
 $\sim \sum_{k=0}^{i-1} f(u_k)\tau$

Wegens de linearisatie van het probleem werd $f(u(t))$ als $f(u_{i-1})$ gediscretiseerd voor $t \in]t_{i-1}, t_i]$. Hierdoor zullen de bekomen gediscretiseerde vergelijkingen expliciete formules geven voor het berekenen van het oplossingskoppel $\langle u_i, K_i \rangle$. De gediscretiseerde variationele formulering voor de convolutiekern wordt, met behulp van de bovenstaande discretisatie, als volgt:

$$K_i m_0 + \sum_{k=1}^i K_k m'_{i-k} \tau = (f(u_{i-1}), 1) - ((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma - m''_i \quad (8)$$

en de gediscretiseerde variationele formulering voor de oplossingsfunctie is als volgt:

$$(\delta u_i, \varphi) + (\nabla u_i, \nabla \varphi) + \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau, \varphi \right) = \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k) \tau, \varphi \right) - (g_i, \varphi)_\Gamma. \quad (9)$$

Het probleem wordt dus eerst vereenvoudigd tot het zoeken naar het zwakke oplossingskoppel $\langle u_i, K_i \rangle$ voor $i = 1, \dots, N$, die voldoet aan volgende vergelijkingen:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_i m_0 + \sum_{k=1}^i K_k m'_{i-k} \tau = (f(u_{i-1}), 1) - ((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma - m''_i \\ (\delta u_i, \varphi) + (\nabla u_i, \nabla \varphi) + \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau, \varphi \right) = \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k) \tau, \varphi \right) - (g_i, \varphi)_\Gamma \end{array} \right. \quad (10)$$

waarbij minstens geldt dat

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continu en begrensd is} \\ g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma)) \\ m \in C^2([0, T]) \text{ met } m_0 \neq 0 \\ u_0 \in L_2(\Omega) \end{array} \right.$$

De volgende stelling bewijst het bestaan van de oplossingsfunctie $u_i \in H^1(\Omega)$ voor het gediscretiseerde probleem (10).

Stelling 4.4.

Als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continu en begrensd is,
 $g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma))$,
 $m \in C^2([0, T])$ met $m_0 \neq 0$ en
 $u_0 \in L_2(\Omega)$,
 dan bestaat er een unieke zwakke oplossing $u_i \in H^1(\Omega) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Bewijs. Het bewijs zal gegeven worden met behulp van inductie.

Deel 1: *Bewijs dat $\exists C_1 > 0 : |K_1| \leq C_1$.*

Beschouw de gediscrètiseerde variationele formulering voor de convolutie-kern (8) voor $i = 1$:

$$\begin{aligned} K_1 m_0 + K_1 m'_0 \tau &= (f(u_0), 1) - ((\partial_t g)_1, 1)_\Gamma - m''_1 \\ \Leftrightarrow K_1 &= \frac{1}{m_0 + m'_0 \tau} \{(f(u_0), 1) - ((\partial_t g)_1, 1)_\Gamma - m''_1\} \\ &\quad \text{want } m_0 \neq 0 \text{ en } m \in C^2([0, T]) \text{ dus kies } \tau \text{ zodanig klein} \\ &\quad \text{zodat } |m_0 + m'_0 \tau| \geq C |m_0| > 0 \Rightarrow m_0 + m'_0 \tau \neq 0 \\ \Leftrightarrow |K_1| &\leq \frac{1}{|m_0 + m'_0 \tau|} \{|(f(u_0), 1)| + |((\partial_t g)_1, 1)_\Gamma| + |m''_1|\} \\ &\leq C \{|(f(u_0), 1)| + |((\partial_t g)_1, 1)_\Gamma| + C\} \\ &\quad \text{want } m_0 \neq 0 \text{ en } m \in C^2([0, T]) \end{aligned}$$

Hierbij gelden volgende ongelijkheden:

- $|(f(u_0), 1)| \leq \int_{\Omega} |f(u_0)| \tau \, dx$
 $\leq C |\Omega|$
 want f is begrensd
 $\leq C$
- $|((\partial_t g)_1, 1)_\Gamma| \leq \int_{\Gamma} |(\partial_t g)_1| \, dx$
 $\leq C |\Gamma|$
 want $\partial_t g \in C([0, T], L_2(\Gamma))$
 $\leq C$

Deze ongelijkheden in rekening brengend, geldt er dat $\exists C_1 > 0 : |K_1| \leq C_1$. Hierbij werd een index bij de constante ingevoerd om de tijdsafhankelijkheid van de constante te benadrukken.

Deel 2: *Bewijs dat er een unieke zwakke oplossing $u_1 \in H^1(\Omega)$ bestaat.*

Beschouw de gediscrètiseerde variationele formulering voor de oplossingsfunctie (9) voor $i = 1$:

$$\frac{1}{\tau} (u_1, \varphi) + (\nabla u_1, \nabla \varphi) = (f(u_0) \tau, \varphi) - (g_1, \varphi)_\Gamma - K_1 (u_0, \varphi) \tau$$

Nu het probleem werd vereenvoudigd door middel van de tijdsdiscrètisatie is het mogelijk om de stelling van Lax-Milgram (zie stelling 2.6) rechtstreeks toe te passen

waarbij

$$\begin{cases} a(u, \varphi) &= \frac{1}{\tau}(u_1, \varphi) + (\nabla u_1, \nabla \varphi) \\ \langle F, \varphi \rangle &= (f(u_0)\tau, \varphi) - (g_1, \varphi)_\Gamma - K_1(u_0, \varphi)\tau \end{cases}$$

a) $V = H^1(\Omega) \Rightarrow V$ is een Hilbertruimte.

b) a is een continue bilineaire vorm:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\tau}(u_1, \varphi) + (\nabla u_1, \nabla \varphi) \right| &\leq \frac{1}{\tau} \|u_1\| \|\varphi\| + \|\nabla u_1\| \|\nabla \varphi\| \\ &\text{wegens Cauchy-Schwartz} \\ &\leq \frac{1}{\tau} \|u_1\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1} + \|u_1\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1} \\ &\text{wegens de definitie van de norm in } H^1(\Omega) \\ &\leq C \|u_1\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1} \end{aligned}$$

c) a is een elliptische bilineaire vorm:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\tau}(u_1, u_1) + (\nabla u_1, \nabla u_1) \right| &= \left| \frac{1}{\tau} \|u_1\|^2 + \|\nabla u_1\|^2 \right| \\ &= \frac{1}{\tau} \|u_1\|^2 + \|\nabla u_1\|^2 \\ &\geq \min\left(\frac{1}{\tau}, 1\right) \|u_1\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

d) F is een begrensde functionaal:

$$\begin{aligned} |(f(u_0)\tau, \varphi) - (g_1, \varphi)_\Gamma - K_1(u_0, \varphi)\tau| &\leq |(f(u_0)\tau, \varphi)| + |(g_1, \varphi)_\Gamma| + |K_1(u_0, \varphi)\tau| \\ \text{met } |(f(u_0)\tau, \varphi)| &\leq \tau \|f(u_0)\| \|\varphi\| \\ &\text{wegens Cauchy-Schwartz} \\ &\leq C\tau \|\varphi\| \\ &\text{want } f \text{ is begrensd} \\ &\leq C \|\varphi\|_{H^1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{en } |(g_1, \varphi)_\Gamma| &\leq \|g_1\|_\Gamma \|\varphi\|_\Gamma \\ &\text{wegens Cauchy-Schwartz} \\ &\leq C \|\varphi\|_\Gamma \\ &\text{want } g \in C([0, T], L_2(\Gamma)) \\ &\leq C \|\varphi\|_{H^1} \\ &\text{wegens de spoorstelling} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{en } |K_1(u_0, \varphi)\tau| &\leq |\varphi| |(u_0, \varphi)| \\ &\leq C_t |(u_0, \varphi)| \\ &\text{wegens deel 1 van dit bewijs} \\ &\leq C_t \|u_0\| \|\varphi\| \\ &\text{wegens Cauchy-Schwartz} \\ &\leq C \|\varphi\| \\ &\text{want } u_0 \in L_2(\Omega) \\ &\leq C \|\varphi\|_{H^1} \end{aligned}$$

$$\text{dus } |\langle F, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{H^1}$$

Bij deze zijn alle voorwaarden voor Lax-Milgram voldaan, met andere woorden:
 $\exists! u_1 \in H^1(\Omega)$ op de vermelde voorwaarden na.

Deel 3: Beschouw de inductiehypothese dat $|K_k| \leq C_k \forall k < i$ en waarbij $\exists! u_k \in H^1(\Omega) \forall k < i$ op de vermelde voorwaarden na. Bewijs dat het eerste deel van de inductiehypothese ook geldt voor $k = i$.

Beschouw de gediscretiseerde variationele formulering voor de convolutiekern (8) voor $i > 1$:

$$\begin{aligned}
 K_i m_0 + \sum_{k=1}^i K_k m'_{i-k} \tau &= (f(u_{i-1}), 1) - ((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma - m''_i \\
 \Leftrightarrow K_i (m_0 + m'_0 \tau) &= (f(u_{i-1}), 1) - ((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma - m''_i - \sum_{k=1}^{i-1} K_k m'_{i-k} \tau \\
 \Leftrightarrow K_i &= \frac{1}{m_0 + m'_0 \tau} \left\{ (f(u_{i-1}), 1) - ((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma - m''_i - \sum_{k=1}^{i-1} K_k m'_{i-k} \tau \right\} \\
 &\text{want } m_0 \neq 0 \text{ en } m \in C^2([0, T]) \text{ dus kunnen } \tau \text{ zodanig klein} \\
 &\text{kieszen zodat } |m_0 + m'_0 \tau| \geq C |m_0| > 0 \Rightarrow m_0 + m'_0 \tau \neq 0 \\
 \Leftrightarrow |K_i| &\leq \frac{1}{|m_0 + m'_0 \tau|} \left(|(f(u_{i-1}), 1)| + |((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma| + |m''_i| + \sum_{k=1}^{i-1} |K_k| |m'_{i-k}| \tau \right) \\
 &\leq C \left(|(f(u_{i-1}), 1)| + |((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma| + C + \left| \sum_{k=1}^{i-1} K_k m'_{i-k} \tau \right| \right) \\
 &\text{want } m_0 \neq 0 \text{ en } m \in C^2([0, T])
 \end{aligned}$$

Hierbij gelden volgende ongelijkheden:

- $|(f(u_{i-1}), 1)| \leq \int_{\Omega} |f(u_{i-1})| \tau \, d\mathbf{x}$
 $\leq C |\Omega|$
 want f is begrensd
 $\leq C$
- $|((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma| \leq \int_{\Gamma} |(\partial_t g)_i| \, d\mathbf{x}$
 $\leq C |\Gamma|$
 want $\partial_t g \in C([0, T], L_2(\Gamma))$
 $\leq C$
- $\sum_{k=1}^{i-1} |K_k| |m'_{i-k}| \tau \leq C \sum_{k=1}^{i-1} |K_k| \tau$
 want $m \in C^2([0, T])$
 $\leq C \sum_{k=1}^{i-1} C_k \tau$
 wegens het eerste deel van de inductiehypothese
 $\leq C_i T$
 want de som is eindig
 $\leq C_i$

Deze ongelijkheden in rekening brengen, geldt er dat $\exists C_i > 0 : |K_i| \leq C_i$.

Deel 4: *Beschouw opnieuw de inductiehypothese dat $|K_k| \leq C_k \forall k < i$ en waarbij $\exists! u_k \in H^1(\Omega) \forall k < i$ op de vermelde voorwaarden na. Bewijs dat het tweede deel van de inductiehypothese ook geldt voor $k = i$.*

Beschouw de gediscretiseerde variationele formulering voor de oplossingsfunctie (9):

$$\frac{1}{\tau}(u_i, \varphi) + (\nabla u_i, \nabla \varphi) = \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k)\tau, \varphi \right) - (g_i, \varphi)_\Gamma - \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k}\tau, \varphi \right)$$

Nu het probleem werd vereenvoudigd door middel van de tijdsdiscretisatie is het mogelijk om de stelling van Lax-Milgram (zie stelling 2.6) rechtstreeks toe te passen waarbij

$$\begin{cases} a(u, \varphi) &= \frac{1}{\tau}(u_i, \varphi) + (\nabla u_i, \nabla \varphi) \\ \langle F, \varphi \rangle &= \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k)\tau, \varphi \right) - (g_i, \varphi)_\Gamma - \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k}\tau, \varphi \right) \end{cases}$$

a) $V = H^1(\Omega) \Rightarrow V$ is een Hilbertruimte.

b) a is een continue bilineaire vorm:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\tau}(u_i, \varphi) + (\nabla u_i, \nabla \varphi) \right| &\leq \frac{1}{\tau} \|u_i\| \|\varphi\| + \|\nabla u_i\| \|\nabla \varphi\| \\ &\text{wegens Cauchy-Schwartz} \\ &\leq \frac{1}{\tau} \|u_i\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1} + \|u_i\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1} \\ &\text{wegens de definitie van de norm in } H^1 \\ &\leq C \|u_i\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1} \end{aligned}$$

c) a is een elliptische bilineaire vorm:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\tau}(u_i, u_i) + (\nabla u_i, \nabla u_i) \right| &= \left| \frac{1}{\tau} \|u_i\|^2 + \|\nabla u_i\|^2 \right| \\ &= \frac{1}{\tau} \|u_i\|^2 + \|\nabla u_i\|^2 \\ &\geq \min\left(\frac{1}{\tau}, 1\right) \|u_i\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

d) F is een begrensde functionaal:

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k)\tau, \varphi \right) - (g_i, \varphi)_\Gamma - \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k}\tau, \varphi \right) \right| \\ \leq \left| \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k)\tau, \varphi \right) \right| + |(g_i, \varphi)_\Gamma| + \left| \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k}\tau, \varphi \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{met } \left| \left(\sum_{k=0}^i f(u_k) \tau, \varphi \right) \right| &\leq \sum_{k=0}^i \tau \|f(u_k)\| \|\varphi\| \\
&\text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
&\leq \sum_{k=0}^i C \tau \|\varphi\| \\
&\text{want } f \text{ is begrensd} \\
&\leq CT \|\varphi\| \\
&\text{want de som is eindig} \\
&\leq C \|\varphi\|_{H^1} \\
\text{en } |(g_i, \varphi)_\Gamma| &\leq \|g_i\|_\Gamma \|\varphi\|_\Gamma \\
&\text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
&\leq C \|\varphi\|_\Gamma \\
&\text{want } g \in C([0, T], L_2(\Gamma)) \\
&\leq C \|\varphi\|_{H^1} \\
&\text{wegens de spoorstelling} \\
\text{en } \left| \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau, \varphi \right) \right| &\leq \sum_{k=1}^i \tau |K_k| |(u_{i-k}, \varphi)| \\
&\leq \sum_{k=1}^i \tau |K_k| \|u_{i-k}\| \|\varphi\| \\
&\text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
&\leq C_t \sum_{k=1}^i \tau \|u_{i-k}\| \|\varphi\| \\
&\text{wegens deel 3 van dit bewijs} \\
&\leq C \sum_{k=1}^i \tau \|\varphi\| \\
&\text{wegens de inductie-hypothese geldt dat} \\
&\quad u_{i-k} \in H^1(\Omega) \text{ voor } k = 1, \dots, i-1 \text{ en } u_0 \in L_2(\Omega) \\
&\leq CT \|\varphi\| \\
&\text{want de som is eindig} \\
&\leq CT \|\varphi\|_{H^1} \\
\text{dus } |(F, \varphi)| &\leq C \|\varphi\|_{H^1}
\end{aligned}$$

Bij deze zijn alle voorwaarden voor Lax-Milgram voldaan, met andere woorden: $\exists! u_i \in H^1(\Omega)$ op de vermelde voorwaarden na.

Uit de inductie volgt het te bewijzen: $\exists! u_i \in H^1(\Omega) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

□

4.4 A priori afschattingen

Met behulp van de tijdsdiscretisatie, werd het probleem opgesplitst in n kleinere deelproblemen. Voor elk deelprobleem werd het bestaan en de uniciteit van een zwakke oplossing bewezen. In dit deel van de thesis, wordt de stabiliteit nagegaan van deze zwakke oplossingen u_i voor $i \in \{1, \dots, n\}$.

Stelling 4.5.

Als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continu en begrensd is,
 $g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma))$ en
 $m \in C^2([0, T])$ met $m_0 \neq 0$,
 dan $\exists C > 0 : |K_i| \leq C$.

Bewijs. Beschouw de gediscretiseerde variationele formulering voor de convolutiekern (8)

voor willekeurige i :

$$K_i(m_0 + m'_0\tau) + \sum_{k=0}^{i-1} K_k m'_{i-k}\tau = (f(u_{i-1}), 1) - ((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma - m''_i$$

$$\Leftrightarrow K_i = \frac{1}{m_0 + m'_0\tau} \left((f(u_{i-1}), 1) - ((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma - m''_i - \sum_{k=1}^{i-1} K_k m'_{i-k}\tau \right)$$

want $m_0 \neq 0$ en $m \in C^2([0, T])$ dus kunnen τ zodanig klein kiezen zodat $|m_0 + m'_0\tau| \geq C|m_0| > 0 \Rightarrow m_0 + m'_0\tau \neq 0$

$$\Leftrightarrow |K_i| \leq \frac{1}{|m_0 + m'_0\tau|} \left(|(f(u_{i-1}), 1)| + |((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma| + |m''_i| + \sum_{k=1}^{i-1} |K_k| |m'_{i-k}\tau| \right)$$

Hierbij gelden volgende ongelijkheden:

- $|(f(u_{i-1}), 1)| \leq \int_{\Omega} |f(u_{i-1})| \tau \, d\mathbf{x}$
 $\leq C|\Omega|$
 want f is begrensd
 $\leq C$
- $|((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma| \leq \int_{\Gamma} |(\partial_t g)_i| \, d\mathbf{x}$
 $\leq C|\Gamma|$
 want $\partial_t g \in C([0, T], L_2(\Gamma))$
 $\leq C$
- $\sum_{k=1}^{i-1} |K_k| |m'_{i-k}\tau| \leq \sum_{k=1}^{i-1} C|K_k|\tau$
 want $m \in C^2([0, T])$

Al deze ongelijkheden in rekening brengend, geldt er dat:

$$|K_i| \leq \frac{1}{|m_0 + m'_0\tau|} \left(C + \sum_{k=1}^{i-1} C\tau |K_k| \right)$$

$$\Leftrightarrow |K_i| \leq C + \sum_{k=1}^{i-1} C\tau |K_k|$$

want $m_0 \neq 0$ en $m \in C^2([0, T])$

Pas nu de gediscretiseerde versie van Grönwall (zie stelling B.9) toe om het gevraagde te bekomen:

$$|K_i| \leq C e^{tC} \leq C \quad \text{op voorwaarde dat } \tau < \tau_0.$$

Merk op dat bovenstaande ongelijkheid geldt voor willekeurige $i \in \{0, \dots, n\}$, dit betekent dat, in tegenstelling tot Stelling 4.4, de constante onafhankelijk is van het tijdstip i waarin K_i wordt beschouwd. \square

Alvorens de stelling in verband met de stabiliteit van de oplossing u_i te geven, worden eerst nog enkele eigenschappen gegeven die in het bewijs ervan zullen worden gebruikt.

Lemma 4.4.

Als $v_i, w_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ voor $i \in \{1, \dots, n\}$

v_i, w_i zijn voldoende gladde functies,

$$\text{dan geldt } \sum_{i=1}^j (v_i - v_{i-1})w_i = v_j w_j - v_0 w_0 - \sum_{i=1}^j v_{i-1}(w_i - w_{i-1}).$$

Bewijs. Werk het rechterlid uit zodat het linkerlid wordt bekomen.

$$\begin{aligned} v_j w_j - v_0 w_0 - \sum_{i=1}^j v_{i-1}(w_i - w_{i-1}) &= v_j w_j - v_0 w_0 - \sum_{i=1}^j v_{i-1} w_i + \sum_{i=1}^j v_{i-1} w_{i-1} \\ &= \sum_{i=2}^{j+1} v_{i-1} w_{i-1} - \sum_{i=1}^j v_{i-1} w_i \\ &= \sum_{i=1}^j v_i w_i - \sum_{i=1}^j v_{i-1} w_i \\ &= \sum_{i=1}^j (v_i - v_{i-1}) w_i \end{aligned}$$

\square

Lemma 4.5.

