

Universiteit Gent
Faculteit Wetenschappen
Vakgroep Wiskunde

**De Dehnfunctie van $SL(n, \mathbb{Z})$ en diens actie
op de symmetrische ruimte $SL(n, \mathbb{R}) / SO(n, \mathbb{R})$**

JENS BOSSAERT



UNIVERSITEIT
GENT

Academiejaar 2016–2017

Promotor: Prof. Dr. TOM DE MEDTS

Masterproef ingediend tot het behalen
van de academische graad van master
in de wiskunde



Inhoudsopgave

Voorwoord	v
Toelating tot bruikleen	vii
1 Algemene groepentheorie	9
1.1 Liegroepen	9
1.2 Matrixgroepen	14
1.3 Haarmaten	15
1.4 Roosters	17
2 Inleiding tot symmetrische ruimten	21
2.1 Riemannmeetkunde	21
2.2 Symmetrische ruimten, meetkundig	25
2.3 Symmetrische ruimten, algebraïsch	26
2.4 Voorbeelden	30
3 Inleiding tot Dehnfuncties	35
3.1 Dehnfuncties, combinatorisch	35
3.2 Dehnfuncties, meetkundig	38
3.3 Verband tussen beide definities	39
3.4 Gerelateerde begrippen	40
3.4.1 Relatieve Dehnfuncties	40
3.4.2 Templates	41
3.4.3 Triangulaire Dehnfuncties	42
4 Resultaten voor $SL(n, \mathbb{Z})$ en $SL(n, \mathbb{R})$	45
4.1 $SL(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$ als symmetrische ruimte	45
4.2 $SL(n, \mathbb{Z}) \setminus SL(n, \mathbb{R})$ als ruimte van roosters	45
4.3 Parabolische deelgroepen	46
5 Reductietheorie	49
5.1 Iwasawadecompositie	49
5.2 Reductie via Siegelverzamelingen	50
5.2.1 Siegelverzamelingen	50
5.2.2 Roosters in \mathbb{R}^n	53
5.2.3 Siegelverzamelingen zijn ruwe fundamentealgebieden	55
5.2.4 Siegelverzamelingen hebben eindig volume	56
5.2.5 $SL(n, \mathbb{Z})$ is een (non-uniform) rooster in $SL(n, \mathbb{Z})$	57
5.3 Dieptefunctie	57
6 Eigenschappen van de normaalvorm	61
6.1 Steinbergpresentatie	61
6.2 Shortcuts	62

Inhoudsopgave

6.3	Resultaten van Lubotzky–Mozes–Raghunathan	64
6.4	Normaalvorm ω	65
6.5	Shortcuts manipuleren	66
7	Dehnfunctie van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ voor $n < 4$	69
7.1	Dehnfunctie van $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$	69
7.2	Dehnfunctie van $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$	71
8	Dehnfunctie van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ voor $n > 4$	73
8.1	Bewijsschets	73
8.2	Herleiden naar parabolische deelgroepen	75
8.3	Herleiden naar diagonaalblokken	79
8.4	Shortcuts wegwerken	80
8.5	Inductiebasis	80
	Summary in English	83
	Bibliografie	85



Voorwoord

Deze masterproef zou de apotheose van mijn opleiding Wiskunde aan de Universiteit Gent moeten zijn, en is dan ook niet zomaar in één hokje te stoppen. Het wiskundige domein dat er het beste bij aansluit is dat van de geometrische groepentheorie, en deze naam verradt al twee verschillende wiskundige visies.

Aan ene kant is er een meetkundig aspect en bestuderen we bijvoorbeeld een bijzondere klasse van Riemannvariëteiten die vol symmetrieën zitten. Aan de andere kant is er een algebraïsch aspect en bestuderen we bijvoorbeeld de Liegroepen en -algebra's die achter deze variëteiten schuilen. Vooral de wisselwerking tussen deze interpretaties is wat dit een vruchtbare theorie maakt, en de volgende quote van Sir Michael Atiyah vat dit prachtig samen.

*“Should you just be an algebraist or a geometer?”
is like saying “Would you rather be deaf or blind?”*

Naast algebra en meetkunde komen ook een aantal topologische en analytische concepten aan bod, en enkele speelsere combinatorische resultaten als Fibonaccigetallen in de Zeckendorfrepresentatie of de formules van Pick. Al deze ingrediënten zullen ons uiteindelijk leiden tot een recent indrukwekkend bewijs van Young, voor een vermoeden van Thurston dat sinds de jaren 90 openstond.

Vermoeden (Thurston). De groep $SL(n, \mathbb{Z})$ heeft een kwadratische Dehnfunctie zodra $n \geq 4$.

In de publicatie [You09] kon Robert Young de dan best gekende exponentiële bovengrens verlagen tot een vierdegraadsfunctie, en in [You13] werd dit verbeterd tot de vooropgestelde kwadratische grens. In beide gevallen echter werkt het bewijs pas voor $n \geq 5$, en vandaag staat staat het probleem voor $n = 4$ nog steeds open. Het doel van deze masterproef is om de vereiste achtergrondkennis voor Thurstons vermoeden en Youngs bewijs te duiden, de argumenten van Young uiteen te zetten en van achtergrond te voorzien, en uiteraard ook na te gaan wat er misloopt voor $n = 4$.

We gaan van start met wat algemenere achtergrond over Liegroepen, Haar maten en roosters in Liegroepen in hoofdstuk 1. In hoofdstuk 2 voeren we symmetrische ruimten zowel differentiaalmeetkundig als Liegroepentheoretisch in en bespreken we de verbanden tussen beide visies. Wat een Dehnfunctie juist inhoudt en hoe men deze meetkundig kan bepalen is het onderwerp van hoofdstuk 3. Deze eerste hoofdstukken zijn vrij algemeen; pas in hoofdstuk 4 wijden we onze aandacht volop aan de speciale lineaire groepen, om in hoofdstuk 5 aan te tonen dat $SL(n, \mathbb{Z})$ een rooster vormt in $SL(n, \mathbb{R})$. In hoofdstuk 6 bespreken we een manier om matrices voor te stellen via korte woorden in een presentatie. Hoofdstuk 7 behandelt de reeds langer gekende Dehnfuncties voor de gevallen $n < 4$, en tot slot komen alle verzamelde resultaten samen in hoofdstuk 8, waar we onze aandacht richten op het bewijs van Young.

Onze hoop is dat de lezer van deze masterproef de resultaten van Young naar waarde kan schatten en een aantal vereiste begrippen of bewijzen die Young onder de mat schuift, hier kan terugvinden. Hiermee willen we echter helemaal niet beweren dat we alle constructies van Young tot op het bot hebben kunnen ontleden: de achtergrondkennis nodig om alle subtiliteiten en technieken uit te klaren, vergt meer dan we in de tijdspanne van een academiejaar hebben kunnen bereiken. Voor de meest technische resultaten verwijzen we dus nog steeds naar het originele artikel [You13], maar het globale overzicht van het bewijs zou duidelijk moeten zijn.

Voorwoord

Deze masterproef zou niet tot een goed einde gekomen zijn zonder de uitstekende begeleiding en bijhorend advies van mijn promotor, professor Tom De Medts, aan wie een dankwoord slechts een povere uiting van erkentelijkheid is. Ook aan professor Frans Cantrijn dien ik een woord van dank te richten, voor het helpen uitklaren van enkele differentiaalmeetkundige obstructies.

De doorsnede student is zich te zelden bewust van alle inspanningen van het thuisfront; vandaar ook een uitdrukkelijk dankwoord gericht aan mijn moeder, Kathy Timperman, om ervoor te zorgen dat het dagelijkse leven in tijden van studeren zorgeloos kan voorbijgaan. Mijn vriendin Sara Chiers ben ik erkentelijk voor alle bijstand, op zoveel vlakken, op zoveel momenten. Ook mijn vrienden Lisa Hernandez Lucas en Jozefien D'haeseleer wil ik hier bedanken voor hun eeuwige steun, zowel in de lessen als daarbuiten.

Jens Bossaert, 31 mei 2017



Toelating tot bruikleen

De auteur geeft de toelating deze masterproef voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van de masterproef te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit deze masterproef.

Jens Bossaert, 31 mei 2017

1

Algemene groepentheorie

We gaan van start met enkele algemene definities, concepten, notaties en stellingen uit de theorie van Liegroepen, Haarmaten en roosters, die een rol spelen in het centrale vraagstuk van dit project—het bepalen van de Dehnfunctie van $SL(n, \mathbb{Z})$. Uiteraard zijn deze wiskundige gebieden reeds zeer diepgaand bestudeerd, dus kunnen we slechts stilstaan bij een selectie van relevante resultaten en verwijzen we naar een van de talloze referenties zoals [Kna02] of [Hel78] voor verdere informatie. Onze eerste kennismaking met het thema was de cursus *Differentiaalmeetkunde II*.

We gaan er steeds vanuit dat we werken met eindigdimensionale vectorruimten en variëteiten over de reële getallen.

1.1 Liegroepen

We starten uiteraard met enkele noodzakelijke definities voor Liegroepen en Lie-algebra's alvorens deze aan elkaar te linken.

Definitie 1.1 (Liegroep). Een *Liegroep* G is een groep uitgerust met de structuur van een differentieerbare variëteit zodanig dat de samenstelling $G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto gh$ en de inverse afbeelding $G \rightarrow G : g \mapsto g^{-1}$ gladde afbeeldingen zijn.

Definitie 1.2 (Liegroepmorfisme). Een afbeelding $\phi : G \rightarrow H$ tussen Liegroepen is een *Liegroepmorfisme* als ϕ een morfisme tussen groepen is in de klassieke betekenis, en bovendien glad is voor de variëteitsstructuren.

Definitie 1.3 (Lie-algebra). Een *Lie-algebra* \mathfrak{g} over \mathbb{R} is een vectorruimte over \mathbb{R} voorzien van een *Liehaakje* $[\bullet, \bullet] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ met volgende eigenschappen, voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ en $x, y, z \in \mathfrak{g}$:

- bilineariteit: $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ en $[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$;
- alternativiteit: $[x, x] = 0$;
- de Jacobi-identiteit: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

De eerste twee eigenschappen loslaten op $[x + y, x + y]$ leert dat $[x, y] = -[y, x]$ voor alle $x, y \in \mathfrak{g}$, dus het Liehaakje is ook steeds antisymmetrisch. Als de karakteristiek van het achterliggend veld verschilt van twee, zoals wij veronderstellen, dan volgt omgekeerd alternativiteit uit antisymmetrie.

Definitie 1.4 (Lie-algebramorfisme). Een afbeelding $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tussen Lie-algebra's heet een *Lie-algebramorfisme* als ϕ een lineaire afbeelding is tussen vectorruimten, die bovendien compatibel is met het Liehaakje: voor alle $x, y \in \mathfrak{g}$ moet gelden dat $[\phi(x), \phi(y)] = \phi([x, y])$.

Definitie 1.5 (ideaal). Beschouw een Lie-algebra \mathfrak{g} . Een deelruimte $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{g}$ heet een *Lie-deelalgebra* als deze gesloten is onder het Liehaakje (met andere woorden als geldt dat $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$), en een *ideaal* als de strengere voorwaarde $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ geldt.

Er bestaat een eenvoudige manier om een willekeurige \mathbb{R} -vectorruimte tot een Lie-algebra te structureren, door het Liehaakje identisch nul te definiëren. In dit geval noemen we de Lie-algebra *abels*.

A priori schijnen definities 1.1 en 1.3 niet meteen gerelateerd, maar het feit dat er wel degelijk een sterk verband bestaat is een van de redenen dat de Lietheorie zo succesvol is. Dit verband schuilt in de ruimte van links-invariante vectorvelden op de Liegroep, die we isomorf kunnen praten met de raakruimte aan de eenheid, maar ook van een canonisch Liehaakje kunnen voorzien. Herinner je dat voor een algemene variëteit M , een glad vectorveld $X \in \mathfrak{X}(M)$ per definitie een C^∞ -afbeelding is van de variëteit M naar de raakbundel TM , zodat $X(x) \in T_x M$ voor alle $x \in M$. Intuïtief hecht een glad vectorveld een raakvector aan elk punt, dat bovendien glad varieert langsheen de variëteit. Voor Liegroepen kunnen we kijken naar een bijzondere klasse van vectorvelden, die compatibel zijn met de groepsstructuur; vandaar volgende definitie.

Definitie 1.6 (invariant vectorveld). Schrijf $L_g : G \rightarrow G : h \mapsto gh$ en $R_g : G \rightarrow G : h \mapsto hg$ voor alle $g \in G$. Een vectorveld $X \in \mathfrak{X}(G)$ op een Liegroep G heet *links-invariant* als de raakafbeeldingen van de translaties L_g symmetriëren van X zijn, i.e. als voor alle $g, h \in G$ geldt dat

$$(T_h L_g)(X(h)) = X(gh).$$

Uiteraard worden rechts-invariante vectorvelden op analoge wijze gedefinieerd.

Lemma 1.7. Noteren we de ruimte van alle links-invariante gladde vectorvelden op een Liegroep G als \mathfrak{g} , dan is de afbeelding $\mathcal{L} : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G : X \mapsto X(e)$ een isomorfisme van vectorruimten.

Bewijs. Een links-invariant vectorveld X wordt volledig bepaald door zijn waarde in de oorsprong, daar per definitie $X(g) = T_e L_g(X(e))$ moet gelden.

Omgekeerd, gegeven een raakvector $v \in T_e G$ aan de oorsprong, definieert $X(g) = T_e L_g(X(e))$ een links-invariant vectorveld. We moeten enkel nog aantonen dat dit vectorveld bovendien glad is. Beschouw de raakafbeelding $Tm : TG \times TG \rightarrow TG$ van de groepsbewerking $m : G \times G \rightarrow G$; aangezien m per definitie glad is, geldt hetzelfde voor Tm . Daarenboven is $X(g) = Tm_{(g,e)}(0, v)$: als γ een kromme in G is met $\gamma'(0) = v$, dan is namelijk

$$Tm_{(g,e)}(0, v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (m(g, \gamma(t))) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g\gamma(t)) = T_e L_g(\gamma'(0)) = T_e L_g(v).$$

We concluderen dat $X(g)$ inderdaad glad is.

Tot slot is \mathcal{L} vanzelfsprekend lineair, daar per definitie $(aX + bY)(e) = aX(e) + bY(e)$ voor alle scalaren a, b en vectorvelden X, Y . ■

De ruimte \mathfrak{g} van vectorvelden is uitgerust met een natuurlijk Liehaakje. In de cursus *Differentiaalmeetkunde II* worden vectorvelden opgevat als afleidingsoperatoren op de ruimte $\mathcal{F}(G)$ van gladde functies op G . Onder deze interpretatie definieert men het Liehaakje van X en Y door

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Bovendien wordt dit Liehaakje bewaard onder diffeomorfismen, en in het bijzonder onder de raakafbeeldingen TL_g . Dit betekent dat als X en Y links-invariant zijn, dan ook hun Liehaakje, daar

$$TL_g([X, Y]) = [TL_g(X), TL_g(Y)] = [X, Y].$$

Lemma 1.7 laat toe om dit Liehaakje over te dragen op de raakruimte $T_e G$ aan de identiteit van G . We noemen $T_e G$ voorzien van deze Lie-algebrastructuur kortweg de *Lie-algebra van G* , en noteren die ook als $\text{Lie}(G)$ of \mathfrak{g} in gotische letters.

Aangezien $T_e G$ slechts afhangt van de lokale structuur van G rond de eenheid (en in het bijzonder van de samenhangscomponent van de identiteit), kunnen we niet verwachten dat er een algemene één-op-ééncorrespondentie bestaat tussen Liegroepen en Lie-algebra's. Echter:

Stelling 1.8 (Liecorrespondentie). De afbeelding $\text{Lie} : G \rightarrow \text{Lie}(G)$ is een functor van de categorie van Liegroepen naar de categorie van Lie-algebra's, en definieert bovendien een equivalentie tussen de subcategorie van enkelvoudig samenhangende Liegroepen en de Lie-algebra's. Concreet:

- elke Lie-algebra is de Lie-algebra van een enkelvoudig samenhangende Liegroep;
- voor elk Lie-algebramorfisme $\phi : \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(H)$ met $\text{Lie}(G)$ enkelvoudig samenhangend bestaat er een uniek Liegroepmorfisme $f : G \rightarrow H$ zodat $Tf = \phi$.

Daarnaast corresponderen abelse, nilpotente en oplosbare Liegroepen onder de Liecorrespondentie met abelse, nilpotente en oplosbare Lie-algebra's, respectievelijk.

Zonder bewijs. ▀

Als we de differentieerbare structuur van een Liegroep verder upgraden tot een Riemannvariëteitsstructuur (zie hoofdstuk 2.1 voor de definities), dan kunnen we een gelijkaardige equivalentie zien tussen invariante globale Riemannmetrieken en afzonderlijke inproducten in de raakruimte $T_e G$.