Als $v_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ voor $i \in \{1, \dots, n\}$

v_i zijn voldoende gladde functies,

$$\text{dan geldt } \sum_{i=1}^j (v_i - v_{i-1}, v_i) = \frac{1}{2} (\|v_j\|^2 - \|v_0\|^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|v_i - v_{i-1}\|^2.$$

Bewijs. Werk het linkerlid uit met behulp van Lemma 4.4.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j (v_i - v_{i-1}, v_i) &= \sum_{i=1}^j \int_{\Omega} (v_i(\mathbf{x}) - v_{i-1}(\mathbf{x})) v_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^j (v_i(\mathbf{x}) - v_{i-1}(\mathbf{x})) v_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} v_j^2(\mathbf{x}) - v_0^2(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^j v_{i-1}(\mathbf{x})(v_i(\mathbf{x}) - v_{i-1}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &\quad \text{wegens Lemma 4.4} \\ &= \|v_j\|^2 - \|v_0\|^2 + \sum_{i=1}^j \|v_i - v_{i-1}\|^2 - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^j v_{i-1}(\mathbf{x})(v_i(\mathbf{x}) - v_{i-1}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \|v_j\|^2 - \|v_0\|^2 + \sum_{i=1}^j \|v_i - v_{i-1}\|^2 - \sum_{i=1}^j (v_i - v_{i-1}, v_i) \end{aligned}$$

Hierbij komt de laatste term net overeen met het linkerlid, met andere woorden:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^j (v_i - v_{i-1}, v_i) &= \|v_j\|^2 - \|v_0\|^2 + \sum_{i=1}^j \|v_i - v_{i-1}\|^2 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^j (v_i - v_{i-1}, v_i) &= \frac{1}{2} (\|v_j\|^2 - \|v_0\|^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|v_i - v_{i-1}\|^2 \end{aligned}$$

□

Nu kan de stelling met de a priori afschatting voor u_i bewezen worden.

Stelling 4.6.

Als de voorwaarden van Stelling 4.5 zijn voldaan en

$$u_0 \in L_2(\Omega),$$

dan geldt $\exists \tau_0 > 0, \forall \tau < \tau_0 :$

$$\max_{1 \leq j \leq N} \|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^N \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{i=1}^N \|\nabla u_i\|^2 \tau \leq C.$$

Bewijs. Beschouw de gediscretiseerde variationele formulering (9) voor willekeurige i met

$\phi = u_i$. Neem de som $\sum_{i=1}^j$ en vermenigvuldig met τ .

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^j (\delta u_i, u_i) \tau + \sum_{i=1}^j (\nabla u_i, \nabla u_i) \tau \\ &= \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k) \tau, u_i \right) \tau - \sum_{i=1}^j (g_i, u_i)_{\Gamma} \tau - \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau, u_i \right) \tau \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k) \tau, |u_i| \right) \tau \right| + \left| \sum_{i=1}^j (g_i, u_i)_{\Gamma} \tau \right| + \left| \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau, u_i \right) \tau \right| \end{aligned}$$

Hierbij gelden volgende (on)gelijkheden:

- $\sum_{i=1}^j (\delta u_i, u_i) \tau = \frac{1}{2} (\|u_j\|^2 - \|u_0\|^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2$
wegens Lemma 4.5
 $= \frac{1}{2} \|u_j\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|^2$
- $\left| \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k) \tau, |u_i| \right) \tau \right| \leq \sum_{i=1}^j \tau \sum_{k=0}^{i-1} \|f(u_k)\| \|u_i\| \tau$
wegens Cauchy-Schwartz
 $\leq \sum_{i=1}^j \tau \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{2} (\|f(u_k)\|^2 + \|u_i\|^2) \tau$
wegens Young
 $\leq \sum_{i=1}^j \tau C \sum_{k=0}^{i-1} \|f(u_k)\|^2 \tau + \sum_{i=1}^j \tau CT \|u_i\|^2$
 $\leq \sum_{i=1}^j \tau C \sum_{k=0}^{i-1} \tau + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau$
want f is begrensd
 $\leq C + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau$

- $$\left| \sum_{i=1}^j (g_i, u_i)_{\Gamma} \tau \right| \leq \sum_{i=1}^j \|g_i\|_{\Gamma} \|u_i\|_{\Gamma} \tau$$

wegens Cauchy-Schwartz

$$\leq \sum_{i=1}^j (C_{\varepsilon} \|g_i\|_{\Gamma}^2 + \varepsilon \|u_i\|_{\Gamma}^2) \tau$$

wegens Young

$$\leq C_{\varepsilon} \sum_{i=1}^j \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|_{\Gamma}^2 \tau$$

want $g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma))$

$$\leq C_{\varepsilon} + \varepsilon \sum_{i=1}^j (\|u_i\|^2 + \|\nabla u_i\|) \tau$$

wegens de spoorstelling

$$\leq C_{\varepsilon} + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau$$
- $$\left| \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau, u_i \right) \tau \right| \leq \sum_{i=1}^j \left\| \sum_{k=1}^i |K_k| |u_{i-k}| \tau \right\| \|u_i\| \tau$$

wegens Cauchy-Schwartz

$$\leq \sum_{i=1}^j \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^i |K_k| |u_{i-k}| \tau \right\|^2 \tau + \sum_{i=1}^j \frac{1}{2} \|u_i\|^2 \tau$$

wegens Young

$$\leq C \sum_{i=1}^j \tau \left(\sum_{k=1}^i |K_k|^2 \tau \right) \left(\sum_{k=1}^i \|u_{i-k}\|^2 \tau \right) + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau$$

wegens Cauchy-Schwartz

$$\leq C \sum_{i=1}^j \tau \sum_{k=1}^i \|u_{i-k}\|^2 \tau + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau$$

wegens Stelling 4.5

$$\leq C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau$$

door $\sum_{k=1}^i$ te vergroten naar $\sum_{k=1}^j$
zodat de eerste som kan vergroot worden tot CT
en daarna de spookindex k te wijzigen naar i

Al deze ongelijkheden in rekening brengend, geldt er, na het verwisselen van bepaalde termen van lid, dat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_j\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau &\leq C_{\varepsilon} + C_{\varepsilon} \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau + \frac{1}{2} \|u_0\|^2 \\ &\leq C_{\varepsilon} + C_{\varepsilon} \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau \\ &\text{want } u_0 \in L_2(\Omega) \end{aligned}$$

Kies nu ε klein genoeg en vast, zodat:

$$\begin{aligned} \|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau &\leq C + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau \\ \Leftrightarrow (1 - C\tau) \|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau &\leq C + C \sum_{i=1}^{j-1} \|u_i\|^2 \tau \end{aligned}$$

Stel dat $1 - C\tau > C_0$ voor een bepaalde $C_0 > 0$, met andere woorden, op voorwaarde dat $\tau < \tau_0$ met $\tau_0 = \frac{1 - C_0}{C}$, kunnen volgende ongelijkheden worden opgeschreven.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau &\leq C + C \sum_{i=1}^{j-1} \|u_i\|^2 \tau \\ &\leq C + C \sum_{i=1}^{j-1} \left(\|u_i\|^2 + \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{k=1}^i \|\nabla u_k\|^2 \tau \right) \tau \end{aligned}$$

Pas nu de gediscretiseerde versie van Grönwall (zie stelling B.9) toe:

$$\|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau \leq C.$$

Maximaliseer de vergelijking om het te bewijzen te bekomen:

$$\max_{1 \leq j \leq N} \|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^N \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{i=1}^N \|\nabla u_i\|^2 \tau \leq C.$$

□

Bovenstaande stelling kan uitgebreid worden naar een a priori afschatting voor $\|\nabla u_i\|$ indien de beginvoorwaarde wordt versterkt.

Stelling 4.7.

Als de voorwaarden van Stelling 4.6 zijn voldaan en

$$u_0 \in H^1(\Omega),$$

dan geldt: $\max_{1 \leq j \leq N} \|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^N \|\nabla(u_i - u_{i-1})\|^2 + \sum_{i=1}^N \|\delta u_i\|^2 \tau \leq C.$

Bewijs. Beschouw de gediscretiseerde variatorische formulering (9) voor willekeurige i met

$\phi = \delta u_i$. Neem de som $\sum_{i=1}^j$ en vermenigvuldig met τ .

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^j (\delta u_i, \delta u_i) \tau + \sum_{i=1}^j (\nabla u_i, \nabla(\delta u_i)) \tau \\ &= \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k) \tau, \delta u_i \right) \tau - \sum_{i=1}^j (g_i, \delta u_i)_{\Gamma} \tau - \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau, \delta u_i \right) \tau \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k) \tau, \delta u_i \right) \tau \right| + \left| \sum_{i=1}^j (g_i, \delta u_i)_{\Gamma} \tau \right| + \left| \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau, \delta u_i \right) \tau \right| \end{aligned}$$

Hierbij gelden volgende (on)gelijkheden:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad & \sum_{i=1}^j (\delta u_i, \delta u_i) \tau = \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau \\
 \bullet \quad & \sum_{i=1}^j (\nabla u_i, \nabla(\delta u_i)) \tau = \sum_{i=1}^j (\nabla u_i, \nabla u_i - \nabla u_{i-1}) \\
 & = \frac{1}{2} (\|\nabla u_j\|^2 - \|\nabla u_0\|^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\nabla(u_i - u_{i-1})\|^2 \\
 & \text{wegens Lemma 4.4} \\
 & = \frac{1}{2} \|\nabla u_j\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\nabla(u_i - u_{i-1})\|^2 - \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad & \left| \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k) \tau, \delta u_i \right) \tau \right| \leq \sum_{i=1}^j \tau \sum_{k=0}^i \|f(u_k)\| \|\delta u_i\| \tau \\
 & \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
 & \leq \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=0}^i C_\varepsilon \|f(u_k)\|^2 \tau + \varepsilon \|\delta u_i\|^2 \right) \tau \\
 & \text{wegens Young} \\
 & \leq \sum_{i=1}^j \tau C_\varepsilon \sum_{k=0}^i \|f(u_k)\|^2 \tau + \sum_{i=1}^j \tau \varepsilon T \|\delta u_i\|^2 \\
 & \leq \sum_{i=1}^j \tau C_\varepsilon \sum_{k=0}^i \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau \\
 & \text{want } f \text{ is begrensd} \\
 & \leq C_\varepsilon + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad & \left| \sum_{i=1}^j (g_i, \delta u_i)_{\Gamma} \tau \right| = \left| \sum_{i=1}^j \int_{\Gamma} g_i(\mathbf{x})(u_i(\mathbf{x}) - u_{i-1}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right| \\
 & = \left| \int_{\Gamma} g_j(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} g_0(\mathbf{x}) u_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{i=1}^j \int_{\Gamma} (g_i(\mathbf{x}) - g_{i-1}(\mathbf{x})) u_{i-1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\
 & \text{wegens Lemma 4.4}
 \end{aligned}$$

$$\leq |(g_j, u_j)_{\Gamma}| + |(g_0, u_0)_{\Gamma}| + \left| \sum_{i=1}^j (\delta g_i, u_{i-1})_{\Gamma} \tau \right|$$

$$\begin{aligned}
 \text{met } |(g_j, u_j)_{\Gamma}| & \leq \|g_j\|_{\Gamma} \|u_j\|_{\Gamma} \\
 & \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
 & \leq C_\varepsilon \|g_j\|_{\Gamma}^2 + \varepsilon \|u_j\|_{\Gamma}^2 \\
 & \text{wegens Young} \\
 & \leq C_\varepsilon + \varepsilon \|u_j\|_{\Gamma}^2 \\
 & \text{want } g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma)) \\
 & \leq C_\varepsilon + \varepsilon (\|u_j\|^2 + \|\nabla u_j\|^2) \\
 & \text{wegens spoorstelling} \\
 & \leq C_\varepsilon + \varepsilon \|\nabla u_j\|^2 \\
 & \text{wegens Stelling 4.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{en } |(g_0, u_0)_\Gamma| &\leq \|g_0\|_\Gamma \|u_0\|_\Gamma \\
&\text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
&\leq C \|u_0\|_\Gamma \\
&\text{want } g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma)) \\
&\leq C \|u_0\|_{H^1} \\
&\text{wegens spoorstelling} \\
&\leq C \\
&\text{want } u_0 \in H^1(\Omega) \\
\text{en } \left| \sum_{i=1}^j (\delta g_i, u_{i-1})_{\Gamma\tau} \right| &\leq \sum_{i=1}^j \|\delta g_i\|_\Gamma \|u_{i-1}\|_\Gamma \tau \\
&\text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\delta g_i\|_\Gamma^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|u_{i-1}\|_\Gamma^2 \tau \\
&\text{wegens Young} \\
&\leq C + C \sum_{i=1}^j \|u_{i-1}\|_\Gamma^2 \tau \\
&\text{want } \partial_t g \in C([0, T], L_2(\Gamma)) \\
&\leq C + C \|u_0\|_\Gamma^2 + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|_\Gamma^2 \tau \\
&\text{want } \sum_{i=1}^j \|u_{i-1}\|_\Gamma^2 \leq \|u_0\|_\Gamma^2 + \sum_{i=1}^j \|u_i\|_\Gamma^2 \\
&\leq C + C \sum_{i=1}^j \|\nabla u_i\|^2 \tau + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau \\
&\text{wegens spoorstelling en wegens } u_0 \in H^1(\Omega) \\
&\leq C + C \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau \\
&\text{wegens Stelling 4.6} \\
&\leq C \\
&\text{wegens Stelling 4.6 en omdat som eindig is} \\
\text{dus } \left| \sum_{i=1}^j (g_i, \delta u_i)_{\Gamma\tau} \right| &\leq C_\varepsilon + \varepsilon \|\nabla u_j\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad & \left| \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau, \delta u_i \right) \tau \right| \leq \sum_{i=1}^j \left\| \sum_{k=1}^i |K_k| |u_{i-k}| \tau \right\| \|\delta u_i\| \tau \\
 & \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
 & \leq \sum_{i=1}^j C_\varepsilon \left\| \sum_{k=1}^i |K_k| |u_{i-k}| \tau \right\|^2 \tau + \sum_{i=1}^j \varepsilon \|\delta u_i\|^2 \tau \\
 & \text{wegens Young} \\
 & \leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \tau \left(\sum_{k=1}^i |K_k|^2 \tau \right) \left(\sum_{k=1}^i \|u_{i-k}\|^2 \tau \right) + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau \\
 & \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
 & \leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \tau \sum_{k=1}^i \|u_{i-k}\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau \\
 & \text{wegens Stelling 4.5} \\
 & \leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^j \|u_i\|^2 \tau + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau \\
 & \text{door } \sum_{k=1}^i \text{ te vergroten naar } \sum_{k=1}^j \\
 & \text{zodat de eerste som kan vergroot worden tot } CT \\
 & \text{en daarna de spookindex } k \text{ te wijzigen naar } i \\
 & \leq C_\varepsilon + \varepsilon \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau
 \end{aligned}$$

Al deze ongelijkheden in rekening brengend, geldt er, na het verwisselen van bepaalde termen van lid, dat:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \|\nabla u_j\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^j \|\nabla(u_i - u_{i-1})\|^2 + (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau & \leq C_\varepsilon + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2 \\
 & \leq C_\varepsilon
 \end{aligned}$$

Kies nu ε klein genoeg en vast, zodat:

$$\|\nabla u_j\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\nabla(u_i - u_{i-1})\|^2 + \sum_{i=1}^j \|\delta u_i\|^2 \tau \leq C$$

□

De bovenstaande stellingen bewijzen de stabiliteit van de oplossingen u_i op elk tijdstip van het gediscretiseerde systeem (10). Met behulp van deze afschattingen zal het mogelijk zijn om de convergentie aan te tonen van de Rothe-functies. Deze functies zullen de oplossingen u_i voor $i = 1, \dots, n$ samenvoegen tot een functie die gedefinieerd is over het volledige tijdsinterval.

4.5 Goed gedefinieerdheid

In dit deel, zullen de kleine deeloplossingen u_i samengevoegd worden tot een benaderende oplossing voor het oorspronkelijke probleem. Hierbij zal er gebruik gemaakt worden met de Rothe-methode. Dit betekent dat voor alle voorkomende functies een stuksgewijs constante functie \bar{v}_n en een stuksgewijs continue functie v_n wordt voorzien met:

$$\bar{v}_n(t) = \begin{cases} v_0 & \text{als } t = 0 \\ v_i & \text{als } t \in]t_{i-1}, t_i] \end{cases}$$

en

$$v_n(t) = \begin{cases} v_0 & \text{als } t = 0 \\ v_{i-1} + (t - t_{i-1})\nabla v_i & \text{als } t \in]t_{i-1}, t_i]. \end{cases}$$

Het gediscretiseerde probleem (10) zal herschreven worden op basis van de overeenkomstige Rothe-functies voor elke functie die in het probleem voorkomt. Beschouw eerst de gediscretiseerde vergelijking voor de convolutiekern (8):

$$K_i m_0 + \sum_{k=1}^i K_k m'_{i-k} \tau = (f(u_{i-1}), 1) - ((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma - m''_i$$

Hierbij gelden volgende benaderingen:

- $K_i m_0 \sim \bar{K}_n(t) m_0$
- $\sum_{k=1}^i K_k m'_{i-k} \tau \sim \sum_{k=1}^i \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{K}_n(k\tau) \bar{m}'_n(t - k\tau) ds$
 want $t \in]t_{i-1}, t_i] \Rightarrow (t - \tau) \in]t_{i-2}, t_{i-1}] \Rightarrow \dots \Rightarrow (t - k\tau) \in]t_{i-(k+1)}, t_{i-k}]$
 $\sim \sum_{k=1}^i \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{K}_n(s) \bar{m}'_n(t - s) ds$
 want $s \in]t_{k-1}, t_k]$
 $\sim \int_0^{t_i} \bar{K}_n(s) \bar{m}'_n(t - s) ds$
 $\sim \int_0^t \bar{K}_n(s) \bar{m}'_n(t - s) ds + \int_t^{t_i} \bar{K}_n(s) \bar{m}'_n(t - s) ds$
 $\sim (\bar{K}_n \star \bar{m}'_n)(t) + K_i m'_1 (t_i - t)$
 $\sim (\bar{K}_n \star \bar{m}'_n)(t) + O(\tau)$
- $(f(u_{i-1}), 1) \sim (f(\bar{u}_n(t - \tau)), 1)$
- $(\partial_t g)_i \sim \overline{\partial_t g}_n(t)$
- $m''_i \sim \bar{m}''_n(t)$

Op basis van deze benaderingen, kan (8) herschreven worden tot:

$$\bar{K}_n(t) m_0 + (\bar{K}_n \star \bar{m}'_n)(t) = (f(\bar{u}_n(t - \tau)), 1) - (\overline{\partial_t g}_n(t), 1)_\Gamma - \bar{m}''_n(t) + O(\tau) \quad (11)$$

Beschouw nu de gediscretiseerde variationele formulering (9) voor de oplossing u_i :

$$(\delta u_i, \varphi) + (\nabla u_i, \nabla \varphi) + \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau, \varphi \right) = \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k) \tau, \varphi \right) - (g_i, \varphi)_\Gamma.$$

Ook deze vergelijking kan herschreven worden door middel van de Rothe-methode door elke functie te benaderen met een overeenkomstige Rothe-functie.