Definitie 1.9 (invariante metriek). Een Riemannmetriek op een Liegroep G heet *links-invariant* als linkse translaties isometrieën van G zijn, dus als geldt dat

$$\langle u, v \rangle_h = \langle TL_g(u), TL_g(v) \rangle_{gh}$$

voor alle $g, h \in G$ en $u, v \in T_h G$. Rechts-invariante metrieken worden analoog gedefinieerd.

Lemma 1.10. Er bestaat een bijectief verband tussen links-invariante metrieken op een Liegroep G enerzijds en inproducten op de Lie-algebra \mathfrak{g} van G anderzijds.

Bewijs. Beschouw eerst een links-invariante Riemannmetriek op G . Per definitie geeft deze meteen een inproduct op de Lie-algebra $\mathfrak{g} = T_e G$. Omgekeerd, een inproduct $\langle \bullet, \bullet \rangle_e$ op \mathfrak{g} is eenvoudig uit te breiden tot een invariante Riemannmetriek door linkse translatie naar andere punten $h \in G$, via volgende definitie voor alle $h \in G$ en $u, v \in T_h G$:

$$\langle u, v \rangle_h = \langle TL_{h^{-1}}(u), TL_{h^{-1}}(v) \rangle_e. \quad \blacksquare$$

In de cursus *Differentiaalmeetkunde II* wordt aangetoond dat invariante vectorvelden *compleet* zijn, i.e. dat er door elk punt een (unieke) integraalkromme bestaat met geheel \mathbb{R} als domein. Beschouw concreet een raakvector $v \in \mathfrak{g}$ en het bijhorende links-invariante vectorveld X_v met $X_v(e) = v$; noteer dan $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow G$ voor de integraalkromme van X_v door de identiteit, zodat dus $\gamma_v(0) = e$ en $T\gamma_v(t) = X_v(\gamma_v(t))$.

Definitie 1.11 (exponentiële afbeelding). De *exponentiële afbeelding* is de afbeelding

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G : v \mapsto \gamma_v(1).$$

Via de uniciteit van de maximale integraalkrommen kan men de volgende eigenschap afleiden.

Lemma 1.12. Voor alle $s, t \in \mathbb{R}$ en alle $v \in \mathfrak{g}$ is $\exp(0) = e$ en $\exp((s+t)v) = \exp(sv)\exp(tv)$. Met andere woorden, de afbeelding $\phi_v : \mathbb{R} \rightarrow G : t \mapsto \exp(tv)$ is voor elke $v \in \mathfrak{g}$ een morfisme van de abelse groep $(\mathbb{R}, +)$ naar G (en wordt ook wel een *1-parameterdeelgroep* genoemd).

Zonder bewijs. Dit wordt bewezen in *Differentiaalmeetkunde II*, en daar wordt eveneens aangetoond dat elke 1-parameterdeelgroep van de vorm ϕ_v is voor zekere $v \in \mathfrak{g}$. ▀

Definitie 1.13 (toegevoegde representatie). Zij G een Liegroep met Lie-algebra \mathfrak{g} .

- (1) Beschouw de afbeelding die elk groeps-element afstuurt op het overeenkomstige toevoegings-automorfisme:

$$\Psi : G \rightarrow \text{Aut}(G) : g \mapsto (\Psi_g = L_g \circ R_{g^{-1}} : G \rightarrow G : h \mapsto ghg^{-1}).$$

- (2) Via de Liecorrespondentie geeft de differentiaal van elk groepsautomorfisme Ψ_g een algebra-automorfisme van \mathfrak{g} . Dit bepaalt de *toegevoegde* of *geadjungeerde representatie*

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) : g \mapsto (\text{Ad}_g = T_e \Psi_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} : v \mapsto T_e \Psi_g(v)).$$

Merk op dat $\Psi_g \circ \Psi_h = \Psi_{gh}$ en dat $\text{Ad}_g \circ \text{Ad}_h = \text{Ad}_{gh}$, zodat de toevoegde representatie een morfisme bepaalt tussen de groepen G en $\text{Aut}(\mathfrak{g}) \leq \text{GL}(\mathfrak{g})$.

- (3) Omdat Ad een Liegroeps morfisme is, kunnen we er opnieuw de differentiaal van nemen:

$$\text{ad} = T_e \text{Ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) : v \mapsto \text{ad}_v = (T_e \text{Ad})(v).$$

Men kan narekenen dat expliciet $\text{ad}_v(w) = [v, w]$ voor alle $v, w \in \mathfrak{g}$.

We kunnen de relaties tussen deze morfismen samenvatten in commutatieve diagrammen:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ \downarrow \text{exp} & & \downarrow \text{exp} \\ G & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{GL}(\mathfrak{g}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad}_g} & \mathfrak{g} \\ \downarrow \text{exp} & & \downarrow \text{exp} \\ G & \xrightarrow{\Psi_g} & G \end{array}$$

We verwijzen opnieuw naar de cursus *Differentiaalmeetkunde II* voor concrete bewijzen voor deze relaties of voor de formule $\text{ad}_v(w) = [v, w]$. Daar wordt bijvoorbeeld ook bewezen dat het centrum van een samenhangende Liegroep G juist gelijk is aan de kern van de toevoegde representatie.

Definitie 1.14 (Killingvorm). De *Killingvorm* van \mathfrak{g} is de symmetrische bilineaire vorm

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \text{tr}(\text{ad}_v \circ \text{ad}_w).$$

Definitie 1.15 ((semi)simpel). We noemen een Lie-algebra \mathfrak{g} *simpel* als deze niet-abels is en geen niet-triviale idealen heeft (anders dan $\{0\}$ en \mathfrak{g} zelf), en *semisimpel* als deze een directe som is van simpele algebra's. We noemen een samenhangende Liegroep *(semi)simpel* als zijn Lie-algebra dat is.

Merk op dat een directe som $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ van twee Lie-algebra's inderdaad opnieuw een natuurlijke Lie-algebrastructuur draagt, via het Liehaakje gedefinieerd door

$$[(v, v'), (w, w')] = ([v, w], [v', w']).$$

Doorheen de literatuur zijn er heel wat karakterisaties of alternatieve definities voorhanden.

Lemma 1.16. (1) Een Lie-algebra is semisimpel als en slechts als de Killingvorm niet-ontaard is (dit is het *criterium van Cartan*) als en slechts als die geen niet-triviale abelse idealen heeft.

- (2) Een Liegroep is simpel als en slechts als die samenhangend is, niet-abels, en geen niet-triviale samenhangende gesloten normaaldelers heeft.

- (3) Een Liegroep is semisimpel als en slechts als die samenhangend is, niet-abels, en geen niet-triviale samenhangende *abelse* gesloten normaaldelers heeft.

Zonder bewijs. Zie bijvoorbeeld [Kna02]. ▮

De Killingvorm speelt in de Lietheorie een centrale rol; we onderstrepen het belang ervan door aan te tonen dat deze vorm bewaard blijft onder automorfismen, wat volgt uit een kleine berekening.

Lemma 1.17. De Killingvorm van \mathfrak{g} is invariant onder automorfismen.

Bewijs. Als σ een automorfisme van \mathfrak{g} is, dan geldt voor alle $v, w \in \mathfrak{g}$ dat

$$\text{ad}_{\sigma(v)}(w) = [\sigma(v), w] = [\sigma(v), \sigma\sigma^{-1}(w)] = \sigma([v, \sigma^{-1}(w)]) = \sigma \text{ad}_v(\sigma^{-1}(w)).$$

Hieruit volgt dat inderdaad

$$B(\sigma(v), \sigma(w)) = \text{tr}((\sigma \circ \text{ad}_v \circ \sigma^{-1}) \circ (\sigma \circ \text{ad}_w \circ \sigma^{-1})) = \text{tr}(\text{ad}_v \circ \text{ad}_w) = B(v, w). \quad \blacksquare$$

Indien \mathfrak{g} de Lie-algebra van een Liegroep G is, geldt in het bijzonder dat $B(\text{Ad}_g(v), \text{Ad}_g(w)) = B(v, w)$ voor alle $g \in G$.

We besluiten met een laatste resultaat over de Killingvorm, dat later van belang zal zijn in de Cartan-decompositie van een symmetrisch paar.

Stelling 1.18. De Killingvorm op de Lie-algebra \mathfrak{g} van een compacte en semisimpele Liegroep G is steeds (strikt) negatief-definiet.

Bewijs. Aangezien G compact is, kunnen we een $\text{Ad}(G)$ -invariant inproduct bekomen door een willekeurig inproduct op \mathfrak{g} uit te middelen over G :

$$\langle u, v \rangle = \int_G \langle \text{Ad}_g(u), \text{Ad}_g(v) \rangle d\mu(g),$$

met $d\mu(g)$ de Haarmaat op G . Voor alle $h \in G$ is inderdaad

$$\langle \text{Ad}_h(u), \text{Ad}_h(v) \rangle = \int_G \langle \text{Ad}_{gh}(u), \text{Ad}_{gh}(v) \rangle d\mu(g) = \langle u, v \rangle.$$

In het bijzonder geldt voor alle $t \in \mathbb{R}$ dat

$$\langle \text{Ad}_{\exp(tw)}(u), \text{Ad}_{\exp(tw)}(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Nemen we van deze identiteit de afgeleide in $t = 0$, dan komt er

$$\langle \text{ad}_w(u), v \rangle + \langle u, \text{ad}_w(v) \rangle = 0,$$

zodat met andere woorden iedere ad_w scheefsymmetrisch is voor een $\text{Ad}(G)$ -invariant inproduct. Kies nu een orthonormale basis voor \mathfrak{g} en stel ad_w voor als een matrix $(a_{ij})_{ij}$ ten opzichte van deze basis, zodat $a_{ji} = -a_{ij}$ voor alle i, j . Dan is

$$B(w, w) = \text{tr}(\text{ad}_w \circ \text{ad}_w) = \sum_{i,j} a_{ij}a_{ji} = -\sum_{i,j} a_{ij}^2 \leq 0.$$

Bovendien is G semisimpel en de Killingvorm aldus niet-ontaard wegens het criterium van Cartan, zodat bovenstaande som enkel gelijk is aan nul als $w = 0$, en anders strikt negatief. ▮

Men kan ook het omgekeerde bewijzen: als de Killingvorm van een semisimpele Liegroep negatief-definitief is, dan is deze compact. Voor dit bewijs is wat geavanceerdere Riemannmeetkunde nodig, zoals de Riccikromming en de stelling van Myers.

1.2 Matrixgroepen

Liegroupentheorie in volle algemeenheid durft wel eens technisch uitdraaien. Voor matrixgroepen echter valt alles vrij concreet te beschrijven; zoals aangetoond in de cursus *Differentiaalmeetkunde II* wordt de rol van de exponentiële afbeelding $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ voor een matrixgroep $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ vervuld door de concrete afbeelding

$$\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : X \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k = I_n + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{6} X^3 + \dots$$

Het is niet moeilijk om aan te tonen dat dit voorschrift voor elke matrix X entrygewijs convergeert, door een submultiplicatieve norm van de termen in de som te beschouwen.

De Lie-algebra \mathfrak{g} van een lineaire Liegroep G kunnen we nu zelf dus ook opvatten als een ruimte van zekere matrices (in plaats van abstracte raakvectoren): \mathfrak{g} bevat precies de matrices X waarvoor $\exp(tX)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ terecht komt in G . Met deze interpretatie blijkt het Liehaakje op \mathfrak{g} gegeven door het eenvoudige voorschrift $[X, Y] = XY - YX$. Men kan dan nagaan dat \mathfrak{g} voor elke lineaire Liegroep G wel degelijk een deelvectorruimte van $\mathbb{R}^{n \times n}$ vormt, die gesloten is onder dit Liehaakje. Daarnaast is de raakafbeelding Tf van een lineaire afbeelding f op G precies diezelfde afbeelding maar dan beschouwd op \mathfrak{g} .

We lijsten eerst enkele eigenschappen van de exponentiële afbeelding op.

Lemma 1.19. Voor elke matrix X en elke inverteerbare matrix Y geldt de identiteit

$$\exp(Y^{-1}XY) = Y^{-1} \exp(X)Y.$$

Bewijs. Dit volgt uit een voor de hand liggende berekening.

$$\exp(Y^{-1}XY) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Y^{-1}XY)^k = Y^{-1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right) Y = Y^{-1} \exp(X)Y. \quad \blacksquare$$

Lemma 1.20. Alle matrices $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ voldoen aan de identiteit

$$\det(\exp X) = \exp(\mathrm{tr} X).$$

Bewijs. We steunen op het feit dat elke matrix X een Jordannormaalvorm J heeft ten opzichte van een geschikte basis. Zij Y de basisovergangsmatrix, zodat $X = Y^{-1}JY$. Dan is

$$\begin{aligned} \det(\exp X) &= \det(Y^{-1} \exp(J)Y) = \det(\exp J) = \prod_{i=1}^n \exp J_{ii} \\ &= \exp \sum_{i=1}^n J_{ii} = \exp(\mathrm{tr} J) = \exp(\mathrm{tr}(YXY^{-1})) = \exp(\mathrm{tr} X). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Bemerk dat de exponentiële afbeelding (net als de klassieke exponentiële functie) verre van surjectief is: het beeld van een willekeurige matrix heeft immers steeds een strikt positieve determinant.

Voorbeeld 1.21. We leiden van enkele belangrijke Liegroepen de Lie-algebra af in matrixtermen.

(1) Beschouw $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Diens Lie-algebra is (steunend op lemma 1.20)

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \exp(tX) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})\} = \mathbb{R}^{n \times n},$$

dus de volledige ruimte van $n \times n$ -matrices.

(2) Beschouw de speciale lineaire groep $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Diens Lie-algebra is

$$\begin{aligned}\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \det(\exp(tX)) = 1\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \exp(t \operatorname{tr}(X)) = 1\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \operatorname{tr}(X) = 0\},\end{aligned}$$

dit is de ruimte van $n \times n$ -matrices met spoor nul.

(3) Beschouw de orthogonale groep $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. Diens Lie-algebra is

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \exp(tX)^\top \exp(tX) = I\}.$$

Uit de definitie van \exp volgt dat $\exp(tX)^\top = \exp(tX^\top)$. Leiden we deze vereiste identiteit af naar t , dan vinden we de voorwaarde

$$X^\top \exp(tX^\top) \exp(tX) + \exp(tX^\top) X \exp(tX) = 0,$$

wat zich voor $t = 0$ herleidt tot $X^\top + X = 0$. Met andere woorden,

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^\top = -X\},$$

de ruimte van scheefsymmetrische matrices.

(4) Beschouw de speciale orthogonale groep $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$. Diens Lie-algebra is

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X^\top = -X, \operatorname{tr} X = 0\},$$

als doorsnede van $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$ en $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Echter, de voorwaarde dat $\operatorname{tr} X = 0$ is automatisch vervuld voor scheefsymmetrische matrices, zodat $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$! Dit hoeft eigenlijk niet te verrassen, aangezien $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ precies de samenhangscomponent van de eenheidsmatrix in $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ is, en hun Lie-algebra's (als raakruimte aan de eenheid) dus samenvallen.

1.3 Haarmaten

In de reële analyse en de maattheorie is de Lebesguemaat op \mathbb{R}^n welbekend. Deze maat kan worden veralgemeend naar lokaal compacte, Hausdorfftopologische groepen (zoals Liegroepen). Doorheen deze sectie zullen we deze maat beschrijven in onderstelling dat G zo'n topologische groep is.

Ter herinnering: een σ -algebra op X is een collectie deelverzamelingen van X die de ledige verzameling bevat en gesloten is onder complementen, aftelbare unies, en aftelbare doorsnedes.

Definitie 1.22 (Borel-algebra). De σ -algebra voortgebracht door open deelverzamelingen van G noemen we de *Borel-algebra* van G . Elementen van de Borel-algebra heten *Borelverzamelingen*.

Het is niet moeilijk in te zien dat het al dan niet Borelverzameling-zijn invariant is onder translatie; $S \subseteq G$ is Borel als en slechts als $L_g(S) = gS$ en $R_g(S) = Sg$ Borel zijn voor alle $g \in G$.

Stelling 1.23 (Haar). Op een positieve veelvoud na, bestaat er een *unieke* σ -additieve niet-triviale maat μ op de Borel-algebra van G met de volgende eigenschappen:

- μ is links-invariant op Borelverzamelingen S , d.w.z. voor alle $g \in G$ is $\mu(S) = \mu(gS)$;
- μ is eindig op compacte deelverzamelingen $K \subseteq G$, d.w.z. $\mu(K) < \infty$;

- μ is uitwendig regulier op Borelverzamelingen S , d.w.z.

$$\mu(S) = \inf\{\mu(U) \mid S \subseteq U, U \text{ open}\};$$

- μ is inwendig regulier op open verzamelingen S , d.w.z.

$$\mu(S) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq S, K \text{ compact}\}.$$

Zonder bewijs. Zie [Kna02]. ▀

Definitie 1.24 (Haarmaat). Deze maat μ uit stelling 1.23 noemen we de (*linkse*) *Haarmaat* van G . Uiteraard bestaat er analoog een unieke rechts-invariante Haarmaat, op een positieve constante na. Deze valt niet noodzakelijk samen met de linkse maat; als dat wel zo is, noemen we G *unimodulair*.

Voor de topologische groep $(\mathbb{R}^n, +)$ valt de Haarmaat samen met de restrictie van de Lebesguemaat tot de Borelverzamelingen, mits herschaling opdat $\mu([0, 1]^n) = 1$, en \mathbb{R}^n is dan ook unimodulair.

Stelling 1.25. De volledige groep G heeft een eindige Haarmaat als en slechts als G compact is.

Bewijs. De ene richting volgt meteen uit de definiërende eigenschap van μ . Veronderstel omgekeerd dat $\mu(G)$ eindig is. Omdat de maat inwendig regulier is, kunnen we een compacte $K \subseteq G$ vinden met $\mu(K) > \mu(G)/2$. Voor elke $g \in G$ geldt dan dat

$$\mu(gK) + \mu(K) = 2\mu(K) > \mu(G),$$

zodat gK en K niet disjunct kunnen zijn. Dit betekent dat $g \in K \cdot K^{-1}$. Maar g was willekeurig, dus is $G = K \cdot K^{-1}$ en deze verzameling is compact omdat de groepsbewerkingen continu zijn. ■

Definitie 1.26 (modulaire functie). Als μ een linkse Haarmaat is voor G , stelt $\tilde{\mu}_g(S) = \mu(Sg^{-1})$ opnieuw een links-invariante maat voor, voor alle $g \in G$. Wegens de uniciteit van de Haarmaat is deze een veelvoud van de originele maat:

$$\tilde{\mu}_g(S) = \mu(Sg^{-1}) = \Delta(g) \cdot \mu(S).$$

Dit legt een functie Δ vast, die we de *modulaire functie* van G noemen.

$$\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}^+ : g \mapsto \Delta(g).$$

Merk op: G is unimodulair als en slechts als $\Delta \equiv 1$. Ook is Δ een morfisme van G naar (\mathbb{R}^+, \times) ; voor elke $g, h \in G$ en elke Borelverzameling S geldt immers dat

$$\Delta(g)\Delta(h) \cdot \mu(S) = \Delta(g) \cdot \mu(Sh^{-1}) = \mu(Sh^{-1}g^{-1}) = \mu(S(gh)^{-1}) = \Delta(gh) \cdot \mu(S).$$

Men kan aantonen dat Δ daarenboven C^∞ is, dus een Liegroeps morfisme ([Kna02]).

Voorbeeld 1.27. Enkele voorbeelden van Haarmaten:

- (1) Voor $(\mathbb{R}, +)$ is de Haarmaat niets anders dan de Lebesguemaat, beperkt tot Borelverzamelingen en herschaald tot $[0, 1]$ eenheidsmaat heeft.
- (2) Voor (\mathbb{R}^+, \times) wordt de Haarmaat gegeven door $d\mu(g) = dg/g$, zodat

$$\mu(S) = \int_S \frac{dt}{t}.$$

Voor een interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^+$ bijvoorbeeld is $\mu([a, b]) = \log(b/a)$, en inderdaad,

$$\mu(g \cdot [a, b]) = \mu([ga, gb]) = \log(gb/ga) = \log(b/a) = \mu([a, b]).$$

(\mathbb{R}^+, \times) is duidelijk unimodulair.

(3) Voor $GL(n, \mathbb{R})^+$ blijkt de Haarmaat $d\mu(g) = dg/(\det g)^n$. Ook deze groep is unimodulair.

Verscheidene klassen Liegroepen zijn automatisch unimodulair; we bespreken een kleine selectie.

Stelling 1.28. De volgende groepen zijn steeds unimodulair:

- (1) discrete groepen (i.h.b. eindige groepen);
- (2) abelse groepen;
- (3) compacte groepen;
- (4) perfecte groepen.

Bewijs. Beschouw zo'n groep G , een element $g \in G$ en een Borelverzameling $S \subseteq G$.

- (1) De Haarmaat van een discrete groep is niets meer dan de telmaat, die aan elke verzameling eenvoudigweg zijn kardinaliteit toekent. Unimodulariteit volgt omdat $|S| = |gS| = |Sg|$.
- (2) Dit spreekt voor zich, aangezien $gS = Sg$.
- (3) Aangezien Δ continu is, is $\Delta(G)$ een compacte deelgroep van \mathbb{R}^+ , en de enige optie is $\{1\}$.
- (4) Δ is een morfisme naar een abelse groep, dus $G = G' \leq \ker \Delta$, oftewel $\Delta \equiv 1$. ■

Voor een semisimpele Lie-algebra \mathfrak{g} geldt dat $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, zodat via de Liecorrespondentie ook iedere semisimpele Liegroep perfect is en dus unimodulair.

Opmerkelijk genoeg kan de modulaire functie voor Liegroepen elegant worden uitgedrukt via diens geadjungeerde representatie:

Stelling 1.29. Voor een Liegroep wordt de modulaire functie gegeven door $\Delta(g) = |\det \text{Ad}_g|$.

Zonder bewijs. Zie [Kna02]. ■

1.4 Roosters

Een voorbeeld dat we spontaan met het begrip “rooster” associëren, is \mathbb{Z}^2 in het Euclidische vlak \mathbb{R}^2 . Twee kenmerken van dit voorbeeld motiveren de algemene definitie die we verderop zullen geven: \mathbb{Z}^2 is een *discrete* deelgroep, en heeft een eenvoudig *fundamenteaalgebied met eindig volume* (zoals het vierkant $[0, 1[\times [0, 1[$ exclusief rechter- en bovenzijde). Het discreet-zijn kunnen we eenvoudig veralgemenen. Het tweede kenmerk vergt meer werk en steunt op de Haarmaat; we beperken ons dan ook opnieuw tot lokaal compacte, Hausdorfftopologische groepen G , of concreet, Liegroepen.

Definitie 1.30 (discrete groep). Een deelgroep $\Gamma \leq G$ heet *discreet* indien er een open bedekking van Γ bestaat waarvan elke deelverzameling juist één element van Γ bevat.

De topologie geïnduceerd vanuit G op een discrete deelgroep Γ is dus precies de discrete topologie. Voorbeelden van discrete deelgroepen zijn $\mathbb{Z}^n \leq \mathbb{R}^n$, $SL(n, \mathbb{Z}) \leq SL(n, \mathbb{R})$, of de triviale deelgroep in eender welke topologische groep.

De precieze definitie van een fundamenteaalgebied varieert nogal doorheen de literatuur. Wij stellen volgende definities voorop, steunend op de terminologie in [Mor15], maar met meer aandacht voor het al dan niet Borel-zijn.

Definitie 1.31 (fundamentealgebieden). Beschouw in G een discrete deelgroep $\Gamma \leq G$ en een deelverzameling $\mathcal{F} \subseteq G$. Deze induceren een natuurlijke afbeelding

$$\pi : \mathcal{F} \rightarrow \Gamma \backslash G : g \mapsto \Gamma g.$$

- \mathcal{F} heet een *ruwe fundamentealverzameling* voor Γ indien π een surjectie is (zodat $\Gamma \mathcal{F} = G$) en de verzameling $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}$ eindig is.
- \mathcal{F} heet een (*strikte*) *fundamentealverzameling* voor Γ indien π een bijectie is.

Als \mathcal{F} daarenboven een Borelverzameling is, noemen we \mathcal{F} een (ruw of strikt) *fundamenteaalgebied*.

Het bestaan van fundamentealverzamelings is makkelijk te motiveren met het keuzeaxioma, door uit elke nevenklasse in $\Gamma \backslash G$ één enkel element te kiezen. Er is echter hoegenaamd geen garantie dat deze representanten ook een Borelverzameling vormen, en het bestaan van fundamentealgebieden ligt dan ook minder voor de hand.

Lemma 1.32. Mits G voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma⁽¹⁾, heeft elke discrete deelgroep $\Gamma \leq G$ een (strikt) fundamenteaalgebied.

Bewijs. Omdat Γ discreet is, bestaat er een open deelverzameling $U \subseteq G$ zodat $UU^{-1} \cap \Gamma = \{e\}$. Dan zijn verschillende Γ -translaties van U steeds disjunct: mochten $\gamma_1 U$ en $\gamma_2 U$ niet-ledig snijden, dan is $\gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2$ voor zekere $u_1, u_2 \in U$, zodat $u_1 u_2^{-1} = \gamma_1^{-1} \gamma_2 \in UU^{-1} \cap \Gamma$ en dus $\gamma_1 = \gamma_2$.

Via het tweede aftelbaarheidsaxioma vinden we vervolgens een rij $\{g_n\}$ van elementen in G met

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U g_n = G.$$

Definieer hiermee de Borelverzameling

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(U g_n \setminus \bigcup_{i < n} \Gamma U g_i \right).$$

We tonen aan dat $U g_n \subseteq \Gamma \mathcal{F}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ via inductie op n .

- Voor $n = 0$ is $U g_0$ meteen bevat in \mathcal{F} en dus zeker in $\Gamma \mathcal{F}$.
- Beschouw voor $n > 0$ een willekeurig element $g \in U g_n$. Dan is $g \in \mathcal{F}$ behalve als $g \in \Gamma U g_i$ voor zekere $i < n$, maar in dat geval leert de inductiehypothese dat $g \in \Gamma(\Gamma \mathcal{F}) = \Gamma \mathcal{F}$.

Omdat de verzamelingen $U g_n$ de groep G geheel bedekken, concluderen we dat $\Gamma \mathcal{F} = G$. Dat elk element ook een *unieke* schrijfwijze heeft, volgt uit nog een kleine maar technische controle.

Onderstel dat $\gamma_1 f_1 = \gamma_2 f_2$ voor zekere $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ en $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Er bestaan unieke indices n_1, n_2 zodat $f_1 \in U g_{n_1}$ maar $f_1 \notin \Gamma U g_i$ voor alle $i < n_1$ enerzijds en $f_2 \in U g_{n_2}$ maar $f_2 \notin \Gamma U g_i$ voor alle $i < n_2$ anderzijds. Echter, omdat $f_1 \in \Gamma f_2$ en vice versa, zijn deze voorwaarden enkel compatibel als $n_1 = n_2$; noem deze index kortweg n . Nu weten we dat $f_1 g_n^{-1} = \gamma_1^{-1} \gamma_2 f_2 g_n^{-1} \in U \cap \gamma_1^{-1} \gamma_2 U$. Omdat Γ -translaties van U disjunct zijn, moet $\gamma_1^{-1} \gamma_2 = e$, zodat $\gamma_1 = \gamma_2$ en dan ook $f_1 = f_2$. ■

Het bestaan van een fundamenteaalgebied induceert een maat op de quotiëntruimte $\Gamma \backslash G$ vanuit de Haarmaat op G , en ook deze maat is in essentie uniek (op een constante na).

⁽¹⁾Dit axioma stelt voorop dat er een aftelbare basis bestaat, i.e. een collectie $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ van open deelverzamelingsen zodat elke open verzameling een unie is van zekere elementen uit \mathcal{U} . Men kan aantonen dat Liegroepen met aftelbaar veel samenhangscomponenten voldoen aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.

Lemma 1.33. Beschouw een discrete deelgroep Γ in een lokaal compacte groep G . Op een positief veelvoud na, bestaat er een *unieke* maat ν op $\Gamma \backslash G$ met dezelfde eigenschappen als de Haarmaat.

Bewijs. Beschouw een fundamenteaalgebied \mathcal{F} voor $\Gamma \backslash G$. Borelverzamelingen in de quotiëntruimte zijn per definitie projecties van Borelverzamelingen in G , en we definiëren er de maat ν op via

$$\nu(S) = \mu(\mathcal{F} \cap \pi^{-1}(S)).$$

Deze maat is onafhankelijk van de keuze van \mathcal{F} en aldus goedgedefinieerd. Beschouw immers een alternatief fundamenteaalgebied \mathcal{F}' . Het volstaat om aan te tonen dat $\mu(\mathcal{F} \cap A) = \mu(\mathcal{F}' \cap A)$ voor elke Γ -invariante $A \subseteq G$, want de vezels van π zijn Γ -invariant, en inderdaad:

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{F} \cap A) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma \mathcal{F}' \cap \mathcal{F} \cap A) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\mathcal{F}' \cap \gamma^{-1} \mathcal{F} \cap \gamma^{-1} A) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma^{-1} \mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \cap A) = \mu(\mathcal{F}' \cap A). \end{aligned}$$

Omgekeerd legt zo'n maat ν op $\Gamma \backslash G$ ook een maat μ op G vast, via

$$\mu(S) = \int_{\Gamma \backslash G} |S \cap \Gamma g| d\nu(\Gamma g).$$

Wegens uniciteit van de maat μ impliceert deze correspondentie dan ook die van ν op $\Gamma \backslash G$. ■

We benadrukken tussendoor dat deze maat ν net als de originele Haarmaat G -invariant is: voor elk element $g \in G$ en elke Borelverzameling $S \subseteq G$ geldt dat $\nu(S) = \nu(gS)$. Daarnaast is de maat $\nu(\Gamma \backslash G)$ van de volledige quotiëntruimte per constructie gelijk aan de maat $\mu(\mathcal{F})$ van eender welk fundamenteaalgebied in G .

Voor algemene gesloten deelgroepen $H \leq G$ is bovenstaand lemma niet geldig, en blijkt het bestaan van een G -invariante maat op de quotiëntruimte G/H niet langer gegarandeerd: zo'n maat bestaat als en slechts als $\Delta_G(h) = \Delta_H(h)$ voor alle $h \in H$. In dat geval is de maat wel nog steeds uniek.

Definitie 1.34 (rooster). We noemen een discrete deelgroep $\Gamma \leq G$ een *rooster in G* als $\Gamma \backslash G$ een eindig volume heeft, i.e. als $\nu(\Gamma \backslash G)$ eindig is. Een rooster heet bovendien *cocompact* of *uniform* als $\Gamma \backslash G$ compact is.

Lemma 1.35. Volgende eigenschappen zijn equivalent voor een discrete deelgroep $\Gamma \leq G$:

- (1) Γ is een rooster in G ;
- (2) er bestaat een strikt fundamenteaalgebied \mathcal{F} voor $\Gamma \backslash G$ met $\mu(\mathcal{F})$ eindig;
- (3) er bestaat een Borelverzameling $S \subseteq G$ met $\Gamma S = G$ en $\mu(S)$ eindig.

Bewijs.

(1) \Leftrightarrow (2). Dit volgt rechtstreeks omdat $\nu(\Gamma \backslash G) = \mu(\mathcal{F})$ volgens de definitie in lemma 1.33.

(2) \Rightarrow (3). Kies $S = \mathcal{F}$.

- (3) \Rightarrow (1). Aangezien elke $g \in G$ te schrijven is als $g = \gamma s$ voor zekere $\gamma \in \Gamma$ en $s \in S$, volgt dat $S \cap \Gamma g$ voor geen enkele g de ledige verzameling is, want die bevat minstens het element $s = \gamma^{-1}g$. We kunnen het volume van $\Gamma \backslash G$ dan afschatten via de integraal in lemma 1.33.

$$\nu(\Gamma \backslash G) = \int_{\Gamma \backslash G} 1 \, d\nu(\Gamma g) \leq \int_{\Gamma \backslash G} |S \cap \Gamma g| \, d\nu(\Gamma g) = \mu(S). \quad \blacksquare$$

In het bijzonder is Γ een rooster zodra we een ruw fundamentealgebied vinden met eindig volume. Op dit criterium zullen we verder steunen om aan te tonen dat $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ een rooster is in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. We moeten in deze context de beroemde stelling van Borel–Harish-Chandra aanhalen, die meteen een heleboel voorbeelden van roosters oplevert; we bewijzen deze niet in volle algemeenheid, maar stellen ons tevreden met een concrete studie van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ in hoofdstuk 5.2.5.

Onder een *reële lineaire algebraïsche groep gedefinieerd over \mathbb{Q}* wordt een deelgroep $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ verstaan waarvoor de elementen van G precies de oplossingen zijn van een eindig aantal veelterm-vergelijkingen in de matrixentries waarvan alle coëfficiënten in \mathbb{Q} liggen. Men schrijft dan $G(\mathbb{Z}) = G \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$.

Stelling 1.36 (Borel–Harish-Chandra). Voor elke reële lineaire algebraïsche groep G gedefinieerd over \mathbb{Q} geldt dat $G(\mathbb{Z})$ een rooster is in G .

Zonder bewijs. Zie [BHC61] voor het algemene bewijs. Onze concrete aanpak in hoofdstuk 5 zal de meeste relevante concepten (zoals de Iwasawadecompositie of Siegelverzamelingen) aandoen, die onder geschikte veralgemeningen leiden tot het resultaat van Borel–Harish-Chandra. \blacktriangleright

Een diepere studie van dit soort deelgroepen leidt tot de notie van *aritmatische deelgroepen*.

We vermelden nog dat het zinloos is om te zoeken naar roosters in niet-unimodulaire groepen.

Stelling 1.37. Als een lokaal compacte groep G een rooster Γ bevat, dan is G unimodulair.