- $\delta u_i \sim \frac{\partial u_n}{\partial t}(t)$
- $\nabla u_i \sim \nabla \bar{u}_n(t)$
- $g_i \sim \bar{g}_n(t)$
- $\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau \sim \sum_{k=1}^i \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{K}_n(k\tau) \bar{u}_n(t - k\tau) ds$
 want $t \in]t_{i-1}, t_i] \Rightarrow (t - \tau) \in]t_{i-2}, t_{i-1}] \Rightarrow \dots \Rightarrow (t - k\tau) \in]t_{i-(k+1)}, t_{i-k}]$
 $\sim \sum_{k=1}^i \int_{t_{k-1}}^{t_k} \bar{K}_n(s) \bar{u}_n(t - s) ds$
 want $s \in]t_{k-1}, t_k]$
 $\sim \int_0^{t_i} \bar{K}_n(s) \bar{u}_n(t - s) ds$
 $\sim \int_0^t \bar{K}_n(s) \bar{u}_n(t - s) ds + \int_t^{t_i} \bar{K}_n(s) \bar{u}_n(t - s) ds$
 $\sim (\bar{K}_n \star \bar{u}_n)(t) + K_i u_1 (t_i - t)$
 $\sim (\bar{K}_n \star \bar{u}_n)(t) + O(\tau)$
- $\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k) \tau \sim \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\bar{u}_n(s)) ds$
 $\sim \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\bar{u}_n(s)) ds$
 $\sim \int_0^t f(\bar{u}_n(s)) ds + \int_{-\tau}^0 f(\bar{u}_n(s)) ds - \int_{t_{i-1}}^t f(\bar{u}_n(s)) ds$
 $\sim \int_0^t f(\bar{u}_n(s)) ds + f(u_0)(\tau - 0) - f(u_i)(t - t_{i-1})$
 $\sim \int_0^t f(\bar{u}_n(s)) ds + O(\tau)$

Op basis van deze benaderingen, kan (9) herschreven worden tot:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(t), \varphi \right) + (\nabla \bar{u}_n(t), \varphi) + ((\bar{K}_n \star \bar{u}_n)(t), \varphi) \\ & = \left(\int_0^t f(\bar{u}_n(s)) ds, \varphi \right) - (\bar{g}_n(t), \varphi)_\Gamma + O(\tau) \|\varphi\|, \end{aligned} \quad (12)$$

waarbij de laatste term bekomen wordt door $(O(\tau), \varphi) \sim O(\tau) \|\varphi\|$ met behulp van Cauchy-Schwartz. Het gediscrètiseerde probleem is samengevoegd tot één groot probleem, namelijk tot het stelsel van twee vergelijkingen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{K}_n(t) m_0 + (\bar{K}_n \star \bar{m}'_n)(t) \\ \quad = (f(\bar{u}_n(t - \tau)), 1) - (\bar{\partial}_t \bar{g}_n(t), 1)_\Gamma - \bar{m}''_n(t) + O(\tau) \\ \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(t), \varphi \right) + (\nabla \bar{u}_n(t), \varphi) + ((\bar{K}_n \star \bar{u}_n)(t), \varphi) \\ \quad = \left(\int_0^t f(\bar{u}_n(s)) ds, \varphi \right) - (\bar{g}_n(t), \varphi)_\Gamma + O(\tau) \|\varphi\|, \end{array} \right.$$

die gelden voor willekeurige $n \in \mathbb{N}$ op het volledige tijdsinterval. Uit het vorige deel van dit hoofdstuk volgt dat het koppel $\langle u_n, K_n \rangle$ voldoet aan deze vergelijkingen op voorwaarde

dat er minstens geldt dat:

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continu en begrensd is} \\ g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma)) \\ m \in C^2([0, T]) \text{ met } m_0 \neq 0 \\ u_0 \in H^1(\Omega). \end{array} \right.$$

De eerder bekomen a priori afschatttingen kunnen ook herschreven worden met behulp van de Rothe-functies. Hierdoor kunnen de overeenkomstige afschatttingen gebruikt worden bij de analyse van de convergentie van de Rothe-functies $u_n(t)$ en $\bar{K}_n(t)$ naar de corresponderende exacte functies u en K van het probleem (7).

Stelling 4.8.

*Als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continu en begrensd is,
 $g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma))$,
 $m \in C^2([0, T])$ met $m_0 \neq 0$ en
 $u_0 \in H^1(\Omega)$,
dan gelden volgende afschatttingen:*

1. $|\bar{K}_n(t)| < C \quad \forall t \in [0, T]$
2. $\|\bar{u}_n(t)\|^2 + \sum_{i=1}^j \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\partial u_n}{\partial t}(s) ds \right\|^2 + \int_0^t \|\nabla \bar{u}_n(s)\|^2 ds \leq C$
3. $\|\nabla \bar{u}_n(t)\|^2 + \sum_{i=1}^j \left\| \nabla \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\partial u_n}{\partial t}(s) ds \right\|^2 + \int_0^t \left\| \frac{\partial u_n}{\partial t}(s) \right\|^2 ds \leq C$

Om de convergentie van $u_n(t)$ in $H^1(\Omega)$ te kunnen bewijzen, zal volgend lemma worden gebruikt.

Lemma 4.6.

Er geldt:

1. $\int_0^T \|\nabla(\bar{u}_n(t) - u_n(t))\|^2 dt + \sqrt{\int_0^T \|\bar{u}_n(t) - u_n(t)\|^2 dt} \leq C\tau$,
2. $\int_0^T \|\bar{u}_n(t) - \bar{u}_n(t - \tau)\|^2 dt \leq C\tau$.

Bewijs. Deel 1: Schat beide termen af tot $C\tau$.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\nabla(\bar{u}_n(t) - u_n(t))\|^2 dt &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\nabla(u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i - u_i)\|^2 dt \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|(t_i - t)\nabla(\delta u_i)\|^2 dt \\
&\quad \text{want } u_i - u_{i-1} = \delta u_i \tau \text{ en } |(t - t_{i-1}) - \tau| = |t_i - t| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|\nabla u_i - \nabla u_{i-1}\|^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} |t_i - t| dt \\
&\quad \text{want } |t_i - t| \leq \tau \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|\nabla u_i - \nabla u_{i-1}\|^2 \tau^2 \\
&\leq C\tau \\
&\quad \text{wegens de a priori-afschatting, zie Stelling 4.7}
\end{aligned}$$

De tweede term kan op analoge wijze worden afgeschat.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\bar{u}_n(t) - u_n(t)\|^2 dt &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|u_{i-1} + (t - t_{i-1})\delta u_i - u_i\|^2 dt \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|(t - t_i)\delta u_i\|^2 dt \\
&= \sum_{i=1}^n \|\delta u_i\|^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_i)^2 dt \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|\delta u_i\|^2 \tau^3 \\
&\leq C\tau^2 \\
&\quad \text{wegens de a priori-afschatting, zie Stelling 4.7}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\int_0^T \|\bar{u}_n(t) - u_n(t)\|^2 dt} \leq C\tau$$

Deel 2: Schat op analoge wijze het linkerlid af.

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\bar{u}_n(t) - \bar{u}_n(t - \tau)\|^2 dt &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|u_i - u_{i-1}\|^2 dt \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\delta u_i\|^2 \tau dt \\
&= \sum_{i=1}^n \|\delta u_i\|^2 \tau^2 \\
&= C\tau \\
&\quad \text{wegens Stelling 4.7}
\end{aligned}$$

□

Alvorens de convergentie van $u_n(t)$ aan te tonen, wordt er eerst nog een cruciale stelling bewezen die in het betreffende bewijs zal worden gebruikt. Merk op dat hierbij de voorwaarden op de gekende data-functies worden versterkt.

Stelling 4.9.

Als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Lipschitzcontinu is,

$g \in C^2([0, T], L_2(\Gamma))$ en

$m \in C^3([0, T])$ met $m_0 \neq 0$,

dan geldt: $\int_0^\eta |\bar{K}_r - \bar{K}_s|^2 dt \leq C \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2 dt + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right)$.

Bewijs. Beschouw de variationele formulering (11) voor de convolutiekern op basis van de Rothe-functies. Stel hierbij n gelijk aan r , respectievelijk s en trek beide vergelijkingen van elkaar af. Dan wordt volgende gelijkheid bekomen:

$$\begin{aligned} (\bar{K}_r - \bar{K}_s)m_0 &= (f(\bar{u}_r(t-\tau)) - f(\bar{u}_s(t-\tau)), 1) - (\bar{\partial}_t g_r - \bar{\partial}_t g_s, 1)_\Gamma \\ &\quad - (\bar{m}''_r - \bar{m}''_s) - (\bar{K}_r \star \bar{m}'_r - \bar{K}_s \star \bar{m}'_s) - O\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) \\ \Leftrightarrow |\bar{K}_r - \bar{K}_s| &\leq \frac{1}{|m_0|} (|(f(\bar{u}_r(t-\tau)) - f(\bar{u}_s(t-\tau)), 1)| + |(\bar{\partial}_t g_r - \bar{\partial}_t g_s, 1)_\Gamma| \\ &\quad + |\bar{m}''_r - \bar{m}''_s| + |\bar{K}_r \star \bar{m}'_r - \bar{K}_s \star \bar{m}'_s|) + O\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) \\ &\text{want } m_0 \neq 0 \\ \Leftrightarrow |\bar{K}_r - \bar{K}_s|^2 &\leq C \left(|(f(\bar{u}_r(t-\tau)) - f(\bar{u}_s(t-\tau)), 1)|^2 + |(\bar{\partial}_t g_r - \bar{\partial}_t g_s, 1)_\Gamma|^2 \right. \\ &\quad \left. + |\bar{m}''_r - \bar{m}''_s|^2 + |\bar{K}_r \star \bar{m}'_r - \bar{K}_s \star \bar{m}'_s|^2 \right) + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right) \\ &\text{want } (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \text{ en } m \in C^3([0, T]) \\ \Leftrightarrow \int_0^\eta |\bar{K}_r - \bar{K}_s|^2 dt &\leq C \left(\int_0^\eta |(f(\bar{u}_r(t-\tau)) - f(\bar{u}_s(t-\tau)), 1)|^2 dt \right. \\ &\quad + \int_0^\eta |(\bar{\partial}_t g_r - \bar{\partial}_t g_s, 1)_\Gamma|^2 dt \\ &\quad + \int_0^\eta |\bar{m}''_r - \bar{m}''_s|^2 dt \\ &\quad \left. + \int_0^\eta |\bar{K}_r \star \bar{m}'_r - \bar{K}_s \star \bar{m}'_s|^2 dt \right) + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right) \end{aligned}$$

Hierbij gelden volgende afschattingen:

- $\int_0^\eta |(f(\bar{u}_r(t-\tau)) - f(\bar{u}_s(t-\tau)), 1)|^2 dt$

$$\leq \int_0^\eta \|f(\bar{u}_r(t-\tau)) - f(\bar{u}_s(t-\tau))\|^2 |\Omega|^2 dt$$

wegens Cauchy-Schwartz

$$\leq C \int_0^\eta \|\bar{u}_r(t-\tau) - \bar{u}_s(t-\tau)\|^2 dt$$

want f is Lipschitz-continu

$$\leq C \int_0^\eta (\|\bar{u}_r(t-\tau) - \bar{u}_r(t)\|^2 + \|\bar{u}_r(t) - u_r(t)\|^2 + \|u_r(t) - u_s(t)\|^2$$

$$+ \|\bar{u}_s(t) - u_s(t)\|^2) + \|\bar{u}_s(t) - \bar{u}_s(t-\tau)\|^2 dt$$

wegens de driehoeksongelijkheid

$$\leq C \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2 dt + O\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$$

wegens Lemma 4.6 en wegens $\tau = \frac{1}{n}$

- $$\bullet \int_0^\eta |(\overline{\partial_t g_r} - \overline{\partial_t g_s}, 1)_\Gamma|^2 dt \leq \int_0^\eta \|\overline{\partial_t g_r} - \overline{\partial_t g_s}\|_\Gamma^2 |\Gamma|^2 dt$$

wegens Cauchy-Schwartz

$$\leq \int_0^\eta \left(C \|\overline{\partial_t g_r} - \partial_t g\|_\Gamma^2 + C \|\overline{\partial_t g_s} - \partial_t g\|_\Gamma^2 \right) dt$$

want $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

$$\leq O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right)$$

want $\int_0^\eta \|\overline{\partial_t g_n} - \partial_t g\|_\Gamma^2 dt \leq \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_\Gamma ((\partial_t g)_i(\mathbf{x}) - \partial_t g(\mathbf{x}, t))^2 d\mathbf{x} dt$

$$\leq \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_\Gamma ((t_i - t) \partial_{tt} g(\mathbf{x}, \zeta))^2 d\mathbf{x} dt$$

wegens de middelwaardestelling met $\zeta \in [t, t_i]$

$$\leq \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t)^2 \|\partial_{tt} g(\mathbf{x}, \zeta)\|_\Gamma^2 dt$$

$$\leq C \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t)^2 dt$$

want $g \in C^2([0, T], L_2(\Gamma))$

$$\leq C\tau^2$$

want $\sum_{i=1}^j (t_i - t_{i-1}) \leq T$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{voor } n = r, \text{ respectievelijk } s$$
- $$\bullet \int_0^\eta |\overline{m''_r} - \overline{m''_s}|^2 dt \leq \int_0^\eta |\overline{m''_r} - m''|^2 + |\overline{m''_s} - m''|^2 dt$$

wegens de driehoeksongelijkheid

$$\leq O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right)$$

want $\int_0^\eta |\overline{m''_n} - m''|^2 dt \leq \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} |m''_i - m''|^2 dt$

$$\leq \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t)^2 |m'''(\zeta)|^2 dt$$

wegens de middelwaardestelling met $\zeta \in [t, t_i]$

$$\leq C \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t)^2 dt$$

want $m \in C^3([0, T])$

$$\leq C\tau^2$$

want $\sum_{i=1}^j (t_i - t_{i-1}) \leq T$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{voor } n = r, \text{ respectievelijk } s$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \int_0^\eta |\overline{K}_r \star \overline{m}'_r - \overline{K}_s \star \overline{m}'_s|^2 dt &\leq \int_0^\eta (|\overline{K}_r - \overline{K}_s| \star |m'| + |\overline{K}_r| \star |\overline{m}'_r - m'| \\
 &\quad + |\overline{K}_s| \star |\overline{m}'_s - m'|)^2 dt \\
 &\text{wegens de driehoeksongelijkheid} \\
 &\text{en de definitie van een convolutie} \\
 &\leq C \int_0^\eta (|\overline{K}_r - \overline{K}_s| \star |m'|)^2 dt \\
 &\quad + C \int_0^\eta (|\overline{K}_r| \star |\overline{m}'_r - m'|)^2 dt \\
 &\quad + C \int_0^\eta (|\overline{K}_s| \star |\overline{m}'_s - m'|)^2 dt
 \end{aligned}$$

$$\text{met } \int_0^\eta (|\overline{K}_r - \overline{K}_s| \star |m'|)^2 dt$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_0^\eta \left(\int_0^t |\overline{K}_r(\xi) - \overline{K}_s(\xi)| |m'(t-\xi)| d\xi \right)^2 dt \\
 &\leq \int_0^\eta \left(\int_0^t |\overline{K}_r(\xi) - \overline{K}_s(\xi)|^2 d\xi \int_0^t |m'(t-\xi)|^2 d\xi \right) dt
 \end{aligned}$$

wegens Cauchy-Schwartz

$$\leq C \int_0^\eta \int_0^t |\overline{K}_r(\xi) - \overline{K}_s(\xi)|^2 d\xi dt$$

want $m \in C^3([0, t])$

$$\text{en } \int_0^\eta (|\overline{K}_n| \star |\overline{m}'_n - m'|)^2 dt$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_0^\eta \left(\int_0^t |\overline{K}_n(t-\xi)| |\overline{m}'_n(\xi) - m'(\xi)| d\xi \right)^2 dt \\
 &\leq \int_0^\eta \left(\int_0^t |\overline{K}_n(t-\xi)|^2 d\xi \int_0^t |\overline{m}'_n(\xi) - m'(\xi)|^2 d\xi \right) dt
 \end{aligned}$$

wegens Cauchy-Schwartz

$$\leq C \int_0^\eta \int_0^t |\overline{m}'_n(\xi) - m'(\xi)|^2 d\xi dt$$

wegens Stelling 4.8 - eigenschap 1

$$\leq C \int_0^\eta \left(\sum_{k=1}^i \int_{t_{k-1}}^{t_k} |m'_k - m'(\xi)|^2 d\xi \right) dt$$

$$\leq C \int_0^\eta \left(\sum_{k=1}^i \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - \xi)^2 |m''(\zeta)|^2 d\xi \right) dt$$

wegens de middelwaardestelling met $\zeta \in [\xi, t_k]$

$$\leq C \int_0^\eta \left(\sum_{k=1}^i \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - \xi)^2 d\xi \right) dt$$

want $m \in C^3([0, T])$

$$\leq C\tau^2$$

$$\text{want } \sum_{i=1}^j (t_i - t_{i-1}) \leq T$$

$$\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{voor } n = r, \text{ respectievelijk } s$$

$$\text{dus } \int_0^\eta |\overline{K}_r \star \overline{m}'_r - \overline{K}_s \star \overline{m}'_s|^2 dt$$

$$\leq C \int_0^\eta \int_0^t |\overline{K}_r(\xi) - \overline{K}_s(\xi)|^2 d\xi dt + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right)$$

Met behulp van deze afschattingen, kan volgende ongelijkheid worden bekomen:

$$\begin{aligned} \int_0^\eta |\overline{K}_r - \overline{K}_s|^2 dt & \\ & \leq C \int_0^\eta \int_0^t |\overline{K}_r(\xi) - \overline{K}_s(\xi)|^2 d\xi dt + C \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2 dt + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right) \end{aligned}$$

Pas nu de stelling van Grönwall toe om het gevraagde te bekomen:

$$\begin{aligned} \int_0^\eta |\overline{K}_r - \overline{K}_s|^2 dt & \leq \left(C \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2 dt + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right) \right) e^C \\ & \leq C \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2 dt + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right) \end{aligned}$$

□

Alle nodige afschattingen zijn bewezen om de convergentie van $u_n(t)$ na te gaan.

Stelling 4.10.

Als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Lipschitzcontinu is,

$$g \in C^2([0, T], L_2(\Gamma)),$$

$m \in C^3([0, T])$ met $m_0 \neq 0$ en

$$u_0 \in H^1(\Omega),$$

dan geldt er dat $\exists u \in L_2((0, T), H^1(\Omega)) : u_n \rightarrow u$ voor $n \rightarrow \infty$.

Bewijs. De Rothe-functies u_n zijn allemaal afkomstig van de Hilbertruimte $L_2((0, T), H^1(\Omega))$.

Om convergentie te bewijzen in een Hilbertruimte volstaat het om te bewijzen dat de rij u_n een Cauchy-rij is in de ruimte.