Bewijs. Het valt eenvoudig in te zien dat als \mathcal{F} een fundamentealgebied is voor $\Gamma \backslash G$, dan ook $\mathcal{F}g^{-1}$ voor elke $g \in G$. Maar dan moet $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{F}g^{-1}) = \Delta(g) \cdot \mu(\mathcal{F})$, wat een eindig getal is; zodus zien we inderdaad dat $\Delta(g) = 1$ voor alle $g \in G$. \blacksquare

2

Inleiding tot symmetrische ruimten

Liegroepen hebben per definitie reeds een differentieerbare structuur, maar we kunnen deze verder uitbreiden tot een Riemannstructuur (die compatibel is met de groepsbewerkingen). We bestuderen deze structuren eerst in een zuiver meetkundige context, leiden het concept van een symmetrische ruimte in, en leggen dan de link met Liegroepen.

2.1 Riemannmeetkunde

Voor de algemene theorie van differentieerbare variëteiten verwijzen we naar de cursus *Differentiaalmeetkunde II*. Ook [Hel78] en [AB09] zijn het vermelden waard.

Definitie 2.1 (Riemannvariëteit). Een *Riemannmetriek* op een differentieerbare variëteit M is een familie positief-definiëte inproducten (één voor elk punt $p \in M$) op elke raakruimte,

$$\langle \bullet, \bullet \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

die op gladde wijze varieert langsheen M ; concreet moet voor ieder paar vectorvelden X, Y op M , de functie $p \mapsto \langle X(p), Y(p) \rangle_p$ van de klasse \mathcal{C}^∞ zijn. Een differentieerbare variëteit uitgerust met zo'n Riemannmetriek noemen we een *Riemannvariëteit*.

Definitie 2.2 (Riemannnorm). In elk punt $p \in M$ induceert het inproduct de normafbeelding

$$\|\bullet\|_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^+ : v \mapsto \|v\|_p = \sqrt{\langle v, v \rangle_p}.$$

In de notaties voor zowel de Riemannmetriek als de -norm laat men het subscript p geregeld vallen en moet de context duidelijk maken welke raakvlak bedoeld worden. Wij geven echter de voorkeur aan duidelijkheid boven beknoptheid, en zullen trachten om dit te vermijden.

Definitie 2.3 (isometrie). Zij $\phi : M \rightarrow M'$ een diffeomorfisme tussen twee Riemannvariëteiten. We noemen ϕ een *isometrie* als geldt dat

$$\langle u, v \rangle_p = \langle T\phi(u), T\phi(v) \rangle'_{\phi(p)}$$

voor alle $u, v \in T_p M$, of met andere woorden, als volgend diagram commuteert.

$$\begin{array}{ccc} T_p M \times T_p M & \xrightarrow{\langle \bullet, \bullet \rangle_p} & \mathbb{R} \\ \downarrow T\phi \times T\phi & & \parallel \\ T_{\phi(p)} M' \times T_{\phi(p)} M' & \xrightarrow{\langle \bullet, \bullet \rangle'_{\phi(p)}} & \mathbb{R} \end{array}$$

Definitie 2.4 (isometriegroep). Zoals gewoonlijk vormen de isometrieën van M (naar zichzelf) een groep onder de samenstelling, die we als $I(M)$ noteren. Indien deze groep transitief werkt op de puntenverzameling, noemen we M een *homogene variëteit*.

Riemannmetrieken laten toe om een verscheidenheid aan meetkundige concepten zoals afstanden, hoeken, oppervlaktes, krommingen op de variëteit etc. te definiëren. Afstanden voeren we in via lengtes van krommen, als volgt.

Definitie 2.5 (krommen). Een *kromme* in een Riemannvariëteit M is een C^∞ -afbeelding γ van een interval $I \subseteq \mathbb{R}$ naar M , en heeft *lengte*

$$\ell(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt.$$

Een kromme heet *rectificeerbaar* als die een eindige lengte heeft.

Het feit dat we lengtes van krommen kunnen definiëren, laat ons toe om een Riemannvariëteit ook als een metrische ruimte te interpreteren, via een voor de hand liggend afstandsbegrip.

Definitie 2.6 (afstand). De *afstand* tussen twee punten $x, y \in M$ wordt gegeven door

$$d(x, y) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ een kromme met } \gamma(0) = x \text{ en } \gamma(1) = y\}.$$

Het is zeer eenvoudig na te gaan dat dit een afstandsfunctie $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ vastlegt, die voldoet aan de vereiste axioma's zoals de driehoeksongelijkheid.

Er zijn vele manieren voorhanden om een oppervlaktebegrip te leggen op meetkundige structuren. In een algemene metrische ruimte bestaan bijvoorbeeld de Hausdorffmaat en de Minkowski-inhoud; in [BH99] introduceren de auteurs een robuust oppervlakteconcept in functie van een parameter ϵ , via het minimale aantal metrische ballen met straal hoogstens ϵ die een gebied volledig bedekken; en voor differentiaalmeetkundige oppervlakken ingebed in \mathbb{R}^n is er het klassieke oppervlaktebegrip uit de multivariabele calculus. Beschouw voor laatstnoemde een tweedimensionaal gebied $D \in \mathbb{R}^n$ geparametriseerd via een gladde functie $f(x, y)$, dan is

$$\text{area}(D) = \int_D \|f_x \times f_y\| dx dy = \int_D \sqrt{\|f_x\|^2 \|f_y\|^2 - (f_x \cdot f_y)^2} dx dy,$$

waar f_x en f_y staan voor de partiële afgeleiden naar x en y , en het kruisproduct wordt uitgewerkt via de identiteit van Lagrange. Deze formule valt te veralgemenen naar Riemannvariëteiten.

Definitie 2.7 (oppervlakte). Onderstel dat $U \subseteq M$ een (lokaal) gebied in een Riemannvariëteit M is, geparametriseerd binnen een lokale kaart via een diffeomorfisme $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$. Dan is de oppervlakte van U

$$\text{area}(U) = \int_D \sqrt{\|f_x\|^2 \|f_y\|^2 - \langle f_x, f_y \rangle^2} dx dy,$$

de metrieken en normen geëvalueerd in het punt $f(x, y)$. De oppervlakte van een algemeen gebied in M wordt dan gevonden door deze op te delen in gebieden binnen lokale kaarten en op te tellen.

Oppervlaktes zijn voor ons van belang in de definitie van meetkundige Dehnfuncties, die verbanden leggen tussen lengtes van lussen en oppervlaktes van opvullingen ervan. Voor voldoende reguliere krommen komen alle zinvolle oppervlaktenoties op hetzelfde neer; zeker het asymptotisch gedrag van de Dehnfunctie hangt niet af van het precieze gebruikte oppervlakteconcept.

Vervolgens richten we onze aandacht tot *geodeten*, die de rol van “rechte lijnen” voor een Riemannvariëteit vervullen. Men definieert deze in de differentiaalmeetkunde meestal via een zogenaamde *affiene connectie* op de variëteit, waarna affiene geodeten per definitie autoparallele krommen zijn. Op een Riemannvariëteit ligt steeds een eenduidig bepaalde connectie ∇ met enkele handige eigenschappen (∇ is torsieloos en de metriek is parallel onder ∇), de *Levi-Civitaconnectie* genoemd. Men kan aantonen dat de geodeten onder deze connectie precies de krommen zijn die lokaal de afstand tussen hun punten minimaliseren. Het is vooral deze laatste eigenschap die voor ons van belang is; vandaar volgende definitie.

Definitie 2.8 (geodeet). Beschouw een kromme γ in een metrische ruimte M en herparametriseer die tot een kromme $\tilde{\gamma}$ met booglengte als parameter. We noemen γ een *geodeet* als elke parameter t in een omgeving $J_t \subseteq \mathbb{R}$ ligt zodat voor alle $t_1, t_2 \in J_t$ geldt dat

$$d(\tilde{\gamma}(t_1), \tilde{\gamma}(t_2)) = |t_2 - t_1|.$$

Deze alternatieve definitie houdt voor Riemannvariëteiten hetzelfde in als de klassieke definitie, ten opzichte waarvan bovenstaande eigenschap een stelling was, maar geldt in algemenere metrische ruimten. We willen benadrukken dat deze afstandsminimaliserende eigenschap slechts lokaal geldt, en dat een geodeet tussen twee vaste punten hoegenaamd niet uniek hoeft te zijn (als die al bestaat).

We veronderstellen vanaf hier opnieuw dat M een Riemannvariëteit is.

Lemma 2.9. Voor elk punt $p \in M$ en elke raakvector $v \in T_p M$ aan p bestaat een constante $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ en een *unieke* geodeet $\gamma_v :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ waarvoor $\gamma(0) = p$ en $\gamma'(0) = v$.

Zonder bewijs. Onder de interpretatie via connecties en uitgedrukt in lokale coördinaten staat hier een differentiaalvergelijking met twee beginvoorwaarden, die lokaal uniek oplosbaar is wegens de stelling van Picard–Lindelöf. \square

Deze geodeten γ_v keren terug in volgende belangrijke definitie.

Definitie 2.10 (exponentiële afbeelding). De *exponentiële afbeelding* is de lokale afbeelding

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M : v \mapsto \gamma_v(1).$$

Merk op dat deze afbeelding over het algemeen slechts goedgedefinieerd is in een open omgeving rond de oorsprong in $T_p M$. De stelling van de inverse functies leert dat \exp_p een diffeomorfisme is van zekere (nog kleinere) open omgeving van de oorsprong naar zijn beeld in M . Volgend begrip is een maat voor hoe groot die laatste omgeving dan nog is.

Definitie 2.11 (injectiviteitsradius). Voor alle $p \in M$ noemen we het supremum van de stralen r zodat \exp_p een diffeomorfisme is van $B(0, r) \subseteq T_p M$ naar zijn beeld, de *injectiviteitsradius* van p .

In de volgende paragrafen herhalen we enkele noties gerelateerd aan kromming. Het centrale object is de krommingstensor van Riemann, die opnieuw via de Levi-Civitaconnectie wordt gedefinieerd.

Definitie 2.12 (kromming). De *Riemannkrommingstensor* op M wordt bepaald door

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

voor alle vectorvelden X, Y, Z , met ∇ de Levi-Civitaconnectie. Hieruit definieert men vervolgens de *sectionaalkromming* in een punt p voor twee lineair onafhankelijke raakvectoren $u, v \in T_p M$, als het getal

$$\sigma_p(u, v) = \frac{\langle R(u, v)v, u \rangle_p}{\langle u, u \rangle_p \langle v, v \rangle_p - \langle u, v \rangle_p^2}.$$

Deze kromming hangt in feite enkel af van het vlak dat u en v opspannen in $T_p M$, maar kan over het algemeen wel variëren als er andere vlakken beschouwd worden.

Als u en v orthonormale vectoren zijn, dan herleidt de formule zich tot $\sigma_p(u, v) = \langle R(u, v)v, u \rangle_p$.

Men kan aantonen dat de Riemannkrommingstensor volledig bepaald wordt door alle sectionaalkrommingen. Ook volgend resultaat is folklore:

Lemma 2.13 (Schur). Onderstel dat M een Riemannvariëteit is met dimensie $\dim(M) \geq 3$ en dat de sectionaalkromming $\sigma_p(\bullet, \bullet)$ in elk punt constant is (onafhankelijk van het beschouwde vlak in de raakruimte $T_p M$). Dan is de sectionaalkromming in elk punt van de variëteit constant.

Zonder bewijs. Dit wordt bewezen in de cursus *Differentiaalmeetkunde II*. ▀

De volgende definities komen wat uit de lucht vallen, maar Young maakt in zijn artikel [You13] veel meetkundige intuïtieve schetsen gebaseerd op deze constructies. We geven hier eerst de definities en schetsen daarna hoe deze in de argumenten van Young naar boven komen.

Definitie 2.14 (Busemannfunctie). Zij $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow M$ een geodetische straal geparаметriseerd volgens booglengte, die de afstand tussen zijn punten globaal minimaliseert. De Busemannfunctie bepaald door γ is de functie

$$b_\gamma : M \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} (t - d(p, \gamma(t))).$$

Merk op dat zo'n geodetische stralen niet noodzakelijk hoeven te bestaan (dit loopt bijvoorbeeld mis voor de sfeer \mathbb{S}^2), maar indien ze bestaan, zijn de bijhorende Busemannfuncties goedgedefinieerd: enerzijds is de limiet naar boven begrensd, aangezien

$$t - d(p, \gamma(t)) = d(\gamma(0), \gamma(t)) - d(p, \gamma(t)) \leq d(p, \gamma(0))$$

en anderzijds is het argument van de limiet monotoon stijgend, aangezien

$$(t_2 - d(p, \gamma(t_2))) - (t_1 - d(p, \gamma(t_1))) \geq t_2 - t_1 - d(\gamma(t_2), \gamma(t_1)) = 0$$

voor alle $0 \leq t_1 \leq t_2$, tweemaal steunend op de driehoeksongelijkheid.

Lemma 2.15. Busemannfuncties zijn steeds 1-Lipschitzcontinu. Op variëteiten met niet-negatieve sectionaalkromming zijn ze bovendien convex.

Bewijs. De eerste claim is opnieuw niet veel meer dan de driehoeksongelijkheid:

$$|b_\gamma(p) - b_\gamma(q)| = \left| \lim_{t \rightarrow \infty} (t - d(p, \gamma(t))) - (t - d(q, \gamma(t))) \right| \leq \left| \lim_{t \rightarrow \infty} d(p, q) \right| = d(p, q).$$

Voor de tweede claim verwijzen we bijvoorbeeld naar [CG72]. ■

Definitie 2.16 (horosfeer). Een *horosfeer* is een level set van een Busemannfunctie en wordt aldus bepaald door twee variabelen: een geodetische straal γ en een punt $p \in M$ dat op de horosfeer ligt. Concreet is de horosfeer dan de verzameling

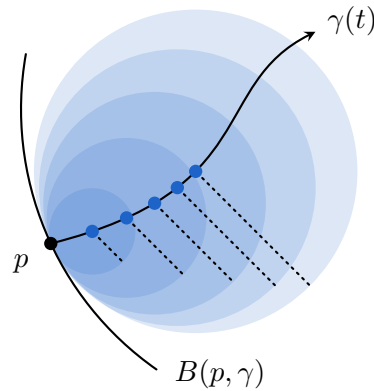
$$H(p, \gamma) = \{q \in M \mid b_\gamma(q) = b_\gamma(p)\}.$$

Een horosfeer is precies de rand van een *horobal*,

$$B(p, \gamma) = \{q \in M \mid b_\gamma(q) \geq b_\gamma(p)\}.$$

Merk op dat zo'n horobal $B(p, \gamma)$ meetkundig op te vatten is als de limiet van de metrische ballen door p waarvan het middelpunt langs γ naar oneindig gaat. Ook zijn horoballen dankzij lemma 2.15

gesloten convexe deelverzamelingen als M niet-negatieve sectionaalkromming heeft.



Het is misschien intuïtief duidelijk dat een horosfeer niet zozeer afhangt van de precieze geodeet γ , als wel van het “punt op oneindig” bepaald door γ . Men kan inderdaad een theorie van punten op oneindig—met de notatie $M(\infty)$ —voor een variëteit M opbouwen, door zo’n punten te definiëren als zekere equivalentieclassen van geodetische stralen. Vervolgens kan men de unieke $M \cup M(\infty)$ van een topologie voorzien, die de topologie van M uitbreidt. Voor de precieze constructies en hoe dit tot compactificaties van variëteiten leidt, verwijzen we naar [Ebe97].

Een deelgroep H van de isometriegroep $I(M)$ heet in deze context een *parabolische deelgroep* als H de stabilisator is van zo’n punt $p \in M(\infty)$ op oneindig. Dit is niet toevallig dezelfde terminologie als voor $SL(n, \mathbb{R})$ in hoofdstuk 4.3 verderop: we zullen daar het verband schetsen tussen punten op oneindig en vlaggen in \mathbb{R}^n , en dus tussen meetkundige en algebraïsche parabolische deelgroepen.

Het bewijs van Young beschouwt in essentie een niet-negatief gekromde ruimte \mathcal{E} waar $SL(n, \mathbb{Z})$ eigenlijk discontinu en via isometrieën op werkt. Helaas is de actie niet cocompact en zal Gromovs *filling theorem*, stelling 3.12 verderop, niet meteen van toepassing zijn. Het centrale idee is dat we \mathcal{E} compact kunnen maken door horoballen weg te snijden, zodat $SL(n, \mathbb{Z})$ wél cocompact werkt op het overblijvende deel. De bedoeling zal zijn om opvullingen van lussen op te delen in stukken binnen het compacte gedeelte en stukken binnen horoballen, die overeenkomen met goedbegrepen algebraïsche deelgroepen van $SL(n, \mathbb{R})$.

2.2 Symmetrische ruimten, meetkundig

Definitie 2.17 (symmetrische ruimte). Een samenhangende Riemannvariëteit M heet een *symmetrische ruimte* als er voor elk punt $p \in M$ een isometrie $s_p : M \rightarrow M$ bestaat zodat $s_p(p) = p$ en $T_p s_p = -\text{id}$. Deze isometrie wordt de *geodetische reflectie* of *involutie* rond p genoemd.