Beschouw de variationele formulering (12) voor de oplossingsfunctie op basis van de Rothe-functies. Stel hierbij n gelijk aan r , respectievelijk s en trek beide vergelijkingen van elkaar af. Stel daarenboven $\varphi = \overline{u}_r(t) - \overline{u}_s(t)$ en neem de integraal over de tijd van beide leden. Dan wordt volgende vergelijking bekomen:

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(t), \overline{u}_r(t) - \overline{u}_s(t) \right) dt + \int_0^\eta (\nabla(\overline{u}_r - \overline{u}_s)(t), \nabla(\overline{u}_r - \overline{u}_s)(t)) dt & \\ = \int_0^\eta \left(\int_0^t f(\overline{u}_r(\xi)) - f(\overline{u}_s(\xi)) d\xi, \overline{u}_r(t) - \overline{u}_s(t) \right) dt & \\ - \int_0^\eta (\overline{g}_r(t) - \overline{g}_s(t), \overline{u}_r(t) - \overline{u}_s(t))_\Gamma dt & \\ - \int_0^\eta ((\overline{K}_r \star \overline{u}_r)(t) - (\overline{K}_s \star \overline{u}_s)(t), \overline{u}_r(t) - \overline{u}_s(t)) dt & \\ + O\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) \int_0^\eta \|\overline{u}_r(t) - \overline{u}_s(t)\| dt & \end{aligned}$$

De eerste term is ook nog te schrijven als:

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(t), u_r(t) - u_s(t) \right) dt + \int_0^\eta \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(t), \overline{u}_r(t) - u_r(t) \right) dt & \\ + \int_0^\eta \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(t), u_s(t) - \overline{u}_s(t) \right) dt & \end{aligned}$$

Hierdoor is de oorspronkelijke vergelijking te herschikken tot:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\eta \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(t), u_r - u_s \right) dt + \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_r - \bar{u}_s)(t)\|^2 dt \\
&= \int_0^\eta \left(\int_0^t f(\bar{u}_r(\xi)) - f(\bar{u}_s(\xi)) d\xi, \bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t) \right) dt \\
&\quad - \int_0^\eta (\bar{g}_r(t) - \bar{g}_s(t), \bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t))_\Gamma dt \\
&\quad - \int_0^\eta ((\bar{K}_r \star \bar{u}_r)(t) - (\bar{K}_s \star \bar{u}_s)(t), \bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)) dt \\
&\quad - \int_0^\eta \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(t), \bar{u}_r(t) - u_r(t) \right) dt \\
&\quad + \int_0^\eta \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}(t) + \frac{\partial u_s}{\partial t}(t), \bar{u}_s(t) - u_s(t) \right) dt \\
&\quad + O\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) \int_0^\eta \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\| dt \\
\Leftrightarrow & \int_0^\eta \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(t), u_r - u_s \right) dt + \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_r - \bar{u}_s)(t)\|^2 dt \\
&\leq \left| \int_0^\eta \left(\int_0^t f(\bar{u}_r(\xi)) - f(\bar{u}_s(\xi)) d\xi, \bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t) \right) dt \right| \\
&\quad + \left| \int_0^\eta (\bar{g}_r(t) - \bar{g}_s(t), \bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t))_\Gamma dt \right| \\
&\quad + \left| \int_0^\eta ((\bar{K}_r \star \bar{u}_r)(t) - (\bar{K}_s \star \bar{u}_s)(t), \bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)) dt \right| \\
&\quad + \left| \int_0^\eta \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(t), \bar{u}_r(t) - u_r(t) \right) dt \right| \\
&\quad + \left| \int_0^\eta \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(t), \bar{u}_s(t) - u_s(t) \right) dt \right| \\
&\quad + O\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) \int_0^\eta \|\bar{u}_r - \bar{u}_s\| dt
\end{aligned}$$

Hierbij gelden volgende (on)gelijkheden:

- $$\begin{aligned}
& \int_0^\eta \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(t), u_r(t) - u_s(t) \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^\eta \frac{\partial}{\partial t} \{(u_r - u_s)^2(\mathbf{x}, t)\} dt d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega (u_r - u_s)^2(\mathbf{x}, \eta) - (u_r - u_s)^2(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \\
&= C \|u_r(\eta) - u_s(\eta)\|^2 \\
&\quad \text{want } u_r(0) = u_0 = u_s(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet \left| \int_0^\eta \left(\int_0^t f(\bar{u}_r(\xi)) - f(\bar{u}_s(\xi)) d\xi, \bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t) \right) dt \right| \\
 & \leq \int_0^\eta \left| \left(\int_0^t f(\bar{u}_r(\xi)) - f(\bar{u}_s(\xi)) ds, \bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t) \right) \right| dt \\
 & \leq \int_0^\eta \left(\int_0^t \|f(\bar{u}_r(\xi)) - f(\bar{u}_s(\xi))\| d\xi \right) \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\| dt \\
 & \quad \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
 & \leq C \int_0^\eta \left(\int_0^t \|\bar{u}_r(\xi) - \bar{u}_s(\xi)\| d\xi \right) \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\| dt \\
 & \quad \text{want } f \text{ is Lipschitz-continu} \\
 & \leq C \int_0^\eta \left(\int_0^\eta \|\bar{u}_r(\xi) - \bar{u}_s(\xi)\| d\xi \right)^2 dt + C \int_0^\eta \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\|^2 dt \\
 & \quad \text{wegens Young} \\
 & \leq C \int_0^\eta \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\|^2 dt \\
 & \quad \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
 & \leq C \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 + \|\bar{u}_r(t) - u_r(t)\|^2 + \|\bar{u}_s(t) - u_s(t)\|^2 dt \\
 & \quad \text{want } (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \\
 & \leq C \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 dt + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right) \\
 & \quad \text{wegens Lemma 4.6} \\
 & \bullet \left| \int_0^\eta (\bar{g}_r(t) - \bar{g}_s(t), \bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t))_\Gamma dt \right| \\
 & \leq \int_0^\eta \|\bar{g}_r(t) - \bar{g}_s(t)\|_\Gamma \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\|_\Gamma dt \\
 & \quad \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
 & \leq \frac{1}{2} \int_0^\eta \|\bar{g}_r(t) - \bar{g}_s(t)\|_\Gamma^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^\eta \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\|_\Gamma^2 dt \\
 & \quad \text{wegens Young} \\
 & \leq C \int_0^\eta \|\bar{g}_r(t) - g(t)\|_\Gamma^2 dt + C \int_0^\eta \|\bar{g}_s(t) - g(t)\|_\Gamma^2 dt \\
 & \quad + C \int_0^\eta \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\|_\Gamma^2 dt \\
 \text{met } & C \int_0^\eta \|\bar{g}_n(t) - g(t)\|_\Gamma^2 dt \leq C \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|g_i - g(t)\|_\Gamma^2 dt \\
 & \leq C \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t)^2 \|\partial_t g(\zeta)\|_\Gamma^2 dt \\
 & \quad \text{wegens middelwaardstelling met } \zeta \in [t_{i-1}, t_i] \\
 & \leq C \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t)^2 dt \\
 & \quad \text{want } g \in C^2([0, T], L_2(\Gamma)) \\
 & \leq C\tau^2 \\
 & \quad \text{want } \sum_{i=1}^j (t_i - t_{i-1}) \leq T \\
 & \leq O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{voor } n = r, \text{ respectievelijk } s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{en } C \int_0^\eta & \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\|_\Gamma^2 dt \\
 & \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\|^2 dt + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t))\|^2 dt \\
 & \quad \text{wegens de stelling van Nečas} \\
 & \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 + \|\bar{u}_r(t) - u_r(t)\|^2 + \|\bar{u}_s(t) - u_s(t)\|^2 dt \\
 & \quad + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t))\|^2 dt \\
 & \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 dt + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t))\|^2 dt \\
 & \quad + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right)
 \end{aligned}$$

wegens Lemma 4.6

$$\begin{aligned}
 \text{dus } \left| \int_0^\eta (\bar{g}_r(t) - \bar{g}_s(t), \bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t))_\Gamma dt \right| \\
 \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 dt + \varepsilon \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t))\|^2 dt \\
 + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \left| \int_0^\eta ((\bar{K}_r \star \bar{u}_r)(t) - (\bar{K}_s \star \bar{u}_s)(t), \bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)) dt \right| \\
 \leq \int_0^\eta \|(\bar{K}_r \star \bar{u}_r)(t) - (\bar{K}_s \star \bar{u}_s)(t)\| \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\| dt \\
 \quad \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
 \leq \frac{1}{2} \int_0^\eta \|(\bar{K}_r \star \bar{u}_r)(t) - (\bar{K}_s \star \bar{u}_s)(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^\eta \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\|^2 dt \\
 \quad \text{wegens Young} \\
 \leq C \int_0^\eta \|((\bar{K}_r - \bar{K}_s) \star \bar{u}_r)(t)\|^2 dt + C \int_0^\eta \|(\bar{K}_s \star (\bar{u}_r - \bar{u}_s))(t)\|^2 dt \\
 \quad + C \int_0^\eta \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\|^2 dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{met } C \int_0^\eta \|((\bar{K}_r - \bar{K}_s) \star \bar{u}_r)(t)\|^2 dt \\
 \leq C \int_0^\eta \int_0^t |(\bar{K}_r(\xi) - \bar{K}_s(\xi))|^2 \|\bar{u}_r(t - \xi)\|^2 d\xi dt \\
 \quad \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
 \leq C \int_0^\eta \int_0^t |(\bar{K}_r(\xi) - \bar{K}_s(\xi))|^2 d\xi dt \\
 \quad \text{wegens Stelling 4.8-eigenschap 2} \\
 \leq C \int_0^\eta |\bar{K}_r(t) - \bar{K}_s(t)|^2 dt \\
 \leq C \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 dt + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right) \\
 \quad \text{wegens Stelling 4.9}
 \end{aligned}$$

en $C \int_0^\eta \|(\bar{K}_s \star (\bar{u}_r - \bar{u}_s))(t)\|^2 dt$
 $\leq C \int_0^\eta \int_0^t |\bar{K}_s(t-\xi)|^2 \|(\bar{u}_r(\xi) - \bar{u}_s(\xi))\|^2 d\xi dt$
 wegens Cauchy-Schwartz
 $\leq C \int_0^\eta \int_0^t \|(\bar{u}_r(\xi) - \bar{u}_s(\xi))\|^2 d\xi dt$
 wegens Stelling 4.8-eigenschap 1
 $\leq C \int_0^\eta \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\|^2 dt$
 $\leq C \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 + \|\bar{u}_r(t) - u_r(t)\|^2 + \|\bar{u}_s(t) - u_s(t)\|^2 dt$
 $\leq C \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 dt + O(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2})$
 wegens Lemma 4.6

en $C \int_0^\eta \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\|^2 dt$
 $\leq C \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 + \|\bar{u}_r(t) - u_r(t)\|^2 + \|\bar{u}_s(t) - u_s(t)\|^2 dt$
 $\leq C \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 dt + O(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2})$
 wegens Lemma 4.6

dus $\left| \int_0^\eta ((\bar{K}_r \star \bar{u}_r)(t) - (\bar{K}_s \star \bar{u}_s)(t), \bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)) dt \right|$
 $\leq C \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 dt + O(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2})$

- $\left| \int_0^\eta \left(\frac{\partial u_r}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(t), \bar{u}_n(t) - u_n(t) \right) dt \right|$
 $\leq \int_0^\eta \left\| \frac{\partial u_r}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(t) \right\| \|\bar{u}_n(t) - u_n(t)\| dt$
 wegens Cauchy-Schwartz
 $\leq \sqrt{\int_0^\eta \left\| \frac{\partial u_r}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}(t) \right\|^2 dt} \sqrt{\int_0^\eta \|\bar{u}_n(t) - u_n(t)\|^2 dt}$
 wegens Hölder
 $\leq C \sqrt{\int_0^\eta \left\| \frac{\partial u_r}{\partial t}(t) \right\|^2 + \left\| \frac{\partial u_s}{\partial t}(t) \right\|^2 dt} \sqrt{\int_0^\eta \|\bar{u}_n(t) - u_n(t)\|^2 dt}$
 want $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$
 $\leq C \sqrt{\int_0^\eta \|\bar{u}_n(t) - u_n(t)\|^2 dt}$
 wegens Stelling 4.8-eigenschap 3
 $\leq O(\frac{1}{n})$ voor $n = r$, respectievelijk s
 wegens Lemma 4.6

- $O(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}) \int_0^\eta \|\bar{u}_r(t) - \bar{u}_s(t)\| dt \leq O(\frac{1}{r} + \frac{1}{s})$
 wegens Stelling 4.8-eigenschap 2

Met behulp van deze ongelijkheden kan volgende ongelijkheid worden bekomen:

$$\begin{aligned} C \|u_r(\eta) - u_s(\eta)\|^2 + (1 - \varepsilon) \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_r - \bar{u}_s)(t)\|^2 dt \\ \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 dt + O\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

Kies nu ε voldoende klein en vast zodat er geldt dat:

$$\begin{aligned} \|u_r(\eta) - u_s(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_r - \bar{u}_s)(t)\|^2 dt \\ \leq C \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 dt + O\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) \\ \leq C \int_0^\eta \left(\|u_r(t) - u_s(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla(\bar{u}_r - \bar{u}_s)(\xi)\|^2 d\xi \right) dt + O\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

Pas nu de stelling van Grönwall toe:

$$\|u_r(\eta) - u_s(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_r - \bar{u}_s)(t)\|^2 dt \leq O\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right).$$

Bovenstaande ongelijkheid geldt voor willekeurige $\eta \in [0, T]$. Het is dus toegelaten om deze vergelijking te maximaliseren over η , i.e.

$$\max_{\eta \in [0, T]} \|u_r(\eta) - u_s(\eta)\|^2 + \int_0^T \|\nabla(\bar{u}_r - \bar{u}_s)(t)\|^2 dt \leq O\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right). \quad (13)$$

De oplossingsfunctie u_n is dus een Cauchy-rij in $C([0, T], L_2(\Omega))$, welke een Banachruimte is. Dit betekent dat u_n convergeert naar een oplossing $u \in C([0, T], L_2(\Omega))$.

Analoog volgt uit deze vergelijking dat \bar{u}_n een Cauchy-rij is in $L_2((0, T), H^1(\Omega))$ en dus convergeert naar een oplossing $\tilde{u} \in L_2((0, T), H^1(\Omega))$. Uit Lemma 4.6 volgt echter dat:

$$\int_0^T \|\nabla(\bar{u}_n(t) - u_n(t))\|^2 dt \leq C \frac{1}{n}.$$

De functies u_n en \bar{u}_n convergeren naar dezelfde limiet in de ruimte $L_2((0, T), H^1(\Omega))$. De twee limietfuncties u en \tilde{u} vallen dus samen in $L_2((0, T), H^1(\Omega))$ op voorwaarde natuurlijk dat u_n convergeert in $L_2((0, T), H^1(\Omega))$. Omdat $L_2((0, T), H^1(\Omega))$ een Hilbertruimte is, volstaat het aan te tonen dat u_n een Cauchy-rij vormt in die ruimte.

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \|\nabla(u_r - u_s)(t)\|^2 dt \\ \leq \int_0^\eta \|\nabla(u_r - \bar{u}_r)\|^2 dt + \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_r - \bar{u}_s)(t)\|^2 dt + \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_s - u_s)(t)\|^2 dt \\ \leq O\left(\frac{1}{r}\right) + \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_r - \bar{u}_s)(t)\|^2 dt + O\left(\frac{1}{s}\right) \\ \text{wegens Lemma 4.6} \\ \leq O\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) \\ \text{wegens vergelijking (13)} \end{aligned}$$

Bij deze is aangetoond dat de functies u_n convergeren in de ruimte $L_2((0, T), H^1(\Omega))$.

Samenvattend, vormen de Rothe-functies u_n een Cauchy-rij in $C([0, T], L_2(\Omega))$ en in $L_2((0, T), H^1(\Omega))$. De functies u_n convergeren dus naar de limietfunctie $u \in C([0, T], L_2(\Omega)) \cap L_2((0, T), H^1(\Omega))$, welke dezelfde limietfunctie is voor de functies \bar{u}_n . \square

Opdat de limietfunctie u , bekomen uit voorgaande stelling, een oplossing vormt voor het probleem met de vergelijkingen (11) en (12), moet echter ook aangetoond worden dat $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ convergeert naar de overeenkomstige limietfunctie $\partial_t u$. Dit wordt in de volgende stelling bewezen.

Stelling 4.11.

Als de voorwaarden van Stelling 4.10 zijn voldaan en u is de limietfunctie bekomen uit diezelfde stelling, dan $\frac{\partial u_n}{\partial t} \rightharpoonup \partial_t u$ in de ruimte $L_2((0, T), L_2(\Omega))$.

Bewijs. Uit Stelling 4.8 volgt dat $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ begrensd is in de ruimte $L_2((0, T), L_2(\Omega))$. De ruimte $L_2((0, T), L_2(\Omega))$ is een separabele Hilbertruimte, dus er bestaat een $z \in L_2((0, T), L_2(\Omega))$ waarvoor $\frac{\partial u_n}{\partial t} \rightharpoonup z$. Dit volgt uit Stelling B.7 uit Hoofdstuk 2. Er moet dus enkel bewezen worden dat z en $\partial_t u$ samenvallen in de limiet.

Beschouw volgende gelijkheid die geldt $\forall \varphi \in L_2(\Omega)$:

$$(u_n(t) - u_0, \varphi) = \int_0^t \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(s), \varphi \right) ds$$

Deze vergelijking volgt uit de hoofdstelling van de integralen. Neem de limiet $n \rightarrow \infty$, dan geldt wegens Stelling 4.10:

$$(u(t) - u_0, \varphi) = \int_0^t (z(s), \varphi) ds$$

Stel nu t respectievelijk gelijk aan $t+h$ en t , trek beide vergelijkingen van elkaar af en vermenigvuldig beide leden met $\frac{1}{h}$, dan wordt volgende gelijkheid bekomen:

$$\left(\frac{u(t+h) - u(t)}{h}, \varphi \right) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (z(s), \varphi) ds$$

Om aan te tonen dat z en $\partial_t u$ samenvallen in de limiet in de ruimte $L_2((0, T), L_2(\Omega))$, moet aangetoond worden dat de norm van het verschil tussen beide functies naar nul convergeert.

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - z(t) \right\| &= \sup_{\|\varphi\|=1} \left(\frac{u(t+h) - u(t)}{h} - z(t), \varphi \right) \\
&= \sup_{\|\varphi\|=1} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (z(s) - z(t), \varphi) ds \\
&\quad \text{wegens de gelijkheid hierboven bekomen} \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|=1} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|z(s) - z(t)\| \|\varphi\| ds \\
&\quad \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\
&\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|z(s) - z(t)\| ds \\
&\leq \sqrt{\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|z(s) - z(t)\|^2 ds} \\
&\quad \text{wegens Hölder} \\
&\rightarrow 0 \quad \text{als } h \rightarrow 0
\end{aligned}$$

In andere woorden, $\frac{\partial u_n}{\partial t} \rightarrow z = \partial_t u$. □

De bovenstaande stellingen bewijzen het bestaan van een limietfunctie u voor de Rothe-functies die een oplossing vormen voor het probleem met vergelijkingen (11) en (12) uit dit project. Met behulp van Stelling 4.9, is ook het bewijs voor het bestaan van een limietfunctie $K \in L_2(0, T)$ voor de overeenkomstige Rothe-functies van datzelfde probleem gegeven. De stelling zegt namelijk dat:

$$\int_0^\eta |\overline{K}_r - \overline{K}_s|^2 dt \leq C \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 dt + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right),$$

en uit het bewijs van Stelling 4.10 is bekomen dat $\|u_r(t) - u_s(t)\|^2 \leq O\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$. Met andere woorden, \overline{K}_n vormt een Cauchy-rij in de Hilbertruimte $L_2(0, T)$ en convergeert dus naar een limietfunctie K in diezelfde ruimte.

Het bestaan van de limietfuncties (u, K) , garandeert echter nog niet dat deze ook een oplossing vormen voor het oorspronkelijk probleem (7). Indien de vergelijkingen (11) en (12) convergeren naar het oorspronkelijk probleem, zullen de limietfuncties (u, K) ook een oplossing vormen van oorspronkelijk probleem. Dit wordt in de volgende stelling nagegaan en er wordt daarenboven bewezen dat dit oplossingskoppel uniek is.

Stelling 4.12.

Als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Lipschitzcontinu is,
 $g \in C^2([0, T], L_2(\Gamma))$,
 $m \in C^3([0, T])$ met $m_0 \neq 0$ en
 $u_0 \in H^1(\Omega)$,

dan bestaat er een uniek oplossingskoppel (u, K) voor het probleem (7).

Bewijs. Deel A: Bewijs dat elke term in de vergelijking (11) en (12) convergeert naar zijn corresponderende term van vergelijking (6), respectievelijk (4).

Deel 1: *Beschouw eerst de vergelijking (11) en integreer over de tijd.*

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \overline{K}_n(t) m_0 dt + \int_0^\eta (\overline{K}_n \star \overline{m}'_n)(t) dt \\ = \int_0^\eta (f(\overline{u}_n(t - \tau)), 1) dt - \int_0^\eta (\overline{\partial}_t g_n(t), 1)_\Gamma dt - \int_0^\eta \overline{m}''_n(t) dt + O(\tau) \end{aligned}$$

Neem nu de limiet $n \rightarrow \infty$. Uit het bewijs van Stelling 4.10 en 4.9 volgt dat:

- $\left| \int_0^\eta \overline{m}''(t) dt - \int_0^\eta m''(t) dt \right| \leq \int_0^\eta |\overline{m}''(t) - m''(t)| dt$

$$\leq \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} |m''_i - m''| dt$$

$$\leq \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t) |m'''(\xi)| dt$$

wegens de middelwaardstelling met $\xi \in [t, t_i]$

$$\leq C \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t) dt$$

want $m \in C^3([0, T])$

$$\leq C \frac{1}{n}$$

$$\rightarrow 0$$
- $\left| \int_0^\eta (\overline{\partial}_t g_n(t), 1)_\Gamma dt - \int_0^\eta (\partial_t g(t), 1)_\Gamma dt \right|$

$$\leq \int_0^\eta |(\overline{\partial}_t g_n(t) - \partial_t g(t), 1)_\Gamma| dt$$

$$\leq C \int_0^\eta \|\overline{\partial}_t g_n(t) - \partial_t g(t)\|_\Gamma dt$$

wegens Cauchy-Schwartz

$$\leq C \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|(\partial_t g)_i - \partial_t g(t)\|_\Gamma dt$$

$$\leq C \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t) \|\partial_t g(\xi)\|_\Gamma dt$$

wegens de middelwaardstelling met $\xi \in [t, t_i]$

$$\leq C \sum_{i=1}^j \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t) dt$$

want $g \in C^2([0, T], L_2(\Gamma))$

$$\leq C \frac{1}{n}$$

$$\rightarrow 0$$

- $$\left| \int_0^\eta (f(\bar{u}_n(t-\tau)), 1) dt - \int_0^\eta (f(u(t)), 1) dt \right|$$

$$\leq \int_0^\eta |(f(\bar{u}_n(t-\tau)) - f(u(t)), 1)| dt$$

$$\leq C \int_0^\eta \|f(\bar{u}_n(t-\tau)) - f(u(t))\| dt$$

wegens Cauchy-Schwartz

$$\leq C \int_0^\eta \|\bar{u}_n(t-\tau) - u(t)\| dt$$

want f is Lipschitzcontinu

$$\leq C \int_0^\eta \|\bar{u}_n(t-\tau) - \bar{u}_n(t)\| dt + C \int_0^\eta \|\bar{u}_n(t) - u(t)\| dt$$

wegens de driehoeksongelijkheid

$$\leq C \sqrt{\int_0^\eta \|\bar{u}_n(t-\tau) - \bar{u}_n(t)\|^2 dt} + C \sqrt{\int_0^\eta \|\bar{u}_n(t) - u(t)\|^2 dt}$$

wegens Hölder

$\rightarrow 0$

wegens Lemma 4.6 en Stelling 4.10
- $$\left| \int_0^\eta (\bar{K}_n \star \bar{m}'_n)(t) dt - \int_0^\eta (K \star m')(t) dt \right|$$

$$\leq \int_0^\eta |(\bar{K}_n \star \bar{m}'_n)(t) - (K \star m')(t)| dt$$

$$\leq \int_0^\eta |((\bar{K}_n - K) \star m')(t)| dt + \int_0^\eta |(\bar{K}_n \star (\bar{m}'_n - m'))(t)| dt$$

wegens driehoeksongelijkheid

$$\leq \int_0^\eta |\bar{K}_n(t) - K(t)| \star |m'(t)| dt + \int_0^\eta |\bar{K}_n(t)| \star |\bar{m}'_n(t) - m'(t)| dt$$

$$\leq C \int_0^\eta |\bar{K}_n(t) - K(t)| dt + C \int_0^\eta |\bar{m}'_n(t) - m'(t)| dt$$

wegens $m \in C^3([0, T])$ en wegens Stelling 4.8

$$\leq C \sqrt{\int_0^\eta |\bar{K}_n(t) - K(t)|^2 dt} + C \int_0^\eta |\bar{m}'_n(t) - m'(t)| dt$$

wegens Hölder

$\rightarrow 0$

wegens Stelling 4.10 en op analoge wijze als het eerste puntje

$$\left| \int_0^\eta \bar{m}''(t) - m''(t) dt \right| \text{ in dit bewijs}$$
- $$\left| \int_0^\eta K_n(t) dt - \int_0^\eta K(t) dt \right| \leq \int_0^\eta |K_n(t) - K(t)| dt$$

$\rightarrow 0$

wegens Hölder en Stelling 4.10

Uit bovenstaande limieten is nu duidelijk dat de vergelijking

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \bar{K}_n(t) m_0 dt + \int_0^\eta (\bar{K}_n \star \bar{m}'_n)(t) dt \\ = \int_0^\eta (f(\bar{u}_n(t-\tau)), 1) dt - \int_0^\eta (\bar{\partial}_t g_n(t), 1)_\Gamma dt - \int_0^\eta \bar{m}''_n(t) dt + O(\tau), \end{aligned}$$

convergeert naar de vergelijking

$$\begin{aligned} \int_0^\eta K(t) m_0 dt + \int_0^\eta (K \star m')(t) dt \\ = \int_0^\eta (f(u(t)), 1) dt - \int_0^\eta (\partial_t g(t), 1)_\Gamma dt - \int_0^\eta m''(t) dt \end{aligned}$$

Neem nu de afgeleide naar de tijd om de vergelijking (6) te bekomen en daarbij het gevraagde bewezen te hebben.

Deel 2: *Beschouw nu de vergelijking (12) en integreer over de tijd.*

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(t), \varphi \right) dt + \int_0^\eta (\nabla \bar{u}_n(t), \varphi) dt + \int_0^\eta ((\bar{K}_n \star \bar{u}_n)(t), \varphi) dt \\ = \int_0^\eta \left(\int_0^t f(\bar{u}_n(s)) ds, \varphi \right) dt - \int_0^\eta (\bar{g}_n(t), \varphi)_\Gamma dt + O(\tau) \int_0^\eta \|\varphi\| dt \end{aligned}$$

Neem de limiet $n \rightarrow \infty$. Uit het bewijs van Stellingen 4.11, 4.10 en 4.9 volgt dat:

- $\left| \int_0^\eta (\bar{g}_n(t), \varphi)_\Gamma dt - \int_0^\eta (g(t), \varphi)_\Gamma dt \right|$

$$\leq \int_0^\eta |(\bar{g}_n(t) - g(t), \varphi)_\Gamma| dt$$

$$\leq C \int_0^\eta \|\bar{g}_n(t) - g(t)\|_\Gamma \|\varphi\|_{H^1} dt$$

wegens Cauchy-Schwartz en de spoorstelling

$$\leq C \int_0^\eta \|\bar{g}_n(t) - g(t)\|_\Gamma dt$$

wegens $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\rightarrow 0$$

analoog aan het tweede puntje in Deel 1 van dit bewijs
- $\left| \int_0^\eta \left(\int_0^t f(\bar{u}_n(s)) ds, \varphi \right) dt - \int_0^\eta \left(\int_0^t f(u(s)) ds, \varphi \right) dt \right|$

$$\leq \int_0^\eta \left| \left(\int_0^t f(\bar{u}_n(s)) - f(u(s)) ds, \varphi \right) \right| dt$$

$$\leq \int_0^\eta \left\| \int_0^t f(\bar{u}_n(s)) - f(u(s)) ds \right\| \|\varphi\| dt$$

wegens Cauchy-Schwartz

$$\leq C \int_0^\eta \left\| \int_0^t \bar{u}_n(s) - u(s) ds \right\| dt$$

want f is Lipschitz-continu en $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\rightarrow 0$$

wegens Stelling 4.10

- $$\left| \int_0^\eta ((\bar{K}_n \star \bar{u}_n)(t), \varphi) dt - \int_0^\eta ((K \star u)(t), \varphi) dt \right|$$

$$\leq \int_0^\eta |((\bar{K}_n \star \bar{u}_n)(t) - (K \star u)(t), \varphi)| dt$$

$$\leq \int_0^\eta \|(\bar{K}_n \star \bar{u}_n)(t) - (K \star u)(t)\| \|\varphi\| dt$$

wegens Cauchy-Schwartz

$$\leq \int_0^\eta \|(\bar{K}_n \star \bar{u}_n)(t) - (K \star u)(t)\| dt$$

wegens $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\leq C \int_0^\eta \|((\bar{K}_n - K) \star u)(t)\| dt + C \int_0^\eta \|(\bar{K}_n \star (\bar{u}_n - u))(t)\| dt$$

wegens de driehoeksongelijkheid

$$\leq C \int_0^\eta (|\bar{K}_n - K| \star \|u\|)(t) dt + C \int_0^\eta (|\bar{K}_n| \star \|\bar{u}_n - u\|)(t) dt$$

$$\leq C \int_0^\eta |\bar{K}_n(t) - K(t)| dt + C \int_0^\eta \|\bar{u}_n(t) - u(t)\| dt$$

want $u \in L_2((0, T), H^1(\Omega))$ en wegens Stelling 4.8

$$\leq C \sqrt{\int_0^\eta |\bar{K}_n(t) - K(t)|^2 dt} + C \sqrt{\int_0^\eta \|\bar{u}_n(t) - u(t)\|^2 dt}$$

$$\rightarrow 0$$

wegens Stelling 4.10
- $$\left| \int_0^\eta (\nabla \bar{u}_n(t), \varphi) dt - \int_0^\eta (\nabla u(t), \varphi) dt \right| \leq \int_0^\eta |(\nabla(\bar{u}_n - u)(t), \varphi)| dt$$

$$\leq \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_n - u)(t)\| \|\varphi\| dt$$

wegens Cauchy-Schwartz

$$\leq \int_0^\eta \|\nabla(\bar{u}_n - u)(t)\| dt$$

want $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$\rightarrow 0$$

wegens Hölder en Stelling 4.10
- $$\int_0^\eta \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(t), \varphi \right) dt - \int_0^\eta (\partial_t u(t), \varphi) dt \rightarrow 0$$

wegens Stelling 4.11

Uit bovenstaande limieten is nu duidelijk dat de vergelijking

$$\int_0^\eta \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(t), \varphi \right) dt + \int_0^\eta (\nabla \bar{u}_n(t), \varphi) dt + \int_0^\eta ((\bar{K}_n \star \bar{u}_n)(t), \varphi) dt$$

$$= \int_0^\eta \left(\int_0^t f(\bar{u}_n(s)) ds, \varphi \right) dt - \int_0^\eta (\bar{g}_n(t), \varphi)_\Gamma dt + O(\tau) \int_0^\eta \|\varphi\| dt,$$

convergeert naar de vergelijking

$$\int_0^\eta (\partial_t u(t), \varphi) dt + \int_0^\eta (\nabla u(t), \varphi) dt + \int_0^\eta ((K \star u)(t), \varphi) dt$$

$$= \int_0^\eta \left(\int_0^t f(u(s)) ds, \varphi \right) dt - \int_0^\eta (g(t), \varphi)_\Gamma dt.$$

Neem nu de afgeleide naar de tijd om de vergelijking (4) te bekomen en daarbij het gevraagde bewezen te hebben.

Deel B: *Het bewijs zal gegeven worden uit het ongerijmde. Veronderstel dus dat er twee oplossingskoppels zijn, namelijk (u_1, K_1) en (u_2, K_2) . Stel $u_d = u_1 - u_2$ en $K_d = K_1 - K_2$. Het te bewijzen is dat $u \equiv 0$ en $K \equiv 0$.*

Deel 1: *Bewijs dat $\int_0^\eta |K_d(t)|^2 dt \leq C \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt$.*

Beschouw de variationele formulering (6) voor de convolutiekern:

$$K(t)m_0 + (K \star m')(t) = \int_{\Omega} f(u(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \partial_t g d\mathbf{x} - m''(t).$$

Vul nu het koppel (u, K) uit bovenstaande formulering in als (u_1, K_1) , respectievelijk (u_2, K_2) . Trek deze beide gelijkheden van elkaar af. De volgende vergelijking wordt bekomen:

$$\begin{aligned} K_d(t)m_0 + (K_d \star m')(t) &= \int_{\Omega} f(u_1(\mathbf{x}, t)) - f(u_2(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \\ \Leftrightarrow K_d(t) &= \frac{1}{m_0} \left(\int_{\Omega} f(u_1(\mathbf{x}, t)) - f(u_2(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} - (K_d \star m')(t) \right) \\ &\quad \text{want } m_0 \neq 0 \\ \Leftrightarrow |K_d(t)| &\leq \frac{1}{|m_0|} \left(\left| \int_{\Omega} f(u_1(\mathbf{x}, t)) - f(u_2(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \right| + |(K_d \star m')(t)| \right) \\ \Leftrightarrow |K_d(t)|^2 &\leq C \left| \int_{\Omega} f(u_1(\mathbf{x}, t)) - f(u_2(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \right|^2 + C |(K_d \star m')(t)|^2 \\ &\quad \text{want } m \in C^3([0, T]) \text{ en } (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \\ \Leftrightarrow \int_0^\eta |K_d(t)|^2 dt &\leq C \int_0^\eta \left| \int_{\Omega} f(u_1(\mathbf{x}, t)) - f(u_2(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \right|^2 dt + C \int_0^\eta |(K_d \star m')(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Hierbij gelden volgende ongelijkheden:

- $C \int_0^\eta \left| \int_{\Omega} f(u_1(\mathbf{x}, t)) - f(u_2(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \right|^2 dt$
 $\leq C \int_0^\eta \|f(u_1(t)) - f(u_2(t))\|^2 |\Omega|^2 dt$
 wegens Cauchy-Schwartz
 $\leq C \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt$
 want f is Lipschitz-continu
- $C \int_0^\eta |(K_d \star m')(t)|^2 dt \leq C \int_0^\eta \int_0^t |K_d(s)|^2 |m'(t-s)|^2 ds dt$
 $\leq C \int_0^\eta \int_0^t |K_d(s)|^2 ds dt$
 want $m \in C^3([0, T])$

Dit betekent dat:

$$\int_0^\eta |K_d(t)|^2 dt \leq C \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt + C \int_0^\eta \int_0^t |K_d(s)|^2 ds dt.$$

Uit de stelling van Grönwall volgt het te bewijzen:

$$\int_0^\eta |K_d(t)|^2 dt \leq C \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt$$

Deel 2: Bewijs dat $u \equiv 0$.

Beschouw de variationale formulering (4) voor de oplossingfunctie:

$$(\partial_t u, \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) + ((K \star u)(t), \varphi) = \left(\int_0^t f(u(s)) ds, \varphi \right) - (g, \varphi)_\Gamma$$

Vul nu het koppel (u, K) uit bovenstaande formulering in als (u_1, K_1) , respectievelijk (u_2, K_2) . Trek deze beide gelijkheden van elkaar af, stel $\varphi = u_d(t)$ en integreer over de tijd.

De volgende vergelijking wordt bekomen:

$$\begin{aligned} & \int_0^\eta (\partial_t u_d(t), u_d(t)) dt + \int_0^\eta (\nabla u_d(t), \nabla u_d(t)) dt \\ & \leq \int_0^\eta \left(\int_0^t f(u_1(s)) - f(u_2(s)) ds, u_d(t) \right) dt \\ & \quad - \int_0^\eta ((K_1 \star u_1)(t) - (K_2 \star u_2)(t), u_d(t)) dt \\ & \leq \int_0^\eta \left(\int_0^t f(u_1(s)) - f(u_2(s)) ds, u_d(t) \right) dt \\ & \quad - \int_0^\eta ((K_1 \star u_d)(t), u_d(t)) dt - \int_0^\eta ((K_d \star u_2)(t), u_d(t)) dt \\ & \text{wegens de definitie van de convolutie} \\ & \leq \int_0^\eta \left| \left(\int_0^t f(u_1(s)) - f(u_2(s)) ds, u_d(t) \right) \right| dt \\ & \quad + \int_0^\eta |((K_1 \star u_d)(t), u_d(t))| dt + \int_0^\eta |((K_d \star u_2)(t), u_d(t))| dt \\ & \text{wegens de driehoeksongelijkheid} \end{aligned}$$

Hierbij gelden volgende (on)gelijkheden:

- $$\begin{aligned} \int_0^\eta (\partial_t u_d(t), u_d(t)) dt &= \int_\Omega \int_0^\eta \frac{1}{2} \partial_t (u_d(\mathbf{x}, t)^2) dt d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega u_d^2(\eta) d\mathbf{x} \\ &\quad \text{want } u_d(0) = u_1(0) - u_2(0) = u_0 - u_0 = 0 \\ &= \frac{1}{2} \|u_d(\eta)\|^2 \end{aligned}$$
- $$\int_0^\eta (\nabla u_d(t), \nabla u_d(t)) dt = \int_0^\eta \|\nabla u_d(t)\|^2 dt$$

- $$\begin{aligned} & \int_0^\eta \left| \left(\int_0^t f(u_1(s)) - f(u_2(s)) ds, u_d(t) \right) \right| dt \\ & \leq \int_0^\eta \left(\int_0^t \|f(u_1(s)) - f(u_2(s))\| ds \right) \|u_d(t)\| dt \\ & \quad \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\ & \leq \int_0^\eta \left(\int_0^t \|u_d(s)\| ds \right) \|u_d(t)\| dt \\ & \quad \text{want } f \text{ is Lipschitz-continu} \\ & \leq C \int_0^\eta \left(\int_0^\eta \|u_d(s)\| ds \right)^2 dt + C \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt \\ & \quad \text{wegens Young} \\ & \leq C \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt \\ & \quad \text{wegens Cauchy-Schwartz} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \int_0^\eta |((K_1 \star u_d)(t), u_d(t))| dt \\ & \leq \varepsilon \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt + C_\varepsilon \int_0^\eta \int_0^t \|u_d(s)\|^2 ds dt \\ & \quad \text{wegens Lemma 4.2} \\ & \leq \varepsilon \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt + C_\varepsilon \int_0^\eta \|u_d(s)\|^2 ds \\ & \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \int_0^\eta |((K_d \star u_2)(t), u_d(t))| dt \\ & \leq \int_0^\eta \|(K_d \star u_2)(t)\| \|u_d(t)\| dt \\ & \quad \text{wegens Cauchy-Schwartz} \\ & \leq C \int_0^\eta \|(K_d \star u_2)(t)\|^2 dt + C \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt \\ & \quad \text{wegens Young} \\ & \leq C \int_0^\eta \left(\int_0^t |K_d(s)|^2 ds \int_0^t \|u_2(t-s)\|^2 ds \right) dt + C \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt \\ & \quad \text{wegens het bewijs van Lemma 4.2} \\ & \leq C \int_0^\eta \int_0^t |K_d(s)|^2 ds dt + C \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt \\ & \quad \text{want } u_2 \in L_2((0, T), H^1(\Omega)) \\ & \leq C \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt \\ & \quad \text{wegens deel 1 van dit bewijs} \end{aligned}$$

Deze ongelijkheden in rekening brengend, wordt volgende vergelijking bekomen:

$$\frac{1}{2} \|u_d(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla u_d(t)\|^2 dt \leq C_\varepsilon \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt$$

Kies ε klein genoeg en vast zodat er geldt dat:

$$\begin{aligned} \|u_d(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla u_d(t)\|^2 dt & \leq C \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt \\ & \leq C \int_0^\eta \left(\|u_d(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u_d(s)\|^2 ds \right) dt \end{aligned}$$

Pas nu de stelling van Grönwall toe:

$$\|u_d(\eta)\|^2 + \int_0^\eta \|\nabla u_d(t)\|^2 dt \leq 0.$$

Doordat het rechterlid enkel positieve termen bevat, moet elke term uit het rechterlid gelijk zijn aan 0. Meer bepaald moet $\|u_d(\eta)\|^2 = 0$, met andere woorden $u_d(\eta) = 0$ voor willekeurige $\eta \in [0, T]$. Dit betekent dat $u_d \equiv 0$, hetgeen bewezen moest worden.

Deel 3: *Bewijs dat $K_d \equiv 0$.*

Dit volgt uit Deel 1, welke zegt dat $\int_0^\eta |K_d(t)|^2 dt \leq C \int_0^\eta \|u_d(t)\|^2 dt$. Het linkerlid is echter 0 wegens Deel 2 van dit bewijs. Doordat het rechterlid een positieve integraal is, moet het integrandum zelf gelijk zijn aan 0. Een norm is echter nul als en slechts als hetgeen binnen de norm nul is. Met andere woorden, $K_d \equiv 0$. \square

4.6 Foutenschatting

In het vorige deel werd het bestaan en de uniciteit van een oplossingskoppel (u, K) op basis van de convergentie van de Rothe-functies (u_n, \overline{K}_n) aangetoond. In dit deel, wordt dieper ingegaan op de snelheid van de convergentie van de Rothe-functies (u_n, \overline{K}_n) naar de exacte oplossing (u, K) voor het oorsponkelijke probleem.

Stelling 4.13.

Als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Lipschitzcontinu is,
 $g \in C^2([0, T], L_2(\Gamma))$,
 $m \in C^3([0, T])$ met $m_0 \neq 0$ en
 $u_0 \in H^1(\Omega)$,
 dan geldt:

- $\int_0^\eta |\overline{K}_n - K|^2 dt \leq C\tau$
- $\max_{\eta \in [0, T]} \|u_n(\eta) - u(\eta)\|^2 + \int_0^T \|\nabla(u_n - u)(t)\|^2 dt \leq C\tau$

Bewijs. Het te bewijzen volgt uit het bewijs van Stelling 4.9, respectievelijk Stelling 4.10.

Deel 1: Beschouw het resultaat van Stelling 4.9:

$$\int_0^\eta |\overline{K}_r - \overline{K}_s|^2 dt \leq C \int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 dt + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right)$$

Uit het bewijs van Stelling 4.10, is ook gekend dat:

$$\int_0^\eta \|u_r(t) - u_s(t)\|^2 dt \leq O\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right),$$

Met andere woorden:

$$\int_0^\eta |\overline{K}_r - \overline{K}_s|^2 dt \leq O\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right).$$

Stel nu $r = n$ en neem de limiet $s \rightarrow \infty$. Dan wordt bovenstaande vergelijking als volgt:

$$\int_0^\eta |\overline{K}_n - K|^2 dt \leq C\tau,$$

wegens de opmerking na Stelling 4.10.