Merk op dat zo’n isometrie s_p (als die bestaat) lokaal uniek is, dat s_p^2 lokaal gelijk is aan de identiteit, en dat p een geïsoleerd fixpunt van s_p is. Het volgende eenvoudig lemma verduidelijkt de oorsprong van de naam “geodetische reflectie”.

Lemma 2.18. Een geodetische reflectie s_p in een symmetrische ruimte keert geodeten door p om: elke geodeet γ met $\gamma(0) = p$ voldoet aan $s(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ voor alle t in het definitiegebied.

Bewijs. Wegens lemma 2.9 volstaat het om te verifiëren dat de beide afbeeldingen $\alpha_1 : t \mapsto s(\gamma(t))$ en $\alpha_2 : t \mapsto \gamma(-t)$ geodeten zijn met dezelfde beginvoorwaarden, en inderdaad:

$$\alpha_1(0) = p = \alpha_2(0) \quad \text{en} \quad \alpha_1'(0) = -\gamma'(0) = \alpha_2'(0). \quad \blacksquare$$

Een nuttig gevolg van dit lemma is dat we geodetische krommen willekeurig ver kunnen verlengen, zodat symmetrische ruimte dus meteen *geodetisch compleet* zijn. Beschouw namelijk een geodeet γ gedefinieerd op $[0, t[$; dan kunnen we de reflectie rond een punt $\gamma(t - \epsilon)$ (met ϵ voldoende klein) gebruiken om γ uit te breiden tot $[0, 2t - 2\epsilon[$. Volgende beroemde stelling, die we zonder bewijs vermelden, leert ons meteen een heleboel extra informatie over symmetrische ruimten.

Stelling 2.19 (Hopf–Rinow). Volgende eigenschappen zijn equivalent voor een samenhangende Riemannvariëteit M .

- (1) M is geodetisch compleet (i.e., maximale geodeten zijn gedefinieerd op geheel \mathbb{R});
- (2) voor alle punten $p \in M$ is de afbeelding \exp_p gedefinieerd op heel de raakruimte $T_p M$;
- (3) er bestaat een punt $p \in M$ waar de afbeelding \exp_p gedefinieerd is op heel $T_p M$;
- (4) M is een complete metrische ruimte (i.e., elke Cauchyrij in M is convergent);
- (5) de gesloten en begrensde deelverzamelingen van M zijn compact.

Als een van deze eigenschappen voldaan is, bestaat er bovendien tussen elk paar punten $p, q \in M$ een geodeet die p met q verbindt en de lengte minimaliseert.

Zonder bewijs. Zie bijvoorbeeld [Jos11]. ✎

Gevolg 2.20. Een symmetrische ruimte M is homogeen. Omgekeerd is een homogene ruimte waarvoor één bepaald punt een geodetische reflectie heeft, een symmetrische ruimte.

Bewijs. We willen vinden dat de isometriegroep transitief werkt op M , dus beschouw twee punten $p, q \in M$. Wegens stelling 2.19 bestaat een geodeet die p met q verbindt. De geodetische reflectie rond diens middelpunt is een isometrie die p en q omwisselt, en het resultaat volgt.

Onderstel omgekeerd dat s_p een geodetische reflectie is rond een punt p in een homogene ruimte. Dan bestaat er voor elk ander punt q een isometrie ϕ die p op q afstuurt, en kan men verifiëren dat de samenstelling $s_q = \phi \circ s_p \circ \phi^{-1}$ een geodetische reflectie rond q definieert. ■

We dienen te benadrukken dat \exp_p , ook al is die een goedgedefinieerde afbeelding op geheel $T_p M$, nog niet noodzakelijk een diffeomorfisme is op geheel $T_p M$. Het begrip “injectiviteitsstraal” blijft dus van betekenis.

2.3 Symmetrische ruimten, algebraïsch

Het blijkt dat we de meetkundige structuur van een symmetrische ruimte volledig kunnen samenvatten in algebraïsche data, zoals we in dit hoofdstuk zullen beschrijven.

In een eerste stap geven we de isometriegroep van een Riemannvariëteit een topologische structuur via de *compact-open* topologie, voortgebracht door de deelverzamelingen van de vorm

$$\{\phi \in I(M) \mid \phi(K) \subseteq U\},$$

met $K \subseteq M$ compact en $U \subseteq M$ open. Deze topologie maakt de natuurlijke actie

$$\rho : I(M) \times M \rightarrow M : (\phi, p) \mapsto \phi(p)$$

alvast continu. Een beroemd en verre van voor de hand liggend resultaat van Myers en Steenrod breidt dit uit naar een differentieerbare structuur.

Stelling 2.21 (Myers–Steenrod⁽¹⁾). De isometriegroep $I(M)$ van een samenhangende Riemannvariëteit M kan worden gestructureerd tot een Liegroep, zodat de actie ρ van de klasse C^∞ is.

Zonder bewijs. Het oorspronkelijke bewijs is terug te vinden in [MS39]; ook [Hel78] geeft gedetailleerde argumenten. \blacksquare

Wegens stelling 2.20 is de actie van $I(M)$ op M transitief. We kunnen dit resultaat wat verscherpen door op te merken dat $I(M)^\circ$, de samenhangscomponent die de identiteit bevat, al transitief werkt. Beschouw namelijk een isotropiegroep $K \leq I(M)$ van een vast punt $p \in M$. Dan is de projectie $I(M) \rightarrow I(M)/K : \phi \mapsto \phi K$ open, en $I(M)/K \rightarrow M : \phi K \mapsto \phi(p)$ zelfs een diffeomorfisme. Ook de samenstelling $\phi \mapsto \phi(p)$ is dus een open afbeelding. Beschouw de partitie van M in banen onder de actie van $I(M)^\circ$; elk van deze banen is open in M , maar aangezien M samenhangend is, kan het dan niet anders dan dat er slechts één zo'n baan is, i.e. $I(M)^\circ$ werkt transitief op M .

We noteren de samenhangende Liegroep $I(M)^\circ$ kortweg als G en de isotropiegroep van een vastgekozen punt $p \in M$ als K . Wegens transitiviteit kunnen we G/K dan identificeren met M via het diffeomorfisme $\phi K \mapsto \phi(p)$. Men kan eveneens bewijzen dat K compact is; dit wordt bijvoorbeeld opgegeven als oefening in [Mor15] en expliciet aangetoond in [Hel78].

Gebruik makend van de geodetische reflectie rond p , definiëren we vervolgens de afbeelding

$$\sigma : G \rightarrow G : \phi \mapsto s_p \circ \phi \circ s_p.$$

Het is duidelijk dat σ een involutief automorfisme van de Liegroep G is (steunend op het feit dat s_p zelf een involutie is, en elk automorfisme de identiteitscomponent bewaart). Noemen we

$$K_\sigma = \{\phi \in G \mid \sigma(\phi) = \phi\},$$

dan kunnen we nagaan dat $K_\sigma^\circ \leq K \leq K_\sigma$, zodat K en K_σ dezelfde Lie-algebra hebben.

- De toegevoegde afbeelding $\phi \circ s_p \circ \phi^{-1}$ is opnieuw een geodetische reflectie rond p (voor elke isometrie ϕ) en moet wegens uniciteit samenvallen met s_p . De afbeelding s_p commuteert dus met de actie van K op M , zodat $K \leq K_\sigma$.
- Voor de andere inclusie, beschouw de fixpuntverzameling

$$M_p = \{q \in M \mid s_p(q) = q\}.$$

Per definitie commuteren isometrieën in K_σ met s_p , zodat $K_\sigma(M_p) \subseteq M_p$. Immers, $\phi(q) = \phi(s_p(q)) = s_p(\phi(q))$, zodat $\phi(q)$ opnieuw tot M_p behoort, voor alle $\phi \in K_\sigma$ en alle $q \in M_p$.

Onderstel nu dat de isometrie ϕ binnen K_σ verbonden kan worden met de triviale isometrie via een (continu) pad $\gamma(\bullet) : [0, 1] \rightarrow K_\sigma$. Dan is $\gamma(\bullet)(p)$ een continu pad binnen M_p met $\gamma(0)(p) = \phi(p)$ en $\gamma(1)(p) = p$. We weten echter ook dat p een *geïsoleerd* punt van M_p is. Het feit dat $\phi(p)$ en p met een continu pad in M_p verbonden kunnen worden, kan dan enkel betekenen dat $\phi(p) = p$. Dit geldt voor alle $\phi \in K_\sigma^\circ$ zodat inderdaad $K_\sigma^\circ \leq K$.

Samengevat kunnen we uit een symmetrische ruimte een zogenaamd *symmetrisch paar* halen.

Definitie 2.22 (symmetrisch paar). Een koppel (G, K) met G een samenhangende Liegroep en K een gesloten deelgroep heet een *symmetrisch paar* als er een involutief automorfisme σ van G bestaat waarvoor $K_\sigma^\circ \leq K \leq K_\sigma$ (met dezelfde notaties als hierboven).

⁽¹⁾Doorheen de literatuur slaat de “stelling van Myers–Steenrod” geregeld ook op een ander resultaat uit hetzelfde artikel, dat stelt dat een afstandsbewarende afbeelding tussen samenhangende Riemannvariëteiten automatisch van de klasse C^∞ is (en de concepten “isometrie” in de context van metrische ruimten en Riemannvariëteiten dus samenvallen).

Omgekeerd, veronderstel dat we beschikken over een symmetrisch paar (G, K) , met K compact. We hebben een natuurlijke actie van G op de nevenklasseruimte G/K :

$$\rho : G \times G/K \rightarrow G/K : (g, hK) \mapsto (gh)K.$$

We trachten nu deze nevenklasseruimte een Riemannvariëteitsstructuur te geven, zodat G werkt op G/K via isometrieën. In eerste instantie heeft G/K reeds een differentieerbare structuur, waarvoor de projectie $G \rightarrow G/K$ een vezelbundel vormt met vezels K . Kies een willekeurig inproduct op de raakruimte $T_{eK} G/K$ aan de oorsprong (de triviale nevenklasse eK). Het feit dat K compact is, laat toe dit inproduct “uit te middelen” over K om aldus een K -invariant inproduct te bekomen. Noteer eerst $L_g = \rho(g, \bullet) : hK \mapsto ghK$, en definieer voor alle $u, v \in T_{eK} G/K$

$$\langle u, v \rangle_{eK} = \int_K \langle TL_k(u), TL_k(v) \rangle d\mu(k).$$

Volgende definitie, die geen verrassing mag zijn, breidt dit uit tot een Riemannmetriek op G/K :

$$\langle u, v \rangle_{gK} = \langle TL_{g^{-1}}(u), TL_{g^{-1}}(v) \rangle_{eK}.$$

Het inproduct aan de oorsprong is per constructie K -invariant, dus volgt dat $\langle u, v \rangle_{kK} = \langle u, v \rangle_{eK}$ voor alle $k \in K$. Na translatie blijkt de Riemannmetriek op G/K dus onafhankelijk van de gekozen representant. Het is dan ook duidelijk dat G via isometrieën werkt op G/K .

Om aan te tonen dat G/K een symmetrische ruimte is, beschrijven we nog de geodetische reflecties. Beschouw een willekeurig punt gK in G/K , en stel

$$s_{gK} : G/K \rightarrow G/K : hK \mapsto g\sigma(g^{-1}h)K.$$

Dan is duidelijk $s_{gK}(gK) = gK$ en kan men narekenen dat $T_{gK}s_{gK} = -\text{id}$ op de raakruimten.

Merk op dat de geodetische reflecties beschreven worden via volgend commutatief diagram.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sigma} & G \\ \downarrow L_g & & \downarrow L_g \\ G & & G \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ G/K & \xrightarrow{s_{gK}} & G/K \end{array}$$

Samengevat vormt G/K inderdaad een symmetrische ruimte. Het blijkt ook dat als we starten met een symmetrische ruimte M , er het symmetrisch paar $(G = I(M)^\circ, K)$ uit halen, en er dan terug de symmetrische ruimte G/K mee associëren, dat de variëteiten M en G/K dan isometrisch zijn. We kunnen dus besluiten:

Stelling 2.23. Er bestaat een één-op-één verband tussen symmetrische ruimten enerzijds en symmetrische paren (G, K) met K compact anderzijds.

Het compact zijn van K blijkt relevant omdat de Lietheoretische aanpak ook zogenaamde pseudo-Riemannvariëteiten omvat, waarvoor de Riemannmetriek niet langer positief-definiet hoeft te zijn maar slechts niet-ontaard. De eis dat K compact moet zijn, sluit de pseudogevalen uit.

In de volgende paragrafen bestuderen we de algebraïsche interpretatie wat dieper, en trachten we meetkundige concepten zoals kromming ook algebraïsch uit te drukken. Belangrijk voor onze doeleinden is alvast dat de Riemannkrommingstensor van een Liegroep volledig en elegant beschreven kan worden via algebraïsche data:

Lemma 2.24. De krommingstensor kan voor $u, v, w \in \mathfrak{g}$ algebraïsch worden uitgedrukt als

$$R(u, v)w = -[[u, v], w].$$

Zonder bewijs. Zie bijvoorbeeld [Hel78] of [Esc97]. ▣

Definitie 2.25 (Cartandecompositie). De involutie σ bij een symmetrisch paar (G, K) induceert via differentiatie een involutief automorfisme $\theta = T_e\sigma$ van de Lie-algebra \mathfrak{g} van G , dat de *Cartan-involutie* genoemd wordt. De eigenwaarden van θ zijn $\{\pm 1\}$ en de ontbinding in eigenruimten,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

heet de *Cartandecompositie* van \mathfrak{g} . Merk op dat de $(+1)$ -eigenruimte \mathfrak{k} juist de Lie-algebra is van K , en dat de (-1) -eigenruimte \mathfrak{p} dan geïdentificeerd kan worden met de raakruimte aan de oorsprong van de symmetrische ruimte G/K .

Omdat we de eigenwaarden ± 1 door het Liehaakje kunnen trekken, geldt dat

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}.$$

Met andere woorden: \mathfrak{k} is een Lie-deelalgebra en elke deelalgebra bevat in \mathfrak{p} is abels.

Door stelling 1.18 is de restrictie $B|_{\mathfrak{k}}$ van de Killingvorm op \mathfrak{k} negatief-definiet, want K is compact. Het gedrag van de Killingvorm op het orthogonaal complement \mathfrak{p} is wat de meetkundige structuur van de symmetrische ruimte zal bepalen, en dat wordt weerspiegeld in de volgende definitie.

Definitie 2.26 (Euclidisch, compact, non-compact). Beschouw de Killingvorm B op $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Een symmetrische ruimte M horende bij het symmetrisch paar (G, K) is

- van het *Euclidisch type* als $B|_{\mathfrak{p}}$ identisch nul is;
- van het *compact type* als $B|_{\mathfrak{p}}$ negatief-definiet is;
- van het *non-compact type* als $B|_{\mathfrak{p}}$ positief-definiet is.

Stelling 2.27. Een symmetrische ruimte M is te ontbinden als een Riemannproduct van variëteiten

$$M \cong M_e \times M_c \times M_{nc},$$

respectievelijk van het Euclidisch type, compact type, en niet-compact type.

Zonder bewijs. ▣

De meetkundige interpretatie van deze drie types schuilt in een verband tussen de Killingvorm op \mathfrak{p} en de Riemannmetriek op $M = G/K$. In [Esc97] wordt eerst het concept *isotropie-irreducibiliteit* ingevoerd: G/K heet isotropie-irreducibel als er geen niet-triviale K -invariante deelruimten zijn in de raakruimte $T_{eK}G/K \cong \mathfrak{p}$. Enerzijds geeft de Riemannmetriek een inproduct op \mathfrak{p} ; anderzijds is er de restrictie van de Killingvorm tot \mathfrak{p} . Deze beide bilineaire vormen zijn symmetrisch en K -invariant. Hieruit leidt de auteur in [Esc97] af dat deze op een factor λ na identiek zijn, i.e. dat $B|_{\mathfrak{p}}(\bullet, \bullet) = \lambda \cdot \langle \bullet, \bullet \rangle_{eK}$. Het teken van λ bepaalt het type van de symmetrische ruimte M .

Stelling 2.28. Onder bovenstaande notaties wordt de sectionaalkromming van M gegeven door

$$\sigma_{eK}(u, v) = \lambda^{-1} \cdot B([u, v], [u, v])$$

als $\lambda \neq 0$, waar u en v orthonormaal zijn in \mathfrak{p} . Als $\lambda = 0$, dan is ook de sectionaalkromming nul.

Bewijs. Via 2.24 en de eigenschappen van de Killingvorm rekenen we na dat

$$\lambda \cdot \sigma_{eK}(u, v) = \lambda \cdot \langle u, R(u, v)v \rangle_{eK} = B(u, R(u, v)v) = B(u, [v, [u, v]]) = B([u, v], [u, v]).$$

Voor $\lambda \neq 0$ is het gestelde bewezen. Voor $\lambda = 0$ impliceert deze berekening dat $[u, v] = 0$: omdat $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$ en de Killingvorm negatief-definiet is op \mathfrak{k} , is $B([u, v], [u, v]) \leq 0$ en geldt de gelijkheid als en slechts als $[u, v] = 0$. Dan is ook de krommingstensor gelijk aan nul. ■

Zoals opgemerkt is de bilineaire vorm in deze formule steeds niet-positief. De sectionaalkromming heeft dus het tegengestelde teken als de factor λ , en we vinden volgende karakterisatie.