Deel 2: Beschouw vergelijking 13 uit Stelling 4.10. Deze vergelijking zegt dat:

$$\max_{\eta \in [0, T]} \|u_r(\eta) - u_s(\eta)\|^2 + \int_0^T \|\nabla(\overline{u}_r - \overline{u}_s)(t)\|^2 dt \leq O\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$$

Stel hierbij $r = n$ en neem de limiet $s \rightarrow \infty$. Dan wordt de volgende vergelijking bekomen wegens Stelling 4.10

$$\max_{\eta \in [0, T]} \|u_n(\eta) - u(\eta)\|^2 + \int_0^T \|\nabla(\overline{u}_n - u)(t)\|^2 dt \leq C\tau \quad (14)$$

Uit voorgaande berekeningen is gekend dat:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\nabla(u_n - u)(t)\|^2 dt \\ & \leq \int_0^T \|\nabla(u_n - \bar{u}_n)(t)\|^2 dt + \int_0^T \|\nabla(\bar{u}_n - u)(t)\|^2 dt \\ & \leq C\tau^2 + \int_0^T \|\nabla(\bar{u}_n - u)(t)\|^2 dt \\ & \quad \text{wegens Lemma 4.6} \end{aligned}$$

Dit betekent dat:

$$\begin{aligned} & \max_{\eta \in [0, T]} \|u_n(\eta) - u(\eta)\|^2 + \int_0^T \|\nabla(u_n - u)(t)\|^2 dt \\ & \leq \max_{\eta \in [0, T]} \|u_n(\eta) - u(\eta)\|^2 + \int_0^T \|\nabla(\bar{u}_n - u)(t)\|^2 dt + C\tau^2 \\ & \leq C\tau \\ & \quad \text{wegens de vergelijking (14)} \end{aligned}$$

□

Uit deze stelling volgt dat de snelheid van convergentie minstens lineair verloopt in functie van de staplengte. Dit betekent dat als de staplengte τ bijvoorbeeld 2 keer groter wordt, de snelheid van convergentie van de Rothe-functies (u_n, \bar{K}_n) naar de oplossingsfunctie (u, K) dubbel zo traag zal verlopen.

5 Numeriek experiment

In dit hoofdstuk, worden er twee numerieke voorbeelden gegeven van het oorspronkelijke semilinear parabolisch probleem:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (K \star u)(t) = \int_0^t f(u(s)) ds & \text{in } \Omega \times]0, T], \\ -\nabla u \cdot \mathbf{n} = g & \text{op } \Gamma \times]0, T], \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (15)$$

Het doel van dit deel is de snelheid illustreren van convergentie die nagegaan werd in het voorgaande hoofdstuk. De nodige voorwaarden op de data-functies voor het bestaan en de uniciteit van het oplossingskoppel (u, K) zijn samen te vatten als volgt:

$$\begin{cases} f \text{ is begrensd en Lipschitz-continu} \\ m \in C^3([0, T]) \text{ en } m_0 \neq 0 \\ g \in C^2([0, T], L_2(\Gamma)) \\ u_0 \in H^1(\Omega) \end{cases} \quad (16)$$

Bij het kiezen van een exacte oplossing om dit experiment uit te voeren, werd dus rekening gehouden met deze voorwaarden. De voorbeelden werden geprogrammeerd in Python met behulp van het programmeertaal FEniCS ([14], [15]). De code van het eerste voorbeeld is terug te vinden in de appendix, het tweede voorbeeld is analoog te programmeren. Naast de nodige voorwaarden op de data-functies, moesten ook de voorwaarden op het gebied Ω in acht worden genomen. In beide voorbeelden werd als tijdsinterval $[0, T] = [0, 1]$ gekozen en werd voor Ω , het begrensd Lipschitz-domein in \mathbb{R}^d voor $d = 1$, het interval $[0, 1]$ gekozen. Het benaderende oplossingskoppel (u, K) voor het exacte oplossingskoppel (u_e, K_e) werd met behulp van de Galerkin benadering berekend.

Om vergelijkingen te bekomen waaruit de oplossingsfuncties u en K te berekenen zijn, wordt dezelfde procedure gevolgd zoals in het de theorie. Eerst zullen er passende variationale formuleringen worden opgesteld. Daarna zullen deze formuleringen gediscretiseerd worden naar de tijd. Met behulp van deze gediscretiseerde formuleringen zal eerst K_i berekend worden om dan gebruikt te kunnen worden in de formulering om u_i te berekenen. Pas dan zal er overgegaan kunnen worden naar het volgende tijdstip t_{i+1} .

Alvorens de variationele formulering op te schrijven, wordt het linkerlid van de eerste vergelijking in het systeem (15) geschreven als $\int_0^t f(u(s)) ds + F(\mathbf{x}, t)$, waarbij de functie $f(u)$ een te kiezen data-functie wordt. Hierdoor is het eenvoudiger om de afhankelijkheid van de oplossingsfunctie in het linkerlid te waarborgen. Als gevolg van deze extra term, wordt de variationele formuleringen lichtjes gewijzigd. Voor de oplossingsfunctie u wordt

de variationele formulering als volgt:

$$(\partial_t u(t), \varphi) + (\nabla u(t), \nabla \varphi) + ((K * u)(t), \varphi) = \left(\int_0^t f(u(s)) ds, \varphi \right) + (F(t), \varphi) - (g(t), \varphi)_\Gamma, \quad (17)$$

met $\varphi \in V_h$. Hierbij stelt V_h een eindige deelruimte van $H^1(\Omega)$ voor. Analoog als in Hoofdstuk 4 kan φ aan 1 worden gelijkgesteld waardoor de globale meting in de vergelijking kan worden geïntroduceerd. Na het afleiden naar de tijd wordt er een tweede vergelijking worden bekomen, naast de vergelijking (17), waaraan de onbekende functies u en K moeten voldoen:

$$K(t)m_0 + (K * m')(t) = \int_\Omega f(u(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} + \int_\Omega \partial_t F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_\Gamma \partial_t g d\mathbf{x} - m''(t) \quad (18)$$

De discretisatie van de variationele formulering voor de convolutiekern gebeurt opnieuw met behulp van de achterwaartse Euler-methode. Dit betekent dat het tijdsinterval $[0, T]$ wordt opgesplitst in equidistante deelintervallen met lengte $\tau = \frac{T}{N}$. Hierbij werden verschillende staplengtes met elkaar vergeleken: $\tau = 2^{-j}$ voor $j = 2, \dots, 8$. De bekomen gediscrètiseerde formulering voor de convolutiekern is als volgt:

$$K_i m_0 + \sum_{k=1}^i K_k m'_{i-k} \tau = (f(u_{i-1}), 1) + ((\partial_t F)_i, 1) - ((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma - m''_i.$$

De moeilijkheid in bovenstaande vergelijking, is de programmatie van $(\partial_t g)_i$ omdat deze functie enkel gedefinieerd is op de randpunten van het eenheidsinterval. Hiervoor zijn verschillende oplossingen mogelijk. Er kan bijvoorbeeld een globale functie worden gecreëerd die de gevraagde waarden aanneemt op de randpunten en daarbuiten nul is voor elke tijdstip. In deze thesis werd er geopteerd om de functie $g(\mathbf{x}, t)$ op te splitsen in twee afzonderlijke functies $g^L(t)$ en $g^R(t)$ die enkel waarden aannemen in het randpunt $x = 0$, respectievelijk $x = 1$. De bovenstaande integraal $\int_\Gamma (\partial_t g)_i d\mathbf{x}$ is dan te vereenvoudigen naar de som van twee termen $\partial_t(g^L)(t_i)$ en $\partial_t(g^R)(t_i)$.

$$K_i m_0 + \sum_{k=1}^i K_k m'_{i-k} \tau = (f(u_{i-1}), 1) + ((\partial_t F)_i, 1) - (\partial_t g^L)_i - (\partial_t g^R)_i - m''_i \quad (19)$$

Uit deze vergelijking kan de convolutiekern, welke gebruikt wordt bij de berekening van de oplossingsfunctie u , recursief worden berekend:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0 = \frac{1}{m_0} \left(\int_\Omega (f(u_0) + (\partial_t F)_0) d\mathbf{x} - (\partial_t g^L)_0 - (\partial_t g^R)_0 - m''_0 \right) \\ K_1 = \frac{1}{m_0 + m'_0 \tau} \left(\int_\Omega (f(u_0) + (\partial_t F)_1) d\mathbf{x} - (\partial_t g^L)_1 - (\partial_t g^R)_1 - m''_1 \right) \\ K_i = \frac{1}{m_0 + m'_0 \tau} \left(\int_\Omega (f(u_{i-1}) + (\partial_t F)_i) d\mathbf{x} - (\partial_t g^L)_i - (\partial_t g^R)_i - m''_i - \sum_{k=1}^{i-1} K_k m'_{i-k} \tau \right) \\ \text{voor } i = 2, \dots, N. \end{array} \right.$$

Merk op dat, analoog als tijdens de theoretische tijdsdiscretisatie, wordt verondersteld dat $u_{-1} \sim u_0$. De som in het rechterlid werd met behulp van een for-loop op voorhand berekend, vandaar dat K_1 eerst nog op basis van een aparte formule wordt berekend. Door de afhankelijkheid van de functie u_{i-1} in het rechterlid uit bovenstaande vergelijking is ook duidelijk dat eenmaal K_i is berekend, eerst de oplossingsfunctie u op tijdstip t_i moet worden berekend alvorens naar de berekening van K_{i+1} over te kunnen gaan.

Uit analoge redenering kan de volgende gediscretiseerde vergelijking voor de oplossingsfunctie u_i opgesteld worden uit de oorspronkelijke variationele formulering (17):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\tau} u_i, \varphi \right) + (\nabla u_i, \nabla \varphi) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k) \tau, \varphi \right) + (F_i, \varphi) - (g^L)_i \varphi(x=0) - (g^R)_i \varphi(x=1) \\ & \quad - \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau, \varphi \right) + \left(\frac{1}{\tau} u_{i-1}, \varphi \right), \end{aligned}$$

voor $\varphi \in H^1(\Omega)$. Hierbij worden de sommen opnieuw apart berekend met behulp van een for-loop. De bovenstaande vergelijking geeft het $(V_h, \tilde{a}, \tilde{F})$ -probleem weer met:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}(u_i, \varphi) = \left(\frac{1}{\tau} u_i, \varphi \right) + (\nabla u_i, \nabla \varphi) \\ \langle \tilde{F}, \varphi \rangle = \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k) \tau, \varphi \right) + (F_i, \varphi) - (g^L)_i \varphi(x=0) - (g^R)_i \varphi(x=1) \\ \quad - \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau, \varphi \right) + \left(\frac{1}{\tau} u_{i-1}, \varphi \right), \end{array} \right.$$

waarvan de oplossing u_h de Galerkin benadering is voor het oorspronkelijke variationele probleem. De ruimte V_h stelt een eindig-dimensionale benadering voor van de Hilbertruimte $H^1(\Omega)$. Merk op dat de index $h \in]0, 1]$ de kwaliteit van benadering voorstelt. Hoe dichter h bij nul ligt, hoe beter V_h de ruimte $H^1(\Omega)$ benadert.

De oplossing van het $(V_h, \tilde{a}, \tilde{F})$ -probleem wordt bekomen met behulp van de eindige elementen methode. Het gebied $\Omega = [0, 1]$ wordt dus opgesplitst in verschillende deelintervallen $\Omega_i = (t_{i-1}, t_i)$ voor $i \in \{1, \dots, n\}$. Voor beide voorbeelden wordt een vaste opsplitsing in intervallen gekozen, namelijk bestaande uit 50 deelintervallen. Voor eindig-dimensionale ruimte V_h werd de ruimte $V_h^{0,1} \subset H^1(\Omega)$ gekozen. Dit is de ruimte die bestaat uit de eerste orde Lagrange polynomen, i.e. continue functies over Ω die een eerste orde polynoom is over elk deeldomein Ω_i .

In dit numeriek experiment stelt de ruimte $V_h = V_h^{0,1}$ voor, een eindig-dimensionale benadering voor van de Hilbertruimte $H^1(\Omega)$. De ruimte $V^{0,1}$ is de ruimte van eerste orde Lagrange polynomen. De index $h \in]0, 1]$ komt overeen met door middel van het gebruik van de eerste orde Lagrange polynomen.

Na het berekenen van het oplossingskoppel $\langle u, K \rangle$ op elk tijdstip worden de bijhorende fouten berekend, telkens voor elke gekozen staplengte τ . De fout tussen de benaderde en

exacte convolutiekern is:

$$\begin{aligned} E_k^{abs}(\tau) &= \max_{t \in [0, T]} |\overline{K}_n(t) - K_e(t)|^2 \\ &\approx \max_{0 \leq i \leq N} |K_i - (K_e)_i|^2 \end{aligned}$$

Deze error kan op globaal vlak echter een vertekend beeld geven waardoor de figuur van de convergentie kan afwijken. Het kan namelijk gebeuren dat op een roosterpunt, de fout heel klein is, maar dat bij de overgang naar een ander roosterpunt, deze fout erg groot wordt alvorens weer te verkleinen. Vandaar dat de fout op basis van de L_2 -norm wordt geïntroduceerd.

$$\begin{aligned} E_K(\tau) &= \int_0^T |\overline{K}_n(t) - K_e(t)|^2 dt \\ &\approx \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\overline{K}_n(t) - K_e(t)|^2 dt \\ &\approx \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} |K_i - (K_e)_i|^2 dt \end{aligned}$$

Hierbij wordt de integraal in het rechterlid benaderd met behulp van de regel van Simpson:

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |K_i - (K_e)_i|^2 dt &\approx \frac{\tau}{6} |K_{i-1} - (K_e)_{i-1}|^2 \\ &\quad + \frac{4\tau}{6} \left| \frac{K_{i-1} + K_i}{2} - K_e\left(\frac{\tau}{2}\right) \right|^2 \\ &\quad + \frac{\tau}{6} |K_i - (K_e)_i|^2 \end{aligned}$$

De fout tussen de benaderde en de exacte oplossingsfunctie is:

$$\begin{aligned} E_u^{abs}(\tau) &= \max_{t \in [0, T]} \|u_n(t) - u_e(t)\|^2 \\ &\approx \max_{1 \leq i \leq N} \|u_i - (u_e)_i\|^2 \end{aligned}$$

Analoog als hierboven, kan dezelfde opmerking gegeven worden op vlak van globale vertekening. Hierdoor wordt de volgende fout op basis van de L_2 -norm gedefinieerd:

$$\begin{aligned} E_u(\tau) &= \int_0^T \|u_n(t) - u_e(t)\|^2 dt \\ &\approx \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|u_n(t) - u_e(t)\|^2 dt \\ &\approx \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|u_i - (u_e)_i\|^2 dt \\ &\approx \sum_{i=1}^N \|u_i - (u_e)_i\|^2 \tau \end{aligned}$$

Op basis van deze fouten, kunnen figuren gemaakt worden die de theorie uit het vorige deel van deze thesis nagaan. De code is terug te vinden in de appendix.

5.1 Voorbeeld 1

In het eerste voorbeeld worden de exacte functies als volgt gekozen:

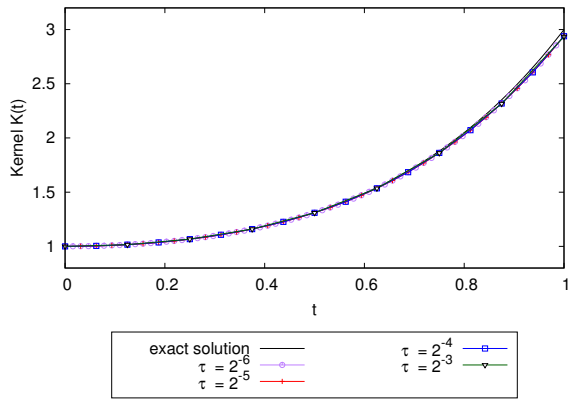
$$\begin{cases} u_e(x, t) = (t^3 + 1)(x^2 + 1) \\ K_e(t) = t^4 + t^2 + 1 \\ f(u) = u + 5 \end{cases}$$

Op basis van deze functies kan de rest van de gekende data-functies worden berekend, die tevens voldoen aan de voorwaarden (16):

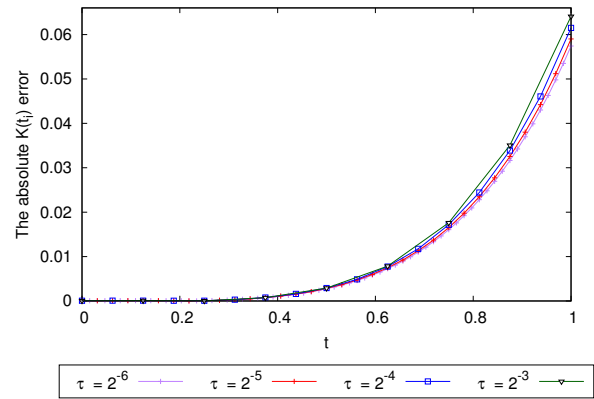
$$\begin{cases} u_0(x) = (x^2 + 1) \\ g^L(t) = 0 \\ g^R(t) = -2(t^3 + 1) \\ m(t) = \frac{4}{3}(t^3 + 1) \\ F(x, t) = (x^2 + 1) \left(\frac{1}{280}t^8 + \frac{1}{60}t^6 + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 \right) - (2t^3 + 5t + 2) \end{cases}$$

Op basis van deze gegeven functies en de bekomen formules voor K_i kan eerst K_0 en K_1 worden berekend. Merk op dat u_0 niet hoeft berekend te worden omdat deze gekend is. Daarna kan u_1 uitgerekend worden met behulp van de eindige elementen methode. Deze uitkomst wordt dan gebruikt in de formule van K_2 , die daarna nodig is voor het berekenen van u_2 , enz. Dit stramien blijft doorgaan tot de convolutiekern en de oplossingsfunctie is berekend voor alle tijdstippen $i = 0, \dots, N$. Hierbij is $N \in \{2^j | j = 2, \dots, 8\}$, afhankelijk van de gekozen staplengte.

In Figuur 5.1 is de exacte convolutiekern K_e weergegeven samen met zijn benaderingen voor staplengte $\tau = 3, 4, 5$ en 6 . Op deze figuur is te zien dat vanaf een grote staplengte, de benadering al zeer goed is. Zelfs bij het verkleinen van de staplengte, wordt de benadering amper verbeterd. Dit wordt benadrukt door Figuur 5.2, welke de absolute fout op de convolutiekern toont voor elk tijdstip. Uit deze figuur is af te leiden dat het verkleinen van de staplengte enkel een verbeterde benadering geeft naar de rand van het tijdsdomein toe.

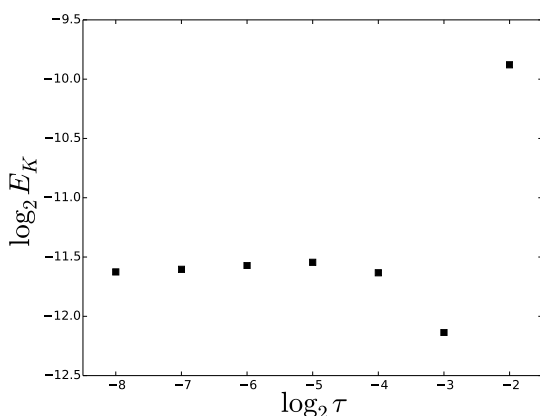


Figuur 5.1: De numerieke oplossing voor de convolutiekern.

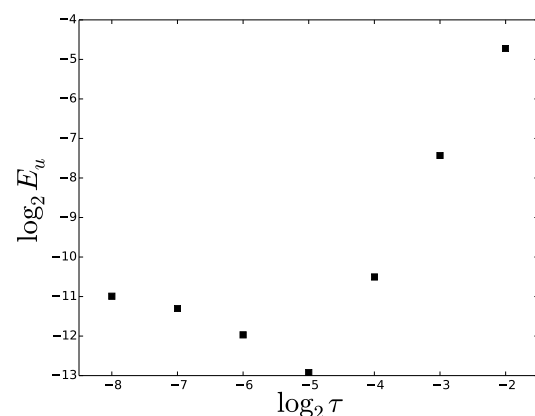


Figuur 5.2: De absolute fout op de convolutiekern.

Daarnaast kunnen figuren gemaakt worden voor de convergentiesnelheid met behulp van de fouten op basis van de L_2 -normen. Dit kan zowel uitgevoerd worden voor de convolutiekern als voor de oplossingsfunctie. Deze figuren zijn terug te vinden in Figuur 5.3 voor de convolutiekern en in Figuur 5.4 voor de oplossingsfunctie. Beide figuren zijn op logaritmische schaal weergegeven. Volgens de theorie zou de figuur een rechte lijn moeten tonen met richtingscoëfficiënt ongeveer 1. Op de figuur wordt er echter eerst een snelle convergentie weergegeven met een richtingscoëfficiënt ongeveer gelijk aan 2 waarna de fout lijkt te stabiliseren. Dit laatste is logisch want hoe kleiner de staplengte, hoe kleiner de fout. De snelheid van de convergentie blijkt echter groter dan verwacht. Dit kan te maken hebben met het feit dat de gekozen data-functies aan sterkere voorwaarden voldoen dan vooropgesteld waardoor de convergentie voor de convolutiekern sneller gebeurt. Op Figuur 5.4 is analoog de fout op de oplossingsfunctie weergegeven. Ook deze figuur kent eerst een lineaire snelheid met grootte ongeveer 2, waarna de fout stabiliseert.



Figuur 5.3: De fout op de convolutiekern.



Figuur 5.4: De fout op de oplossingsfunctie.

5.2 Voorbeeld 2

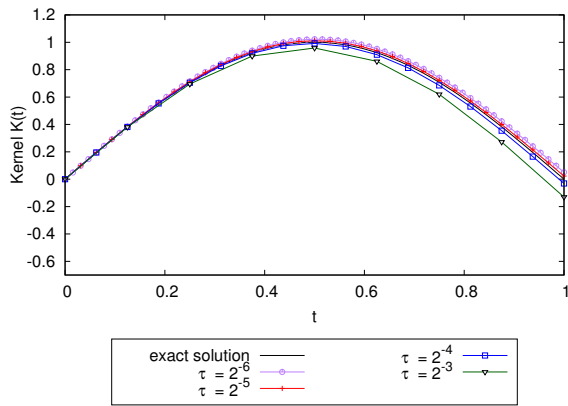
In het tweede voorbeeld worden de exacte functies als volgt gekozen:

$$\begin{cases} u_e(x, t) = (t^3 + 1)(x^2 + 1) \\ K_e(t) = \sin(\pi t) \\ f(u) = u + 5 \end{cases}$$

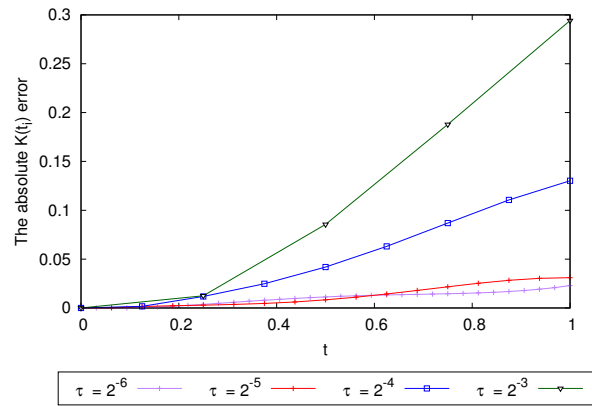
Enkel de convolutie-kernel wordt aangepast tot de sinus-functie. Op basis van deze functies kan opnieuw de rest van de gekende data-functies worden berekend, die tevens voldoen aan de voorwaarden (16):

$$\begin{cases} u_0(x) = (x^2 + 1) \\ g^L(t) = 0 \\ g^R(t) = -2(t^3 + 1) \\ m(t) = \frac{4}{3}(t^3 + 1) \\ F(x, t) = (x^2 + 1) \left(\frac{6}{\pi^4} \sin(\pi t) - \frac{1}{\pi} \cos(\pi t) - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{\pi}t^3 + 3t^2 - t + \frac{6}{\pi^3}t + \frac{1}{\pi} \right) - (2t^3 + 5t + 2) \end{cases}$$

Analoog als in het vorige voorbeeld kan de convolutiekern en daaropvolgend de oplossingsfunctie op elk tijdstip worden berekend. Figuur 5.5 geeft de exacte oplossing voor de convolutiekern weer, samen met zijn numerieke benaderingen voor verschillende staplengtes. Opnieuw is op te merken dat in het begin van het tijdsinterval, de benaderingen het zeer goed doen, maar naarmate de tijd verder gaat, de fouten zich opstapelen waardoor de numerieke benaderingen steeds verder van de exacte functie divergeren. Op de figuur is ook te zien dat deze divergentie kleiner is naarmate de staplengte kleiner wordt. Opvallend is dat de numerieke oplossing voor staplengte $\tau = 2^{-6}$ op bepaalde tijdstippen een slechtere benadering is voor de exacte convolutiekern dan de numerieke oplossing voor staplengte $\tau = 2^{-5}$. Dit is zeer duidelijk te zien op Figuur 5.6. Op deze figuur zijn de schommelingen in fouten tussen deze twee benaderingen waarneembaar. Er zou gezegd kunnen worden dat voor dergelijke staplengtes, de fout zich al weet te stabiliseren, gezien de schommelingen ten opzichte van elkaar zeer klein zijn.

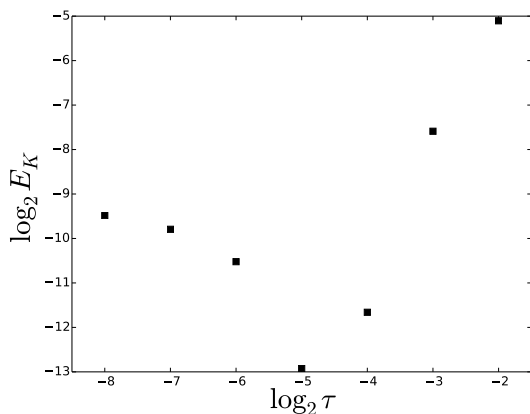


Figuur 5.5: De numerieke oplossing voor de convolutiekern.

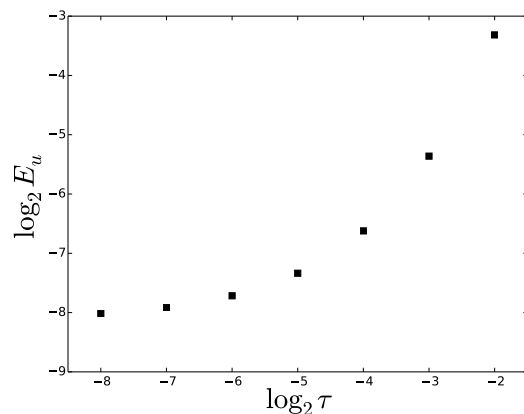


Figuur 5.6: De absolute fout op de convolutiekern.

Ook voor dit voorbeeld wordt de convergentiesnelheid nagegaan met passende figuren op logaritmische schaal. Figuur 5.7 vertoont een trend die afwijkt van de theorie. Volgens de theorie zou deze figuur namelijk een lineaire trend vertonen met richtingscoëfficiënt 1. De stabilisatie naar het einde van de figuur is logisch omdat hoe kleiner de staplengte, hoe kleiner de fout is. Een mogelijke verklaring voor deze nogal uitzonderlijke trend, is het feit dat de exacte convolutiekern een sinusfunctie is, welke moeilijker te benaderen is in wiskundige programma's. Op Figuur 5.8 wordt de fout van de oplossingsfunctie weergegeven. Op deze figuur lijkt de fout een kwadratisch patroon te vertonen. Deze figuur duidt de mogelijkheid aan dat er een sterkere convergentiesnelheid bestaat voor het systeem op enkele strengere voorwaarden na voor de gekende data-functies.



Figuur 5.7: De fout op de convolutiekern.



Figuur 5.8: De fout op de oplossingsfunctie.

6 Algemeen besluit

In deze thesis werd er naar de oplossing $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ gezocht voor volgend wiskundig model:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (K \star u)(t) = \int_0^t f(u(s)) ds & \text{in } \Omega \times]0, T], \\ -\nabla u \cdot \mathbf{n} = g & \text{op } \Gamma \times]0, T], \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Hierbij is het domein Ω een begrensde, Lipschitz-domein in \mathbb{R}^d , $d \geq 1$ en zijn de data-functies als volgt:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- $g : \Gamma \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$
- $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tijdsafhankelijk.

Dit invers probleem is een semilinear parabolisch begin- en randwaardenprobleem. Een extra complicatie bij de analyse van dit systeem was de onbekende data-functie K in het convolutieproduct. Deze moest namelijk aan de hand van een extra globale meting verkregen worden:

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) dx = m(t),$$

waarbij de functie $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Een klassieke oplossing is moeilijk te bekomen voor dergelijke systemen waardoor er overgegaan werd naar het variationele kader. Hierdoor werd het probleem, met behulp van de bijkomende globale meting, omgevormd naar een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Het doel van de thesis werd daarbij gewijzigd naar het vinden van een zwakke oplossing $\langle u, K \rangle$.

In Hoofdstuk 4 werd het bestaan en de uniciteit van het probleem nagegaan. Hiervoor werden passende stellingen geformuleerd met bijhorende bewijzen. De zwakke oplossing $\langle u, K \rangle$ blijkt te bestaan voor het systeem op voorwaarde dat:

$$\begin{cases} f \text{ is begrensde en Lipschitz-continu} \\ m \in C^3([0, T]) \text{ en } m_0 \neq 0 \\ g \in C^2([0, T], L_2(\Gamma)) \\ u_0 \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Deze resultaten werden bekomen door eerst het systeem te discretiseren over de tijd en daarna de stelling van Lax-Milgram toe te passen. Hierdoor werd het bestaan en de uniciteit van de zwakke oplossing bewezen op de discrete tijdstippen. Om het bestaan van de oplossing over het volledige tijdsinterval te bekomen, werden de discrete oplossingen samengevoegd tot functies over het volledige tijdsinterval met behulp van de Rothe-functies. Daarnaast werd er bewezen dat deze functies convergeerden naar de exacte oplossing van het systeem. Daarenboven werd er in deze thesis ook nagegaan hoe de Rothe-functies presteerden als benaderende oplossing van het systeem. Er werd een foutenschatting opgesteld om de snelheid van convergentie van de Rothe-functies te bepalen. Hierbij werd bekomen dat deze snelheid minstens lineair is in functie van de staplengte.

Naast de theoretische afleidingen in verband met het bestaan en de uniciteit van het systeem, werd er in Hoofdstuk 5 ook een numeriek experiment uitgevoerd. In dit hoofdstuk werden twee voorbeelden uitgewerkt in het één-dimensionale geval, waarbij de snelheid van convergentie van de Rothe-functies werd gestaafd. Deze voorbeelden werden geïmplementeerd in Python met behulp van het programmapakket FEniCS. De methode die gebruikt werd om de partiële differentiaalvergelijking op te lossen, was de eindige elementmethode. Uit de figuren, die in dit deel werden opgesteld, was af te leiden dat de snelheid van convergentie inderdaad lineair is, maar er was ook aanleiding tot een snellere convergentie indien bepaalde voorwaarden op data-functies versterkt zouden worden. Deze indicatie van snellere convergentie kan een motivatie zijn voor verder onderzoek.

Appendix

A English summary

A differential equation describes a relation between an unknown function and his derivatives. If the function has only one argument, the equation is called an ordinary differential equation. Once the function affect more than one variable, it is called a partial differential equation. Partial differential equations appear in most of the branches of science. Most phenomena in physics, mechanics or any other natural science can be modelled using mathematical equations since a symmetry or conservation law is easily translated into a mathematical identity. The wave equation discribes the distribution of warmth or sound, while the famous Maxwell's equations are used to describe processes in electromagnetics. Once a model is provided, it is natural to solve it. Yet solving this kind of mathematical problems is not as easy as it seems. Since there is such a great variety of partial differential equations describing different phenomena, it is hard to find an overall solutionmethod. Mostly all problems have to be considered individually and solved by itself using known strategies.

In this project, the following semilinear, parabolic, initial and boundary value conditional system is considered:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (K \star u)(t) = \int_0^t f(u(s))ds & \text{in } \Omega \times]0, T], \\ -\nabla u \cdot \mathbf{n} = g & \text{on } \Gamma \times]0, T], \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (20)$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d > 1$) is a bounded domain which is Lipschitz. The data-functions are $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \Gamma \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ and $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. The kernel K is a time-dependent function and unknown. Therefore an additional measurement is needed:

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) dx = m(t),$$

where $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. The goal of the thesis is to reconstruct the unkown convolutional kernel K and to find the solution $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ of the system (20). Since solving a mathematical system is difficult, the partial differential equation is transformed into a variational formulation. This way the goal is rephrased into finding the weak solution $\langle u, K \rangle$ which satisfies following equations:

$$\begin{cases} K(t)m_0 + (K \star m')(t) = \int_{\Omega} f(u(t)) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \partial_t g d\mathbf{x} - m''(t) \\ (\partial_t u, \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi) + ((K \star u)(t), \varphi) = \left(\int_0^t f(u(s)) ds, \varphi \right) - (g, \varphi)_{\Gamma}, \end{cases} \quad (21)$$

for $\varphi \in H^1(\Omega)$, provided that $m \in C^2([0, T])$, $m_0 \neq 0$ and $g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma))$.

First the stability of the weak solution was investigated, supposing that the solution existed.

Theorem A.1. *Assume that $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and bounded, $g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma))$ and $m \in C^2([0, T])$ with $m_0 \neq 0$. Then it holds that:*

- $\forall t \in [0, T], \exists C > 0 : |K(t)| \leq C$
- if $u_0 \in L_2(\Omega)$, then $\exists C > 0 : \max_{\eta \in [0, T]} \|u(\eta)\|^2 + \int_0^T \|\nabla u\|^2 dt \leq C$
- if $u_0 \in H^1(\Omega)$, then $\exists C > 0 : \int_0^T \|\partial_t u\|^2 dt + \max_{\eta \in [0, T]} \|\nabla u(\eta)\|^2 \leq C$.

To prove the existence and uniqueness of the weak solution, the variational problem (21) was discretized with respect to time. The interval $[0, T]$ was divided into N sub-intervals and every function $z(t)$ was approximated by z_i for $t \in]t_{i-1}, t_i]$. The function $\partial_t z$ was approximated by $\nabla z_i := \frac{z_i - z_{i-1}}{\tau}$, using the backward Euler-method. The corresponding discrete variational problems are:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_i m_0 + \sum_{k=1}^i K_k m'_{i-k} \tau = (f(u_{i-1}), 1) - ((\partial_t g)_i, 1)_\Gamma - m'_i \\ (\delta u_i, \varphi) + (\nabla u_i, \nabla \varphi) + \left(\sum_{k=1}^i K_k u_{i-k} \tau, \varphi \right) = \left(\sum_{k=0}^{i-1} f(u_k) \tau, \varphi \right) - (g_i, \varphi)_\Gamma, \end{array} \right. \quad (22)$$

for $i = 1, \dots, N$. Due to the discretisation, it was now possible to use Lax-Milgram theorem to prove the existence and uniqueness of the weak solution at each timepoint.

Theorem A.2. *Assume that $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and bounded, $\partial_t g \in C([0, T], L_2(\Gamma))$ with $g_0 \in L_2(\Gamma)$, $m \in C^2([0, T])$ with $m_0 \neq 0$ and $u_0 \in L_2(\Omega)$. Then there exists a unique weak solution $u_i \in H^1(\Omega) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.*

Moreover, the stability for these unique weak solutions $\langle u_i, K_i \rangle$ was investigated as well.

Theorem A.3. *Assume that $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and bounded, $g \in C^1([0, T], L_2(\Gamma))$ and $m \in C^2([0, T])$ with $m_0 \neq 0$. Then it holds that:*

- $|K_i| \leq C$
- if $u_0 \in L_2(\Omega)$, then $\exists \tau_0 > 0, \forall \tau < \tau_0 : \max_{1 \leq j \leq N} \|u_j\|^2 + \sum_{i=1}^N \|u_i - u_{i-1}\|^2 + \sum_{i=1}^N \|\nabla u_i\|^2 \tau \leq C$
- if $u_0 \in H^1(\Omega)$, then $\max_{1 \leq j \leq N} \|\nabla u_j\|^2 + \sum_{i=1}^N \|\nabla(u_i - u_{i-1})\|^2 + \sum_{i=1}^N \|\delta u_i\|^2 \tau \leq C$.

The weak solutions for each timepoint were combined together to a function over the whole time-interval using the Rothe-method. These functions are the solution $\langle u_n(t), \bar{K}(t) \rangle$ of the adapted discretized system (22) using the Rothe-functions:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{K}_n(t)m_0 + (\bar{K}_n \star \bar{m}'_n)(t) = (f(\bar{u}_n(t-\tau)), 1) - (\bar{\partial}_t \bar{g}_n(t), 1)_\Gamma - \bar{m}''_n(t) + O(\tau) \\ \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(t), \varphi \right) + (\nabla \bar{u}_n(t), \varphi) + ((\bar{K}_n \star \bar{u}_n)(t), \varphi) \\ \qquad \qquad \qquad = \left(\int_0^t f(\bar{u}_n(s)) ds, \varphi \right) - (\bar{g}_n(t), \varphi)_\Gamma + O(\tau) \|\varphi\| \end{array} \right. \quad (23)$$

Yet the solution for system (23) does not necessarily represent an approximation for the solution of system (21), unless of course the first model converges to the second one. Therefore the Rothe-functions themselves need to converge as well.

Theorem A.4. *Assume $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is Lipschitzcontinuous, $g \in C^2([0, T], L_2(\Gamma))$ and $m \in C^3([0, T])$ with $m_0 \neq 0$. Then it holds that:*

- $\int_0^\eta |\bar{K}_r - \bar{K}_s|^2 dt \leq C \int_0^\eta \|u_r - u_s\|^2 dt + O\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\right)$
- if $u_0 \in H^1(\Omega)$, then $\exists u \in L_2((0, T), H^1(\Omega)) : u_n \rightarrow u$ for $n \rightarrow \infty$
- moreover, then it holds that $\frac{\partial u_n}{\partial t} \rightarrow \partial_t u$ in $L_2((0, T), L_2(\Omega))$.

Using this theorem it is possible to prove the existence and uniqueness of a weak solution for the original variational problem (21).

Theorem A.5. *Assume $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is Lipschitzcontinuous, $g \in C^2([0, T], L_2(\Gamma))$, $m \in C^3([0, T])$ with $m_0 \neq 0$ and $u_0 \in H^1(\Omega)$. Then there exists a unique weak solution $\langle u, K \rangle$ for problem (21).*

The theorem indirectly states that there exists a unique solution for problem (21), which can be found by the convergence of the Rothe-functions $(u_n(t), K_n(t))$. The convergence rate was investigated and it appears that the rate is at least linear with respect to the step length.

Theorem A.6. *Assume $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is Lipschitzcontinuous, $g \in C^2([0, T], L_2(\Gamma))$, $m \in C^3([0, T])$ with $m_0 \neq 0$ and $u_0 \in H^1(\Omega)$. Then it holds that:*

- $\int_0^\eta |\bar{K}_n - K|^2 dt \leq C\tau$
- $\max_{\eta \in [0, T]} \|u_n(\eta) - u(\eta)\|^2 + \int_0^T \|\nabla(u_n - u)(t)\|^2 dt \leq C\tau$

Finally, a numerical experiment was administered using the results and formulations from the theory. Additional plots were made to verify the convergence rate. As expected, the error between the approximation and the exact solution stabilizes when the step length decreases. Yet the plots representing the convergence rate deviate a bit from the theory. This is probably due to the complexity of the problem since the right hand side of the partial differential equation contains an integral of the unknown function.

B Lijst van hulpstellingen

In dit deel worden enkele handige stellingen alsook ongelijkheden opgesomd die doorheen de thesis werden gebruikt.

Stelling B.1 (Young).

Als $a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}_+, p > 1$ en $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
dan geldt: $ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q$.

Bewijs. Zie [3]. □

Stelling B.2 (Cauchy-Schwartz).

Als $f(\mathbf{x})$ en $g(\mathbf{x})$ reële integreerbare functies over Ω ,
dan geldt: $\left(\int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right)^2 \leq \left(\int_{\Omega} f^2(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right) \left(\int_{\Omega} g^2(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right)$.

Bewijs. Zie [16]. □

Stelling B.3 (Minkovsky).

Als $f(\mathbf{x})$ en $g(\mathbf{x})$ reële integreerbare functies over Ω
zodanig dat $|f(\mathbf{x})|^p$ en $|g(\mathbf{x})|^p$ integreerbaar zijn over Ω voor $p > 1$,
dan geldt: $\left(\int_{\Omega} |f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$.

Bewijs. Zie [17]. □

Stelling B.4 (Hölder).

Als $f(\mathbf{x})$ en $g(\mathbf{x})$ reële integreerbare functies over Ω
zodanig dat $|f(\mathbf{x})|^p$ en $|g(\mathbf{x})|^p$ integreerbaar zijn over Ω
voor $p > 1$ en $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
dan geldt: $\left(\int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right) \leq \left(\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$.