Stelling 2.29. Onder dezelfde notaties als hierboven is een symmetrische ruimte M

- van het *Euclidisch type* als en slechts als de sectionaalkromming nul is;
- van het *compact type* als en slechts als de sectionaalkromming positief is;
- van het *non-compact type* als en slechts als de sectionaalkromming negatief is.

Bewijs.

- Voor het Euclidisch type is $B|_{\mathfrak{p}}$ identisch nul, dus is $\lambda = 0$; dan is ook de sectionaalkromming gelijk aan nul, en vice versa.
- Voor het compact type is $B|_{\mathfrak{p}}$ negatief-definiet, dus is $\lambda < 0$; dan is de sectionaalkromming positief, en vice versa.
- Voor het non-compact type is $B|_{\mathfrak{p}}$ positief-definiet, dus is $\lambda > 0$; dan is de sectionaalkromming negatief, en vice versa. ■

2.4 Voorbeelden

We bespreken enkele concrete symmetrische ruimten, met een bijzondere aandacht voor de ruimte $SL(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$. Doorheen de literatuur zijn er natuurlijk veel meer voorbeelden te vinden; in [Esc97] alleen al staan er negen gevallen in detail besproken.

- (1) De Euclidische ruimte \mathbb{R}^n is een symmetrische ruimte, waarin de geodetische reflectie rond een punt p gegeven wordt door een puntspiegeling, of concreet $s_p(q) = 2p - q$.
- (2) Beschouw de n -sfeer

$$\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1\},$$

die zijn n -dimensionale variëteitsstructuur overerft van de inbedding in de Euclidische ruimte. Geodeten voor \mathbb{S}^n zijn niets meer dan grootcirkels. De geodetische reflectie rond een punt p wordt gegeven door de spiegeling rond de as $\mathbb{R}p$ in \mathbb{R}^{n+1} , of concreet $s_p(q) = 2\langle p, q \rangle p - q$; de component $\langle p, q \rangle p$ van q in de p -richting blijft immers bewaard, terwijl diens orthogonaal complement $q - \langle p, q \rangle p$ van teken wijzigt. Merk op dat ook $-p$ een fxpunt is.

De symmetriegroep van de n -sfeer via rotaties is de groep $SO(n+1, \mathbb{R})$, en de isotropiegroep van de standaardvector e_{n+1} op de sfeer is isomorf met $SO(n, \mathbb{R})$. Volgens de geziene theorie is $(SO(n+1, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R}))$ dan een symmetrisch paar.

- (3) De groep $O(n, \mathbb{R})$ vormt zelf een symmetrische ruimte. De natuurlijke differentieerbare structuur wordt overgeërfd vanuit $\mathbb{R}^{n \times n}$ die isomorf is met de n^2 -dimensionale Euclidische ruimte. De Riemannstructuur verkrijgen we uit het standaard inproduct,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_{ij} v_{ij} = \text{tr}(u^\top v).$$

Merk op dat links of rechts vermenigvuldigen met een vaste orthogonale matrix dit inproduct invariant laat; voor alle $g \in O(n, \mathbb{R})$ is

$$\begin{cases} \langle gu, gv \rangle = \text{tr}(u^\top g^\top gv) = \text{tr}(u^\top v) = \langle u, v \rangle; \\ \langle ug, vg \rangle = \text{tr}(g^\top u^\top vg) = \text{tr}(g^{-1} u^\top vg) = \text{tr}(u^\top v) = \langle u, v \rangle. \end{cases}$$

Dit betekent dat linkse of rechtse vermenigvuldiging met een willekeurig element in $O(n, \mathbb{R})$ een isometrie is, en $O(n, \mathbb{R})$ dus een homogene variëteit.

Beschouw vervolgens de afbeelding $s_I : h \mapsto h^\top$. Ook deze afbeelding laat $O(n, \mathbb{R})$ duidelijk invariant als verzameling en bewaart het inproduct. Bovendien fixeert s_I de eenheidsmatrix en is de raakafbeelding $T_I s_I$ gelijk aan $-\text{id}$ op de raakruimte $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$ van scheefsymmetrische matrices (zie voorbeeld 1.21), omdat $T_I s_I(v) = s_I(v) = v^\top = -v$. Dit is met andere woorden juist een geodetische reflectie rond de eenheidsmatrix I .

Voor willekeurige elementen $g \in O(n, \mathbb{R})$ wordt de geodetische reflectie gegeven door

$$s_g = L_g \circ s_I \circ L_g^{-1} : h \mapsto g(g^{-1}h)^\top = g(g^\top h)^\top = gh^\top g.$$

- (4) Beschouw de Liegroep $SL(n, \mathbb{R})$, uitgerust met het involutief automorfisme $\sigma : g \mapsto (g^{-1})^\top$ (inderdaad, merk op dat $\sigma(gh) = \sigma(g)\sigma(h)$). De fixpuntgroep van deze involutie is

$$K_\sigma = \{g \in SL(n, \mathbb{R}) \mid g = (g^{-1})^\top\} = SO(n, \mathbb{R}),$$

en deze is reeds compact. We verkrijgen zodus een symmetrisch paar $(SL(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R}))$ en een correspondende symmetrische ruimte $SL(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$ met geodetische reflecties gegeven door

$$s_{gK} : hK \mapsto gg^\top(h^{-1})^\top K.$$

We berekenen nu de Cartandecompositie voor dit symmetrisch paar. De Cartaninvolutie is

$$\theta : v \mapsto T_e \sigma(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sigma(\exp tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-tv^\top) = -v^\top.$$

De ontbinding van $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ in ± 1 -eigenruimten $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ blijkt dus

$$\begin{cases} \mathfrak{k} = \{v \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{tr } v = 0, v = -v^\top\}; \\ \mathfrak{p} = \{v \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{tr } v = 0, v = v^\top\}. \end{cases}$$

In woorden uitgedrukt: de Cartandecompositie blijkt niets anders dan de decompositie van (spoorloze) matrices in een antisymmetrisch en een symmetrisch deel.

Laat ons vervolgens de Killingvorm op $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ expliciet uitrekenen. Er bestaan zeker en vast kortere argumenten: steunend op het feit dat $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ simpel is, kan men aantonen dat twee niet-ontaarde symmetrische bilineaire vormen evenredig moeten zijn, zodat $B(u, v)$ een welbepaald veelvoud moet zijn van de spoorvorm $\text{tr}(uv)$.

Beschouw $u, v, w \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. De lineaire transformaties ad_u en ad_v zijn na een basiskeuze op $\mathbb{R}^{n \times n}$ op te vatten als matrices met afmetingen $n^2 \times n^2$, en bovendien is

$$(\text{ad}_u \circ \text{ad}_v)(x) = [u, [v, x]] = uvx - vxu - uxv + xvu.$$

Noteer de $n^2 \times n^2$ -matrix die overeenkomt met $\text{ad}_u \circ \text{ad}_v$ als M , met componenten $M_{ij,pq}$:

$$(\text{ad}_u \circ \text{ad}_v)(x_{ij})_{ij} = \sum_{p,q} M_{ij,pq} x_{pq}.$$

Na een kleine krachttoer komt er dat

$$\begin{aligned} (\text{ad}_u \circ \text{ad}_v)(x_{ij})_{ij} &= \sum_{p,q} \left(u_{ip} v_{pq} x_{qj} - v_{ip} x_{pq} u_{qj} - u_{ip} x_{pq} v_{qj} + x_{ip} v_{pq} u_{qj} \right) \\ &= \sum_{p,q} \left(\sum_k (u_{ik} v_{kp} \delta_{jq} + v_{qk} u_{kj} \delta_{ip}) - u_{ip} v_{pj} - v_{ip} u_{pj} \right) x_{pq}, \end{aligned}$$

met δ de Kroneckerdelta. De componenten van M worden dus expliciet gegeven door

$$M_{ij,pq} = \sum_k (u_{ik} v_{kp} \delta_{jq} + v_{qk} u_{kj} \delta_{ip}) - u_{ip} v_{qj} - v_{ip} u_{qj}.$$

Nu is het berekenen van de Killingvorm $B(u, v)$ niet zo moeilijk meer:

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \text{tr}(\text{ad}_u \circ \text{ad}_v) = \sum_{i,j} M_{ij,ij} \\ &= \sum_{i,j} \left(\sum_k (u_{ik} v_{ki} + v_{jk} u_{kj}) - u_{ii} v_{jj} - v_{ii} u_{jj} \right) = 2n \text{tr}(uv) - 2 \text{tr}(u) \text{tr}(v). \end{aligned}$$

Deze berekening geeft ons de Killingvorm van $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Omdat $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ bestaat uit spoorloze matrices, herleidt deze formule zich tot $B(u, v) = 2n \text{tr}(uv)$.

De Killingform is inderdaad negatief-definiet op \mathfrak{k} , daar voor u scheefsymmetrisch geldt dat

$$B|_{\mathfrak{k}}(u, u) = 2n \text{tr}(u^2) = 2n \text{tr}(-u^\top u) = -2n \sum_{i,j} u_{ij}^2 \leq 0,$$

en bovendien positief-definiet op \mathfrak{p} , daar voor u symmetrisch geldt dat

$$B|_{\mathfrak{p}}(u, u) = 2n \text{tr}(u^2) = 2n \text{tr}(u^\top u) = 2n \sum_{i,j} u_{ij}^2 \geq 0.$$

In beide gevallen geldt de gelijkheid slechts als $u = 0$. De bijhorende symmetrische ruimte is met andere woorden van het non-compact type, en heeft een negatieve sectionaalkromming. Dit resultaat is van fundamenteel belang voor de argumenten van Young; het loont de moeite om dit in een stelling te gieten.

Stelling 2.30. De nevenklasseruimte $\text{SL}(n, \mathbb{R})/\text{SO}(n, \mathbb{R})$ heeft de structuur van een symmetrische ruimte met negatieve sectionaalkromming.

We bespreken nog kort een model voor deze nevenklasseruimte. Beschouw de ruimte

$$\text{SP} = \{x \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid x^\top = x, x \gg 0, \text{tr } x = 1\}$$

van symmetrische positief-definiete matrices met spoor 1. We voorzien SP van een Riemannmetriek via het voorschrift

$$\langle u, v \rangle_p = \text{tr}(up^{-1}vp^{-1}) = \text{tr}(p^{-1}up^{-1}v).$$

$\text{SL}(n, \mathbb{R})$ heeft een actie op SP, door $g(x) = gxg^\top$. Deze actie is via isometrieën, aangezien

$$\langle g(u), g(v) \rangle_{g(p)} = \text{tr}(gug^\top (gpg^\top)^{-1} gvg^\top (gpg^\top)^{-1}) = \text{tr}(gup^{-1}vp^{-1}g^{-1}) = \langle u, v \rangle_p,$$

en ook transitief, want elke matrix $x \in \text{SP}$ is te schrijven als $x = gg^\top = g(I)$ voor een zekere $g \in \text{SL}(n, \mathbb{R})$. De isotropiegroep van de eenheidsmatrix is duidelijk precies de orthogonale groep $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ en we vinden een isometrie $\text{SP} \cong \text{SL}(n, \mathbb{R}) / \text{SO}(n, \mathbb{R})$.

3

Inleiding tot Dehnfuncties

3.1 Dehnfuncties, combinatorisch

We verwachten als voorkennis enige vertrouwdheid met eindige presentaties van groepen.

Gegeven een eindige presentatie $G = \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R} \rangle$, stelt een woord w in de vrije groep \mathcal{A}^* het triviale element van G voor als en slechts als het geschreven kan worden als een product van toegevoegden van relatoren en hun inversen, i.e. in de vorm

$$w = \prod_{i=1}^n x_i^{-1} r_i x_i,$$

met alle $x_i \in \mathcal{A}^*$ en $r_i \in \mathcal{R}^{\pm 1}$.

Definitie 3.1 (algebraïsche oppervlakte, kost). Gegeven een woord $w \in \mathcal{A}^*$ dat het eenheids-element voorstelt, noemen we de minimale n waarvoor zo'n schrijfwijze zoals hierboven bestaat, de (algebraïsche) oppervlakte of kost van w . Deze noteren we als $\text{area}_a(w)$.

Het is handig als we bovendien $\text{area}_a(w_1, w_2) = \text{area}_a(w_1 w_2^{-1})$ definiëren voor elke twee woorden w_1 en w_2 die hetzelfde element representeren; dit stelt de kost voor om w_1 tot w_2 te transformeren.

De benaming “oppervlakte” wordt verduidelijkt in het meetkundigere *Cayley-2-complex* horende bij de presentatie $G = \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R} \rangle$. Dit is het celcomplex met als toppen (0-cellen) alle groeps-elementen van G , als gerichte bogen (1-cellen) alle paren (x, xa) met $x \in G, a \in \mathcal{A}$, en als 2-cellen alle cellen op achtereenvolgende toppen $(x, xr_1, xr_1 r_2, \dots, xr_1 r_2 \cdots r_{n-1})$ met $x \in G, r = r_1 r_2 \cdots r_n \in \mathcal{R}$. Merk op dat deze structuur zonder zijn 2-cellen (het *1-skelet*) precies de Cayleygraaf van G bij de voortbrengers \mathcal{A} is; het boek [BRS07] noemt deze constructie met 2-cellen dan ook “*attaching flesh to the dry bones*” van de Cayleygraaf.

Een woord $w \in \mathcal{A}^*$ dat de eenheid voorstelt correspondeert met een gesloten pad in het 2-complex, en iedere factor $x_i^{-1} r_i x_i$ met het oversteken van juist één 2-cel. De algebraïsche oppervlakte van w is dus het minimale aantal 2-cellen dat moet worden overgestoken in een homotopie van het pad w naar het constante pad in de eenheid.

De meetkundige intuïtie in het Cayleycomplex rechtvaardigt volgende definitie, die het taalgebruik wat minder omslachtig maakt.

Definitie 3.2 (nulhomotoop). Een woord $w \in \mathcal{A}^*$ dat het eenheidselement van de groep voorstelt noemen we kortweg *nulhomotoop*, in overeenstemming met het vertrouwde topologische concept (door w te interpreteren als een pad in het Cayleycomplex).

Definitie 3.3 (Dehnfunctie). De *Dehnfunctie* van een eindig gepresenteerde groep is de functie

$$\delta_G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto \max_{\ell(w) \leq n} \text{area}_a(w),$$

met het maximum genomen over alle nulhomotope woorden $w \in \mathcal{A}^*$.

Merk op dat δ_G goedgedefinieerd is, omdat A eindig is en er dus slechts een eindig aantal woorden in A^* bestaan met begrensde lengte. Deze functie is duidelijk ook stijgend. A priori hangt δ_G af van de gekozen presentatie voor G : in de presentatie $\mathbb{Z} \cong \langle x \mid \emptyset \rangle$ zijn er bijvoorbeeld geen relatoren en is de Dehnfunctie duidelijk identisch nul, maar voor de presentatie $\mathbb{Z} \cong \langle x, y \mid y = 1 \rangle$ blijkt de Dehnfunctie de identieke afbeelding (zoals het woord y^n duidelijk maakt). Deze afhankelijkheid van de presentatie kan worden opgelost door te kijken naar geschikte equivalentieclassen van functies.

Definitie 3.4 (\simeq). Beschouw twee functies $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. We noteren $f \lesssim g$ als en slechts als er een reële constante c bestaat zodat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$f(x) \leq cg(cx + c) + cx + c.$$

We noteren $f \simeq g$ als en slechts als zowel $f \lesssim g$ als $g \lesssim f$.

We kunnen ook functies $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gelijkaardig vergelijken door deze op elk interval $[n, n + 1[$ constant uit te breiden naar \mathbb{R} , i.e. door $\bar{f}(x) = f(\lfloor x \rfloor)$ en $\bar{g}(x) = g(\lfloor x \rfloor)$ te stellen.

Deze equivalentierelatie identificeert lineaire en constante functies (en alles tussenin), veeltermen van dezelfde graad, en exponentiële functies, maar onderscheidt bijvoorbeeld nog veeltermen met verschillende graden.

Stelling 3.5. De Dehnfunctie van een eindig gepresenteerde groep is onafhankelijk van de keuze van de presentatie, op \simeq -equivalentie na.

Bewijs. Beschouw twee eindige presentaties $G \cong \langle \mathcal{A}_1 \mid \mathcal{R}_1 \rangle \cong \langle \mathcal{A}_2 \mid \mathcal{R}_2 \rangle$; we moeten aantonen dat de geassocieerde Dehnfuncties equivalent zijn. Ga eerst over na de presentatie

$$\langle \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \mid \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \{xu_x^{-1} \mid x \in \mathcal{A}_1\} \cup \{yv_y^{-1} \mid y \in \mathcal{A}_2\} \rangle$$

met u_x een vastgekozen woord in A_2^* dat x voorstelt en v_y een vast woord in A_1^* dat y voorstelt. Het is duidelijk dat deze presentatie dezelfde groep blijft voorstellen, omdat ze een soort vertaling tussen de beide initiële presentaties biedt. Het resultaat zal nu volgen uit de bewering dat de equivalentieklasse van de Dehnfunctie bewaard blijft onder volgende twee operaties op de presentatie:

- (1) het toevoegen van eindig veel overbodige relatoren $\{r_i\}$ aan \mathcal{R} ;
- (2) het toevoegen van eindig veel generatoren $\{x_i\}$ aan \mathcal{A} en geschikte relatoren $\{x_i u_i^{-1}\}$ aan \mathcal{R} , waarin u_i een vast woord is dat x_i uitdrukt in het oorspronkelijke alfabet \mathcal{A} .