Bewijs. Zie [18]. □

Stelling B.5 (Hoofdstelling van de integralen).

Als f' integreerbaar is over $]a, b[$,
dan geldt: $\int_a^b f' = f|_a^b$.

Bewijs. Zie [19]. □

Stelling B.6 (Partiële integratie).

Als f' en g' integreerbaar zijn over $]a, b[$,

dan geldt: $\int_a^b f g' = f g|_a^b - \int_a^b f' g$.

Bewijs. Zie [19]. □

Definitie B.1.

Een rij $u_n \in V$, een Hilbertruimte met inproduct (\cdot, \cdot) , is zwak convergent indien er een $u \in V$ bestaat zodat er geldt dat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f, u_n) = (f, u), \quad \forall f \in V^*.$$

Het element u wordt de zwakke limiet van u_n genoemd en wordt genoteerd als $u_n \rightharpoonup u$ in V .

Definitie B.2.

Een verzameling M in een Banachruimte V is zwak compact indien voor elke begrensde rij $u_n \in M$ een deelrij te vinden is die zwak convergeert naar $u \in M$, i.e.

$$(f, u_{n_k}) \rightarrow (f, u), \quad \forall f \in V^*.$$

Stelling B.7 (Zwakke compactheid).

Als V een separabele Hilbertruimte is,

dan geldt er dat elke begrensde verzameling in V zwak compact is.

Bewijs. Zie [3]. □

Stelling B.8 (Grönwall).

Als $r(t), h(t)$ en $y(t)$ continue reële functies zijn gedefinieerd over $[a, b]$, waarbij $r(t), h(t) \geq 0$ en

$$y(t) \leq h(t) + \int_a^t r(s)y(s)ds \quad \text{voor } a \leq t \leq b,$$

dan geldt: $y(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)r(s) \exp\left(\int_s^t r(\tau)d\tau\right)ds$.

Als daarenboven $r(s) = C$ en h is niet-dalend,

dan geldt: $y(t) \leq h(t) \exp(C(t-a))$ voor $a \leq t \leq b$.

Bewijs. Zie [3]. □

Stelling B.9 (Discrete versie van Grönwall).

Als $\{A_i\}, \{a_i\}$ een rij van niet-negatieve reële getallen zijn, $q \geq 0$ en

$$a_i \leq A_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_j q \quad \text{voor } i \in \mathbb{N},$$

dan geldt: $a_i \leq A_i + \exp(q_i) \sum_{j=1}^{i-1} A_j q$ voor $i \in \mathbb{N}$.

Bewijs. Zie [3]. □

C Python-code

```

1 """
inverse problem: search for (K(t),u) such that
    u_t - u_xx + (K*u)(t) = \int_0^t f(u(s)) \, ds + F(x,t)
                                     in [0,1] * (0,T)
    -u_x = g(t)                      on space-boundary (x=0 and x=1)
6    u(x,0) = u0(x)                   on time-boundary (t=0)

with
    (K*u)(t) = \int_0^t K(t-s)u(s)ds,
    T=1.0
11
from the overdetermination data
    \int_0^1 u(x,t) = m(t)

where F(x,t) is added so we won't lose the dependency of u in the
16 function f(u(s))

The data in the experiment is ...
    u_e = Expression('(pow(t,3)+1.0)*(pow(x[0],2)+1.0)',t=0.0)
    K_e = Expression("pow(t,4)+pow(t,2)+1.0",t=0.0)
21    f_e = U + 5.0

The file can be executed by the command
python prob2.py
26 """
# Copyright (C) 2015 Karel Van Bockstal
# The results are written down in the following file

filedata = open('data.txt','w')
31 filedata.close()

# First import some packages

from dolfin import *
36 import numpy as np
from math import log

# The following program will be repeated with several steplength
for Nt in range(2,9):
41     print Nt

    # Set time parameters

    N = pow(2,Nt)
46     # number of time intervals as power of two
    T = 2.0
    # final time
    dt = T / N
    # timestep
51     tp = np.linspace(0.0,T,N+1)
    # array with time points

    # Numerical and exact solution unknown kernel are saved in this file
    filedate = open('kernel_numsol_with_number_of_time_intervals_' + str(N) + '.txt','w')
56

    # Create mesh: suppose Omega is unit interval [0,1]
    # i.e. Set space parameters

```

```

61 mesh = UnitIntervalMesh(50)
# plot(mesh, interactive = True)
# this plots the UnitIntervalMesh that has 50 nodes

nodeCoordinates = np.array(mesh.coordinates())
66 # this matrix stores the node coordinates
# i.e. one row corresponds with the x-coordinates of the nodes
# note: this is defined as a matrix because we will add rows
#         with the values of the approximations of the solution

71 numver = len(nodeCoordinates)
# this is the number of nodes in previous array
# note that this number is one more than the number defined in
#         the mesh since the first nodenumber is 0

76 # Define the space functions

V = FunctionSpace(mesh, "Lagrange", 1)
# first order lagrange elements

81 Ve = FunctionSpace(mesh, "Lagrange", 3)
# space for exact solution

86 # Defines the interior of the domain

domains = CellFunction("size_t", mesh)
# this is a MeshFunction with dimension 1 containing 50 values
domains.set_all(0)
91 # this initializes the previous mesh function for interior domains

# Defines the boundaries of the domain

96 boundaries = FacetFunction("size_t", mesh)
boundaries.set_all(0)

# Defining the boolean functions for the boundary conditions

101 gOnLeft = AutoSubDomain(lambda x, on_boundary: near(x[0], 0.0))
gOnRight = AutoSubDomain(lambda x, on_boundary: near(x[0], 1.0))
gOnLeft.mark(boundaries, 0)
gOnRight.mark(boundaries, 1)

106 dx = Measure("dx")[domains]
# this measurement is associated with the interior of the domain

ds = Measure("ds")[boundaries]
111 # this measurement is associated with the exterior boundaries;
# i.e. assign ds(0) with the left boundary x=0 and ds(1) with
#         the right boundary ds(1)

116 #####
"""
Main part of the code: define here the data
"""
#####

```

```

121 # Exact solution

u_e = Expression('(pow(t,3)+1.0)*(pow(x[0],2)+1.0)',t=0.0)
K_e = Expression("pow(t,4)+pow(t,2)+1.0",t=0.0)
126
K_exact_values = np.zeros((N+1,1))
K_exact_values[:,0] = pow(tp,4)+pow(tp,2)+1.0
#this is an array to save the values for the exact kernel on
#      each time step (uses vector tp defined above)
131
u_values = np.zeros((N+1,1))
K_values = np.zeros((N+1,1))
#this is an array to save the values for the approximations of
#      the kernel on each time step
136

# Initial condition

u0 = Expression("pow(x[0],2)+1.0")
141 #this is the u_e(t=0)

# Boundary condition

146 gLeft = Expression("0.0",t=0.0)
#this is u_e differentiated and x put to zero
gRight = Expression("-2.0*(pow(t,3)+1.0)",t=0.0)
#this is u_e differentiated and x put to one

151 gLeft_derv = Expression("0.0",t=0.0)
gRight_derv = Expression("-6.0*pow(t,2)",t=0.0)

gLeft_values = np.zeros((N+1,1))
gRight_values = np.zeros((N+1,1))
156 gLeft_values[:,0] = 0.0
gRight_values[:,0] = -2.0*(pow(tp,3)+1.0)
#this is an array that saves the values of the boundary

gLeft_derv_values = np.zeros((N+1,1))
161 gRight_derv_values = np.zeros((N+1,1))
gLeft_derv_values[:,0] = 0.0
gRight_derv_values[:,0] = -6.0*pow(tp,2)
#this is an array that saves the values of the boundary derived

166
# Global measurement

energy_measurement = Expression('4.0/3 * (pow(t,3)+1.0)',t=0.0)
energy_measurement_derv = Expression('4.0*pow(t,2)',t=0.0)
171 energy_measurement_second_derv = Expression('8.0*t',t=0.0)

m_values = np.zeros((N+1,1))
m_values[:,0] = 4.0/3 * (pow(tp,3)+1.0)
#this is an array to save the values of the energy measurements
#      on each timestep
176
m_derv_values = np.zeros((N+1,1))
m_derv_values[:,0] = 4.0*pow(tp,2)
#this is an array to save the values of the first derivative of
#      the energy measurements on each timestep
181

```

```

m_second_derv_values = np.zeros((N+1,1))
m_second_derv_values[:,0] = 8.0*tp
#this is an array to save the values of the second derivative
186 #         of the energy measurement on each timestep

# Right hand side of the equation

191 def f_u(U):
    return U + 5.0

F = Expression("(pow(x[0],2) + 1.0)*(1.0/280*pow(t,8)
                + 1.0/60*pow(t,6) + 1.0/5*pow(t,5) + 1.0/3*pow(t,3)
                + 3.0*pow(t,2)) - (2.0*pow(t,3) + 5.0*t + 2.0)",t=0.0)
196 #this is the left hand side of the equation solved with the u_e
    #         and the K_e inserted, and with f_int subtracted at the end

F_derv_time = Expression("(pow(x[0],2) + 1.0)*(1.0/35*pow(t,7)
                           + 1.0/10*pow(t,5) + pow(t,4) + pow(t,2) + 6.0*t)
                           - (6.0*pow(t,2) + 5.0)",t=0.0)
201

#####
206 """
Now we solve the problem
"""
#####

211 # Initialising some parameters

# The norms on u
abs_L2_squared_error_on_u = 0.0
rel_L2_squared_error_on_u = 0.0
216 # we also consider the relative norm since the error of the
    #         approximation since it can be quite bigger between the
    #         nods than in the nods theirselves

max_abs_L2_squared_error_on_u = 0.0
221 abs_L2_squared_error_on_u_whole_time_domain = 0.0
# will be used in the end of the program

# The norms on K
maxerror_on_K = 0.0
226 abs_L2_squared_error_K = 0.0

# Some handy variables that we will use in our calculations
aa = 0.0
bb = 0.0
231 cc = 0.0

# The time index
time_index = 0

236 # The matrix to save the solution in the nodes on each timestep
solutionmatrix = np.zeros((numver,N+1))
# numver is the amount of nodes

241 # Define the initial solution

```



```

u_ini = interpolate(u0, V)
solutionmatrix[:,0] = u_ini.vector().array()

246 #print u_1.vector().array()
    #print u_1.vector().array()[0] #value u0 in right end!
    #print u_1.vector().array()[-1] #value u0 in left end!

251 # Define test and trial functions

u = TrialFunction(V)
phi = TestFunction(V)

256 # Define variational problem

a = 1.0/dt*u*phi*dx + inner(nabla_grad(u),nabla_grad(phi))*dx
A = assemble(a)
261 # we only assemble once, right before the time stepping
    # assemble means that we integrate over the whole space

# Calculate K_0
266 K_values[0,0] = 1.0/m_values[0,0] *
                (assemble((f_u(u_ini) + F_derv_time)*dx(mesh))
                 - gRight_derv_values[0,0]
                 - gLeft_derv_values[0,0]
                 - m_second_derv_values[0,0])
271 # note we have not updated time so all time_indices are equal
    # to zero

    #print K_values[0,0]
276 # Save the exact and numerical solution on each timestep in
    # the file kernel.txt
maxerror_on_K = abs(K_exact_values[0,0] - K_values[0,0])
281 filedata = open('kernel_numsol_with_number_of_time_intervals_'
                  + str(N) + '.txt','a')

filedata.write('%i ' % 0)
filedata.write('%i ' % 0)
286 # these represent the index of the vectors that follow
filedata.write('%%.10f ' % K_exact_values[0,0])
filedata.write('%%.10f ' % K_values[0,0])
filedata.write('%%.10f\n' % maxerror_on_K)
filedata.close()

291 # Update time
t = dt
b = None

296 while t <= T:
    time_index += 1
    print 'timestep =', time_index

301 # Update sources/known data
F.t = t

```

```

F_derv_time.t = t
306 gLeft.t = t
    gLeft_derv.t = t
    gRight.t = t
    gRight_derv.t = t

311 energy_measurement.t = t
    energy_measurement_derv.t = t
    energy_measurement_second_derv.t = t

316 # Calculate the convolution in expression for K_i
    conv_inK = 0.0
    #set the convolution on each timestep back to zero
    if (time_index > 1):
        for j in range(1,time_index):
321             conv_inK += K_values[j,0] * m_derv_values[time_index-j,0]*dt

    # Determine K_i
    if (time_index == 1):
326         K_values[time_index,0] =
            1.0/(m_values[0,0] + m_derv_values[0,0]*dt) *
            ( assemble((f_u(u_ini) + F_derv_time)*dx(mesh))
              - gRight_derv_values[time_index,0]
              - gLeft_derv_values[time_index,0]
331              - m_second_derv_values[time_index,0] )
    else:
        K_values[time_index,0] =
            1.0/(m_values[0,0] + m_derv_values[0,0]*dt) *
            ( assemble((f_u(u_ini) + F_derv_time)*dx(mesh))
              - gRight_derv_values[time_index,0]
336              - gLeft_derv_values[time_index,0]
              - m_second_derv_values[time_index,0]
              - conv_inK )

341 #Integral \int_0^t f(u(s)) \ds in RHS variational formulation
    integral_source = Function(V)

    #set the convolution on each timestep back to zero
346 for j in range(0,time_index):
        integral_source.vector()[:] += f_u(solutionmatrix[:,j])*dt

    #Convolution with solution in RHS variational formulation
351 conv_invarfor = Function(V)

    #set the convolution on each timestep back to zero
    for j in range(1,time_index+1):
        conv_invarfor.vector()[:] +=
356             K_values[j,0]*solutionmatrix[:,time_index-j]*dt

    # Initialize the parameters for the solution

361 u = TrialFunction(V)
    L = integral_source*phi*dx + F*phi*dx
        - gRight*phi*ds(1) - gLeft*phi*ds(0)
        - conv_invarfor*phi*dx

```

```

+ 1.0/dt*u_ini*phi*dx
366
u = Function(V)
b = assemble(L)

371 # Determine the solution u

u = Function(V)
solve(A, u.vector(), b)
assign(u_ini,u)
376 # Assign solution current timestep as previous solution on
# following timestep
solutionmatrix[:,time_index] = u.vector().array()

381 # Computing the absolute error involving K on each timepoint

maxerror_on_K = abs(K_exact_values[time_index,0]
- K_values[time_index,0])

386 # Computing the functions used for the approximation of
# the L2-norm using Simpsons Rule

aa = pow(K_values[time_index-1,0]
-K_exact_values[time_index-1,0],2)
391 bb = pow( (K_values[time_index-1,0]
+ K_values[time_index,0])/2.0
- (1.0 + pow(((time_index-1)*dt + time_index*dt)/2.0,2)
+ pow(((time_index-1)*dt + time_index*dt)/2.0,4)) ,2)
cc = pow(K_values[time_index,0]-K_exact_values[time_index,0],2)

396 abs_L2_squared_error_K += dt/6.0*(aa+4.0*bb+cc)

# Computing the absolute and relative errors involving u on
401 # each timepoint

u_e.t = t
u_e_Ve = interpolate(u_e,Ve)
# update the solution and interpolate it so we can use it to
406 # calculate the errors

abs_L2_squared_error_on_u =
assemble(inner(u-u_e_Ve, u-u_e_Ve)*dx(mesh))
# this is the 'normal' norm of the error

411 rel_L2_squared_error_on_u =
sqrt(abs( assemble(inner(u-u_e_Ve, u-u_e_Ve)*dx(mesh))
/ assemble(inner(u_e_Ve, u_e_Ve)*dx(mesh)) ))
# this is the squared root of the relative norm,
416 # i.e. the norm of the error divided by the norm of
# the exact solution

# Computing the maximum error involving u

421 if (abs_L2_squared_error_on_u > max_abs_L2_squared_error_on_u):
max_abs_L2_squared_error_on_u = abs_L2_squared_error_on_u

#print 'The absolute error on u on time

```

```

426         %.3f is %.10f' % (t,abs_L2_squared_error_on_u)
    #print 'The relative error on u on time
           %.3f is %.10f' % (t,rel_L2_squared_error_on_u)
    #print 'The maximum error on u on time
           %.3f is %.10f' % (t,maxerror_on_u)
431
    #plot(u,title = "numerical solution for u on t = %.10f" % t)
    #plot(u-u_e_V,interactive=True, title = "fout on t = %.10f" % t)
    #plot(u_e_V,interactive=True, title =
           "exact solution for u on t = %.10f" % t)
436
    # Computing the absolute error on the whole time-domain

    abs_L2_squared_error_on_u_whole_time_domain +=
441         dt*assemble(inner(u-u_e_Ve, u-u_e_Ve)*dx(mesh))
    #this is taking the sum over all timepoints

446    # Saving the data in the file for the kernel

    filedata = open('kernel_numsol_with_number_of_time_intervals_'
                    + str(N) + '.txt','a')
    filedata.write('%i ' % time_index)
451    filedata.write('%10f ' % (time_index*dt))
    filedata.write('%10f ' % K_exact_values[time_index,0])
    filedata.write('%10f ' % K_values[time_index,0])
    filedata.write('%10f\n' % maxerror_on_K)
    filedata.close()
456

    # Update time so the loop would be finit

    t += dt
461    #this is the last step in the loop

    # Safe the data in the file for the solution u

466    filedata= open('data.txt', 'a')
    filedata.write('%i ' % Nt)
    filedata.write('%10f ' % dt)
    filedata.write('%10f ' % log(dt,2))
    filedata.write('%10f ' %
471         log(abs_L2_squared_error_on_u_whole_time_domain,2))
    filedata.write('%10f\n' % log(abs_L2_squared_error_K,2))
    filedata.close()
    #this is the last step in the repeated program

476    # Hold plot
    # interactive()

```

Referenties

- [1] Van Bockstal, K.: *Bepaling van een onbekende diffusiecoëfficiënt in een parabolisch begin- en randwaardenprobleem*. scriptie, Universiteit Gent, juni 2010. https://cage.ugent.be/~kvb/images/masterthesis_vanbockstal.pdf.
- [2] De Schepper, N. en De Bie, H.: *Wiskundige Analyse V*, 2012.
- [3] Slodička, M.: *Partial Differential Equations*, September 2013.
- [4] Grimmonprez, M.: *Partiële differentiaalvergelijkingen met niet-lokale randcondities*. scriptie, Universiteit Gent, Mei 2011. http://lib.ugent.be/fulltxt/RUG01/001/787/543/RUG01-001787543_2012_0001_AC.pdf.
- [5] Rowland, T.: *C-k Function*, Mei 2015. <http://mathworld.wolfram.com/C-kFunction.html>, created by Weisstein, E.W.
- [6] Vernaeve, H.: *Wiskundige Analyse IV*, 2011.
- [7] Ding, Z.: *A proff of the trace theorem of sobolev spaces on Lipschitz domains*. American Mathematical Society, 124(2), Februari 1996.
- [8] Rektorys, K.: *Variational methods in mathematics, science and engineering*, 1980.
- [9] Nečas, J.: *Les Méthodes directes en théories des équations elleptiques*, 1967.
- [10] Slodička, M.: *Approximation methods for boundary value problems*, Februari 2015.
- [11] Brenner, S.C. en Ridgway, S.L.: *The mathematical theory of finite element methods*. Springer, 2002, ISBN 978-0-387-75934-0.
- [12] Slodička, M. en Malengier, B.: *Wiskundige modellering in de ingenieurswetenschappen*, September 2011.
- [13] Delleur, J.: *The Handbook of Groundwater Engineering*. CRS Press, 1999, ISBN 978-0-8493-4316-2.
- [14] Logg, A. en Mardal, K. en Wells G.A. et al.: *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer, 2012, ISBN 978-3-642-23098-1.
- [15] Langtangen, H.P.: *A FEniCS Tutorial*, November 2011. <http://fenicsproject.org/documentation/tutorial/index.html>.
- [16] Eidelman, Y. en Milman, V. en Tsoolomitis A.: *Functional Analysis: An Introduction*, 2004.
- [17] Amann, H. en Escher, J.: *Analysis III*. Birkhäuser-Verslag Basel Boston Berlin, 2001, ISBN 3-7643-6613-3.

- [18] Wheeden, R.L. en Zygmund, A.: *Measure and integral: an introduction to real analysis*. Marcel Dekker, Inc., 1997, ISBN 978-0-824-76499-9.
- [19] Impens, C.: *Wiskundige Analyse I*, September 2010.