De Dehnfuncties van de oorspronkelijke presentaties voor de groep zijn dan immers equivalent met die van de grotere presentatie. Rest ons nog deze twee claims te staven. We schrijven een accent bij de Dehnfuncties en oppervlaktes horende bij de nieuwe presentatie.

- (1) Het feit dat deze nieuwe relatoren $\mathcal{R}' = \{r_i\}$ overbodig zijn, betekent dat elke r_i kan worden uitgedrukt als een product van toegevoegden van oude relatoren en hun inversen. Noem $m = \max\{\text{area}_a(r_i)\}$, beschouwd ten opzichte van de oorspronkelijke presentatie.

Veronderstel dat we een woord w kunnen schrijven als een product van k toegevoegden van oude en nieuwe relatoren en hun inversen. Door elk optreden van een $r_i \in \mathcal{R}'$ te vervangen door zijn “vertaling” in oude relatoren, bekomen we een schrijfwijze met hoogstens $m \cdot k$ toegevoegden in de oorspronkelijke relatoren, zodat

$$\delta_G(n) \leq m \cdot \delta'_G(n).$$

Anderzijds neemt de algebraïsche oppervlakte niet toe door het toevoegen van relatoren, dus

$$\delta'_G(n) \leq \delta_G(n).$$

(2) Noem nu $m = \max\{\ell(u_x)\}$ en beschouw een nulhomotoop woord w in het nieuwe alfabet met lengte n . Via de relatoren xu_x^{-1} kunnen we elke nieuwe generator x in w vervangen door u_x aan een kost van hoogstens n . Zo transformeren we w in een woord w' in het originele alfabet met lengte hoogstens $m \cdot n$, en geldt

$$\delta'_G(n) \leq \delta_G(m \cdot n) + n.$$

Anderzijds, veronderstel dat een woord w over het oude alfabet uitgedrukt kan worden met k toegevoegden van nieuwe relatoren over het nieuwe alfabet. Door elk optreden van een x te herschrijven tot u_x (zowel in de relatoren, die dan triviaal worden, als in de toevoegende factoren) vinden we een uitdrukking met hoogstens k toegevoegden van oude relatoren over het oude alfabet; een omslachtige manier om kortweg te zeggen dat

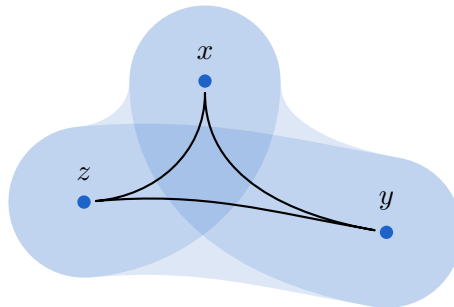
$$\delta_G(n) \leq \delta'_G(n).$$

In beide gevallen is inderdaad $\delta_G \lesssim \delta'_G$ en $\delta'_G \lesssim \delta_G$. ■

In praktijk blijven we spreken van dé Dehnfunctie en bedoelen we in feite diens \simeq -equivalentieklasse.

Welke functies van de vorm x^r (voor $r \in \mathbb{R}^+$) precies de Dehnfunctie zijn van een bepaalde groep, is een boeiende en uitdagende vraag met een verrassend gedeeltelijk antwoord. We vermelden kort een beroemd resultaat van Gromov.

Definitie 3.6 (hyperbolisch). Een eindig voortgebrachte groep G uitgerust met de woordmetriek heet *hyperbolisch* als de Cayleygraaf een hyperbolische ruimte vormt in de betekenis van Gromov. Concreet moet een constante $\delta > 0$ bestaan zodat elke geodetische driehoek $[x, y] \cup [y, z] \cup [x, z]$ in de Cayleygraaf δ -slank is: elk punt van $[x, y]$ moet binnen een afstand δ van $[y, z] \cup [x, z]$ liggen en analoog voor de andere zijden.



Enkele eenvoudige voorbeelden: een vrije groep F_n is duidelijk hyperbolisch met constante $\delta = 0$, een eindige groep G is hyperbolisch met $\delta = |G|$. De groep \mathbb{Z}^2 daarentegen is niet hyperbolisch: het is eenvoudig om geodetische driehoeken te construeren waarvoor δ willekeurig groot wordt.

Stelling 3.7 (Gromov). Voor een eindig voortgebrachte groep G zijn equivalent:

- (1) G is hyperbolisch;
- (2) de Dehnfunctie $\delta_G(x)$ is lineair;
- (3) de Dehnfunctie $\delta_G(x)$ is subkwadratisch, i.e. $\delta_G(x) \lesssim x^{2-\varepsilon}$ voor zekere $\varepsilon > 0$.

Zonder bewijs. We verwijzen naar Gromovs beroemde manuscript [Gro87] voor het originele resultaat. Ook geeft [Bow95] een veralgemening naar algemenere geodetische ruimten waar een notie van oppervlakte heerst (die hoort te voldoen aan twee bescheiden axioma's). ■

Zodra een groep een subkwadratische Dehnfunctie heeft, is deze dus meteen hyperbolisch, wat best een strenge voorwaarde is op de groepsstructuur. Er zijn aan de andere kant zeer veel (klassen van) groepen gekend met een kwadratische Dehnfunctie—een classificatie lijkt in dit geval ondoenbaar. Gersten noemde de groepen met $\delta_G(x) \simeq x^2$ de “kwadratische zoo”. We quoteren [Ger96]:

“I call this a zoo, because I am unable to see any pattern in this bestiary of groups. It would be striking if there existed a reasonable characterization of groups with quadratic Dehn functions, which was more enlightening than saying that they have quadratic Dehn functions.”

Definieer concreet het *isoperimetrisch spectrum*

$$\mathbb{P} = \{r \in \mathbb{R} \mid \text{er bestaat een eindig voortgebrachte groep } G \text{ zodat } \delta_G(x) \simeq x^r\}.$$

Het resultaat van Gromov drukt uit dat er een gat in \mathbb{P} zit. Ondertussen heeft men kunnen aantonen dat dit het enige gat is—concreet, dat $\mathbb{P} \cap [2, +\infty[$ dicht is in $[2, +\infty[$ —via constructies voor vrij exotische groepen als *snowflake groups*, die voor elk paar gehele getallen $p \geq q > 0$ een groep met $r = 2 \log(2p/q)$ opleveren. We verwijzen voor concrete constructies en geschiedenis naar [BRS07]. We merken nog op dat een volledige beschrijving van het isoperimetrisch spectrum \mathbb{P} nog steeds openstaat, maar dat er slechts een aftelbaar aantal eindige presentaties van groepen bestaat, zodat ook \mathbb{P} aftelbaar is, en in het bijzonder niet gelijk aan de volledige verzameling $\{1\} \cup [2, +\infty[$.

3.2 Dehnfuncties, meetkundig

Het Cayley-2-complex van een eindig voortgebrachte groep geeft al wat intuïtie met de meetkunde achter de theorie van Dehnfuncties. We bespreken nu een gelijkaardig concept in een zuiver meetkundige context, alvorens in het volgende hoofdstuk de link met de algebraïsche context te leggen.

De achterliggende ideeën dateren al van de oude Grieken, die beweerden dat de unieke vlakke figuur die de grootste oppervlakte bereikt met een gegeven omtrek, de cirkel is. Alhoewel intuïtief voor de hand liggend, werd een rigoreus bewijs voor dit *isoperimetrisch probleem* pas in de 19de eeuw gevonden, aangezet door Jakob Steiner en vervolledigd door verscheidene andere wiskundigen.

Een gerelateerd meetkundig probleem is het *probleem van Plateau*, vernoemd naar Joseph Plateau, die in 1835 aangesteld werd tot professor in de experimentele fysica aan de Universiteit Gent. De opgave werd reeds gesteld in 1760 door Joseph-Louis Lagrange en vraagt naar het algemene bestaan van minimaaloppervlakken (die hun oppervlakte lokaal minimaliseren) met een gegeven rand. Het vraagstuk draagt echter de naam van Plateau, door zijn experimenten met zeepbeloppervlakken—oplossingen aangereikt door de natuur!

De Dehnfunctie die we aan een Riemannvariëteit M zullen hechten vereist een notie van “minimale opvulling” van (voldoende reguliere) lussen. Een kromme $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ is een *lus* als $\gamma(0) = \gamma(1)$, en kunnen we dan opvatten als een afbeelding $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$. Een kromme heet *rectificeerbaar* als die een eindige lengte heeft; om lengtes en oppervlaktes te kunnen vergelijken, beperken we ons tot rectificeerbare lussen. Tot slot heeft een “opvulling” uiteraard slechts betekenis voor nulhomotope lussen. Onder deze beperkingen definiëren we de oppervlakte van een lus als volgt.

Definitie 3.8 (meetkundige oppervlakte). Beschouw in een Riemannvariëteit M een rectificeerbare, nulhomotope lus $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$. De (*meetkundige*) *oppervlakte* van γ is het infimum van alle oppervlaktes van Lipschitzafbeeldingen $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow M$ waarvoor de restrictie tot de rand een herparametrisatie van γ is en noteren we als $\text{area}_m(\gamma)$.

Op dezelfde manier volgt de meetkundige definitie van een Dehnfunctie.

Definitie 3.9 (Dehnfunctie). De *Dehnfunctie* van een Riemannvariëteit M is de functie

$$\delta_M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sup_{\ell(\gamma) \leq x} \text{area}_m(\gamma),$$

met het supremum genomen over alle nulhomotope lussen $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ met lengte hoogstens x .

Deze functie δ_M is opnieuw duidelijk stijgend. Het feit dat die ook goedgedefinieerd is, ligt dit keer minder voor de hand; a priori zou het kunnen dat er lussen bestaan die onbegrensd grote oppervlaktes vereisen om opgevuld te worden, ook al is hun lengte begrensd. Sommige specifieke gevallen (zoals het geval waarin M compact is) zijn redelijk makkelijk te bewijzen, maar het algemene geval is subtiel en technisch.

Voor ons project is vooral de volgende stelling over meetkundige Dehnfuncties van belang:

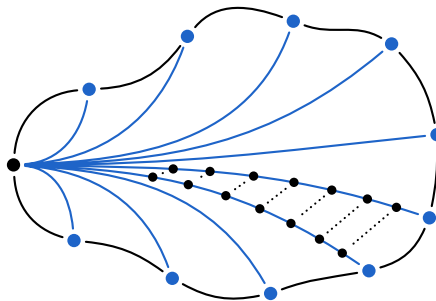
Stelling 3.10. Een niet-positief gekromde ruimte M heeft een kwadratische Dehnfunctie.

Zonder bewijs. Dit wordt bewezen in [BH99] voor CAT(0)-ruimten, steunend op een robuuste notie van oppervlakte, en voor Riemannvariëteiten met negatieve sectionaalkromming kan men gebruik maken van de Riemannoppervlakte. Hoe dan ook verloopt het cruciale idee als volgt.

Beschouw een willekeurige nulhomotope lus en kies een vast basispunt erop. Verbind ieder punt op de lus via een geodeet met dit basispunt. Men kan nagaan dat de metriekfunctie *geodetisch convex* is: voor elke twee geodeten $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M$, geparametriseerd proportioneel aan hun booglengte, geldt dat

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq (1-t) \cdot d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) + t \cdot d(\gamma_1(1), \gamma_2(1)),$$

voor alle $t \in [0, 1]$. Dit laat toe om de lus samen te trekken via de geodeten aan een kwadratische oppervlakte, zoals onderstaande figuur suggereert.



Intuïtief: de convexiteit van de metriek betekent dat de geodeten dichter bij elkaar komen te liggen richting het basispunt en de beschreven oppervlakte van elke “strook” proportioneel is aan de lengte van de geodeet. We verkrijgen zo een oppervlakte van $\mathcal{O}(\ell(w))$ voor elk van de $\mathcal{O}(\ell(w))$ stroken, in totaal goed voor een kwadratische oppervlakte in $\ell(w)$. \square

Terugkijkend naar stelling 2.30 betekent dit dat de symmetrische ruimte $\text{SL}(n, \mathbb{R}) / \text{SO}(n, \mathbb{R})$ alvast een kwadratische meetkundige Dehnfunctie heeft. De bedoeling is natuurlijk om deze in verband te brengen met de combinatorische Dehnfunctie van $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$.

3.3 Verband tussen beide definities

Het is uiteraard niet zonder reden dat de functies δ_G bij een groep enerzijds en δ_M bij een variëteit anderzijds dezelfde naam en notatie krijgen: mits er voldoende verbanden tussen G en M bestaan,

kan men namelijk aantonen dat de twee soorten Dehnfuncties \simeq -equivalent zijn. We voeren eerst enkele definities in (die ook in heel wat andere contexten een centrale rol spelen).

Definitie 3.11 (meetkundige actie). Beschouw een actie $\rho : G \times M \rightarrow M$ van een groep G op een meetkundige structuur M (zoals een Riemannvariëteit). We noemen de actie

- *via isometrieën* als $\rho(g, \bullet)$ voor elke vaste $g \in G$ een isometrie van M is;
- *eigenlijk discontinu (properly discontinuous)* als voor elke $g \in G$ en elk compact deel $K \subseteq M$, er slechts eindig veel $g \in G$ bestaan zodat $\rho(g, K)$ en K niet-ledig snijden;
- *cocompact* als de baanruimte $G \backslash M$ compact is, m.a.w. als er een fundamenteaalgebied in M voor de actie bestaat waarvan de sluiting compact is;
- *meetkundig* als die zowel eigenlijk discontinu, cocompact als via isometrieën is.

Stelling 3.12 (Gromovs filling theorem). Veronderstel dat G een eindig gepresenteerde groep is met een meetkundige actie op een enkelvoudig samenhangende Riemannvariëteit M . Dan zijn hun Dehnfuncties \simeq -equivalent;

$$\delta_G \simeq \delta_M \Big|_{\mathbb{N}}.$$

Zonder bewijs. Een gedetailleerd maar vrij technisch bewijs is terug te vinden in [BT01]. ▀

Helaas is de natuurlijke actie van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ op $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ niet cocompact, en is de stelling van Gromov niet meteen toepasbaar. Het kost Young dan ook heel wat meer moeite om de Dehnfunctie van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ af te leiden, steunend op constructies die lussen opsplitsen in delen binnen een compact gedeelte van de symmetrische ruimte (waarvoor 3.12 wel van toepassing is) en delen binnen horoballen van de ruimte (waarvoor andere technieken nodig zijn). Zulke opsplitsingen zullen worden geconstrueerd via *templates*, een concept dat we in het volgende hoofdstuk invoeren.

3.4 Gerelateerde begrippen

3.4.1 Relatieve Dehnfuncties

We kunnen het concept Dehnfunctie wat veralgemenen naar een relatieve notie, die enkel woorden over een deelalfabet van \mathcal{A} beschouwt.

Definitie 3.13 (relatieve Dehnfunctie). Beschouw een deelalfabet $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ en de voortgebrachte deelgroep $H = \langle \mathcal{A}_0 \rangle \leq G$. De *relatieve Dehnfunctie* van $H \leq G$ is de functie

$$\delta_{H \leq G}^{\mathrm{rel}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto \max_{\ell(w) \leq n} \mathrm{area}_a(w),$$

waarbij het maximum nu loopt over alle nulhomotope woorden $w \in \mathcal{A}_0^*$.

Merk op dat een deelgroep van $\langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R} \rangle$ niet noodzakelijk voortgebracht wordt door een deel van \mathcal{A} . Zo'n deelgroep hoeft niet eens eindig voortgebracht te zijn: de commutatorgroep van de vrije groep van rang twee is bijvoorbeeld vrij van rang ∞ . De notatie voor een relatieve Dehnfunctie lijkt dus wat ongelukkig gekozen, maar doorheen dit project beschouwen we steeds deelgroepen H van een specifieke vorm die wél gegenereerd worden door een deelalfabet van \mathcal{A} (met name $\mathcal{A} \cap H$).

Het spreekt voor zich dat, voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_{H \leq G}^{\mathrm{rel}}(n) \leq \delta_G(n) = \delta_{G \leq G}^{\mathrm{rel}}(n).$$

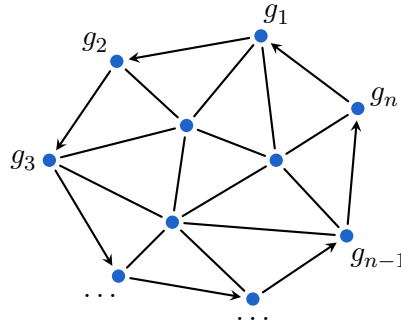
3.4.2 Templates

De volgende concepten zullen toelaten om opvullingen van woorden in \mathcal{A}^* dynamisch te genereren en aldus (relatieve) Dehnfuncties af te schatten. We veronderstellen reeds dat we over een normaalvorm voor G beschikken, ook al zullen we deze voor $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ pas definiëren in hoofdstuk 6.

Definitie 3.14 (normaalvorm). Een afbeelding $\omega : G = \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R} \rangle \rightarrow \mathcal{A}^*$ heet een *normaalvorm* voor G als elke $\omega(g)$ een woord is dat g representeert en lengte $\ell(\omega(g)) \sim \ell(g)$ heeft. We eisen ook dat $\omega(e)$ gelijk is aan het ledige woord.

Definitie 3.15 (templates). Een *template* is voor ons een triangulatie τ van de eenheidsschijf \mathbb{D}^2 gelabeld met elementen van G . Als de toppen langs de rand achtereenvolgens label g_1 tot en met g_n toegekend krijgen, stellen we het *randwoord* w_τ van dit template gelijk aan

$$w_\tau = \omega(g_1^{-1}g_2) \cdot \omega(g_2^{-1}g_3) \cdots \omega(g_{n-1}^{-1}g_n) \cdot \omega(g_n g_1^{-1}).$$



Als $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ een nulhomotoop woord is in \mathcal{A}^* en de n toppen langs de rand van τ precies de groeps-elementen voorgesteld door $e, a_1, a_1 a_2$ tot en met $a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$ zijn, dan noemen we τ een *template voor w* . Het randwoord is in dit geval gelijk aan $w_\tau = \omega(a_1) \omega(a_2) \cdots \omega(a_n)$ en heeft lengte $\ell(w_\tau) \sim n$.

Het bijzonder geval met $n = 3$ noemen we een ω -*driehoek* en we noteren

$$\Delta_\omega(g_1, g_2, g_3) = \omega(g_1^{-1}g_2) \cdot \omega(g_2^{-1}g_3) \cdot \omega(g_3^{-1}g_1).$$

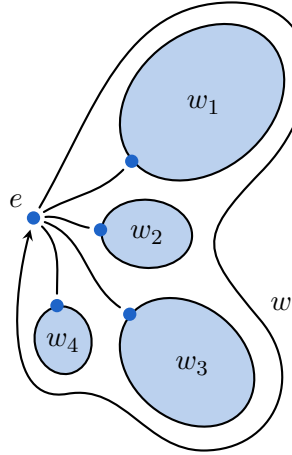
Het geval $n = 2$ noemen we een ω -*bigon*, en kunnen we interpreteren als een ontaarde ω -driehoek met twee keer eenzelfde groeps-element. We noteren dan $\Delta_\omega(g_1, g_2) = \Delta_\omega(g_1, g_2, g_2)$.

De bedoeling zal zijn om templates in te bedden in het Cayley-2-complex om efficiënte opvullingen te vinden. De inbedding van de toppen ligt voor de hand; voor de bogen gebruiken we de normaalvorm ω om een goedgedefinieerd pad tussen adjacenten toppen in de template vast te leggen.

Merk op dat randwoorden en ω -driehoeken steeds nulhomotoop zijn en dus een goedgedefinieerde oppervlakte hebben. We kunnen een template voor w gebruiken om w op te breken in ω -driehoeken en die trachten apart op te vullen. De intuïtie hierachter leggen we vast in volgende definitie.

Definitie 3.16 (opbreken). We kunnen een gegeven nulhomotoop woord w *opbreken* in nulhomotoop woorden w_i aan een *kost* K als er woorden g_i bestaan zodat

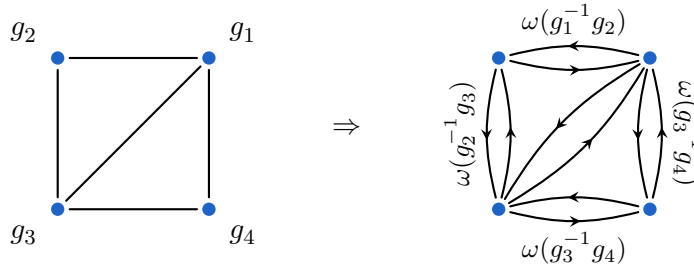
$$\mathrm{area}_a d\left(w, \prod_i u_i w_i u_i^{-1}\right) \leq K.$$



Dit betekent dat

$$\text{area}_a(w) \leq \text{area}_a\left(\prod_i u_i w_i u_i^{-1}\right) + K \leq \sum_i \text{area}_a(w_i) + K.$$

In het bijzonder kunnen we randwoorden van templates aan kost nul opbreken in ω -driehoeken en bigons, overeenkomend met de vlakken en bogen van de template, zoals op het volgende voorbeeld geïllustreerd. Het randwoord is hier $w_\tau = \omega(g_1^{-1}g_2)\omega(g_2^{-1}g_3)\omega(g_3^{-1}g_4)\omega(g_4^{-1}g_1)$ en wordt opgebroken in twee driehoeken $\Delta_\omega(g_3, g_2, g_1)$ en $\Delta_\omega(g_4, g_3, g_1)$ en vijf bigons.



Nu rest nog de eenvoudige observatie dat het randwoord w_τ van een template τ voor w omgezet kan worden in w zelf aan kost $\mathcal{O}(\ell(w))$. Elk deelwoord in de definitie van w_τ is namelijk van de vorm $\omega(a_i)$, met a_i een generator in het eindige alfabet \mathcal{A} ; stellen we nu

$$c = \max_{a_i \in \mathcal{A}} \text{area}_a(a_i, \omega(a_i)),$$

dan is $\text{area}_a(w, \tau_w) \leq c\ell(w)$. Niets houdt ons tegen om de normaalvorm zelfs te herdefiniëren tot $\omega(a_i) = a_i$ voor alle letters a_i in het alfabet. Hoe dan ook mogen we besluiten:

Lemma 3.17. Beschouw een template τ voor een woord w , waar de toppen van het i -de vlak van τ gelabeld zijn door $\{g_{i_1}, g_{i_2}, g_{i_3}\}$ en van de j -de boog door $\{g_{j_1}, g_{j_2}\}$. Dan is

$$\text{area}_a(w) \leq \sum_i \text{area}_a \Delta_\omega(g_{i_1}, g_{i_2}, g_{i_3}) + \sum_j \text{area}_a \Delta_\omega(g_{j_1}, g_{j_2}) + \mathcal{O}(\ell(w)).$$

3.4.3 Triangulaire Dehnfuncties

Templates zijn bijzonder handig om opvullingen van woorden te reduceren naar ω -driehoeken en dit motiveert volgende definitie, die een Dehnfunctie specifiek voor deze ω -driehoeken inhoudt.

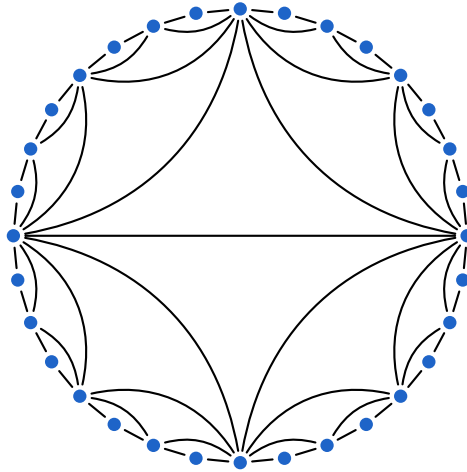
Definitie 3.18 (triangulaire Dehnfunctie). Beschouw opnieuw een deelgroep $H \leq G$ voortgebracht door een deelalfabet $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$. De *triangulaire relatieve Dehnfunctie* van H is de functie

$$\delta_{H,\omega}^{\text{tri}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto \max_{\substack{h_1, h_2, h_3 \in H \\ \text{diam}\{h_1, h_2, h_3\} \leq n}} \text{area}_a \Delta_\omega(h_1, h_2, h_3).$$

Het verband tussen deze Dehnfunctievarianten is subtiel: omdat $\omega(h)$ voor $h \in H$ niet noodzakelijk een woord in $\mathcal{A} \cap H$ hoeft te zijn, leidt een bovengrens op $\delta_{H \leq G}^{\text{rel}}$ niet noodzakelijk tot een bovengrens op $\delta_{H,\omega}^{\text{tri}}$. Omgekeerd kunnen we wel relatieve Dehnfuncties afschatten gebruik makende van de triangulaire Dehnfunctie en geschikte templates, zoals volgende stelling aantoont.

Stelling 3.19. Als $\delta_{H,\omega}^{\text{tri}} \lesssim n^\alpha$ voor zekere $\alpha > 1$, dan is ook $\delta_{H \leq G}^{\text{rel}} \lesssim n^\alpha$.

Bewijs. Door desnoods een letter e voor het eenheidselement toe te voegen aan \mathcal{A}_0 en woorden te “padden” met e 's, mogen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat de lengte van $w \in \mathcal{A}_0^*$ een macht van twee is, zegge $\ell(w) = 2^k$. Beschouw het template τ zoals hieronder, met 2^k toppen en $2^k - 2$ driehoeken, en label de i -de top met het deelwoord $w(i) = a_1 a_2 \cdots a_i$.



Merk op dat de afstand tussen de elementen horende bij $w(i)$ en $w(j)$ in G begrensd wordt door $|j - i|$, want de woorden $w(i)$ en $w(j)$ schelen juist $|j - i|$ letters uit \mathcal{A} ; mogelijks zijn er binnen de Cayleygraaf wel nog “shortcuts” mogelijk. Hoe dan ook bevat de template twee grote driehoeken met diameter hoogstens 2^{k-1} , die per aanname dus elk opgevuld kunnen worden met oppervlakte $\mathcal{O}(2^{(k-1)\alpha})$. Zo zijn er ook vier driehoeken met diameter hoogstens 2^{k-2} , enzovoort, tot de 2^{k-1} driehoeken met diameter hoogstens 2. De bijdrage van alle driehoeken wordt samen gegeven door:

$$\sum_{i=1}^{k-1} 2^i \cdot \mathcal{O}(2^{(k-i)\alpha}) = \mathcal{O}(2^{k\alpha}) = \mathcal{O}(\ell(w)^\alpha).$$

Op dezelfde manier tellen we de bijdragen van de bigons in τ : ééntje heeft diameter hoogstens 2^{k-1} en dus oppervlakte $\mathcal{O}(2^{(k-1)\alpha})$, vier hebben diameter hoogstens 2^{k-2} , enzovoort, tot de 2^k paren adjacenten toppen. De bijdrage van alle bigons wordt volledig analoog gegeven door $\mathcal{O}(\ell(w)^\alpha)$.

Alle contributies samentellend vinden we dus dat $\text{area}_a(w) = \mathcal{O}(n^\alpha)$ voor willekeurige $w \in \mathcal{A}_0^*$ met lengte $\ell(w) = n$, waaruit het gestelde volgt. ■

4

Resultaten voor $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ en $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$

In dit hoofdstuk zullen we enkele specifieke resultaten voor de speciale lineaire groepen opbouwen, die doorheen de rest van dit project nuttig zullen zijn.

4.1 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ als symmetrische ruimte

De structuur van $\mathcal{E} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ als symmetrische ruimte hebben we uitvoerig besproken in hoofdstuk 2.4, voorbeeld 4. Deze ruimte bleek isometrisch aan de ruimte SP van positief-definiëte, symmetrische matrices met spoor nul, uitgerust met het inproduct $\langle u, v \rangle = \mathrm{tr}(uv)$ op de raakruimte van de eenheid. De theorie van hoofdstuk 2 leerde ons dat \mathcal{E} negatief gekromd is, en stelling 3.10 dat \mathcal{E} een kwadratische meetkundige Dehnfunctie heeft.

4.2 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ als ruimte van roosters

Beschouwen we een willekeurige matrix $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. De rijen van g zijn lineair onafhankelijk, dus door elke rij van g op te vatten als een vector in \mathbb{R}^n kunnen we g globaal zien als een geordende basis van \mathbb{R}^n . Nemen we alle \mathbb{Z} -lineaire combinaties van deze basiselementen, dan verkrijgen we een rooster in \mathbb{R}^n dat we als $L(g)$ noteren. We vinden zo een afbeelding

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L} : g \mapsto L(g)$$

met \mathcal{L} de ruimte van roosters in \mathbb{R}^n . Wegens lemma 5.8 verderop is deze afbeelding surjectief.

Het is bekend dat een eenvoudig fundamenteelgebied voor een rooster L in \mathbb{R}^n met integrale basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ gegeven wordt door het *fundamentele parallellepipedum* $\mathcal{P}(L)$, gedefinieerd als

$$\mathcal{P}(L) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i \mid 0 \leq x_i < 1 \right\}.$$

Uiteraard is dit parallellepipedum afhankelijk van de gekozen basis, maar men kan nagaan dat diens *volume* dat niet is en expliciet gegeven wordt $|\det g|$. De restrictie van bovenstaande afbeelding tot de speciale lineaire groep geeft dus een surjectie

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}^0 : g \mapsto L(g)$$

die terechtkomt in de ruimte \mathcal{L}^0 van *unimodulaire* roosters met eenheidsvolume. Twee integrale basissen $\{v_1, \dots, v_n\}$ en $\{w_1, \dots, w_n\}$ brengen bovendien hetzelfde unimodulaire rooster voort als en slechts als er een overgangsmatrix $m \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ bestaat zodat $v_i m = w_i$ voor alle $1 \leq i \leq n$. Met andere woorden, voor $g, g' \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ zijn de roosters $L(g)$ en $L(g')$ gelijk als en slechts als g en g' in dezelfde nevenklasse van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ zitten. We vinden dus een identificatie

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \cong \mathcal{L}^0.$$

Merk eveneens op: beschouwen we deze ruimte van unimodulaire roosters modulo rotatie in \mathbb{R}^n , dan kunnen we deze identificeren met $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$.

4.3 Parabolische deelgroepen

Definitie 4.1 (vlag). Een *vlag* in de vectorruimte \mathbb{R}^n is een rij strikt vernestelde deelruimten

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_k = \mathbb{R}^n.$$

Een vlag heet *compleet* als $k = n$, of met andere woorden als $\dim(V_i) = i$ voor alle $0 \leq i \leq k$. Uit de standaardbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ kunnen we de *standaardvlag* definiëren, waarvoor $V_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$ voor alle $1 \leq i \leq n$. De rij $(0 = d_0, d_1, \dots, d_k = n)$ met $d_i = \dim V_i$ heet het *type* van de vlag.

Merk op dat de groep $GL(n, \mathbb{R})$ een voor de hand liggende actie heeft op de vlaggenruimte van \mathbb{R}^n door $g(V_0, V_1, \dots, V_k) = (gV_0, gV_1, \dots, gV_k)$ te stellen. Het is niet moeilijk in te zien dat deze actie transitief is op de complete vlaggen, en de stabilisator van elke complete vlag toegevoegd is aan die van de standaardvlag. Iets algemener:

Lemma 4.2. De actie van $GL(n, \mathbb{R})$ is transitief op de vlaggen van hetzelfde type, en zulke vlaggen hebben toegevoegde stabilisatoren in $GL(n, \mathbb{R})$.

Bewijs. Beschouw een willekeurige vlag (W_0, W_1, \dots, W_k) van het type $(0 = d_0, d_1, \dots, d_k = n)$. Door inductief een basis van de vorige deelruimte uit te breiden, kunnen we een basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ voor \mathbb{R}^n vinden waarvoor $\langle b_1, \dots, b_{d_i} \rangle = V_i$ voor alle $1 \leq i \leq k$. Beschouw de matrix $g \in GL(n, \mathbb{R})$ met de basisvectoren $\{b_i\}$ als kolommen. Dan is $g\langle e_1, \dots, e_{d_i} \rangle = W_i$ of met andere woorden, het beeld van de deelvlag $(V_0, V_{d_1}, \dots, V_{d_k})$ van de standaardvlag onder de actie van g is juist de vlag (W_0, W_1, \dots, W_k) .

De stabilisator $S \leq GL(n, \mathbb{R})$ van (W_0, W_1, \dots, W_k) is dan juist $g^{-1}S_0g$, waarin S_0 de stabilisator van de beschouwde deelvlag van de standaardvlag voorstelt. ■

De stabilisatoren van vlaggen zijn voldoende belangrijk om een eigen naam te verdienen.

Definitie 4.3 (parabolische deelgroep). De stabilisator van een complete vlag in \mathbb{R}^n noemen we een *Boreldeelgroep* van $GL(n, \mathbb{R})$, de stabilisator van een algemene vlag een *parabolische deelgroep*.

Men kan bewijzen dat elke deelgroep van $GL(n, \mathbb{R})$ die een Boreldeelgroep bevat, parabolisch is.

Merk op dat elke Boreldeelgroep toegevoegd is aan de groep van bovendriehoeksmatrices

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix},$$

en elke parabolische deelgroep aan een groep blokmatrices van de vorm

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{array} \right).$$

Omwille van deze vorm worden parabolische deelgroepen wel al eens *staircase groups* genoemd.

Parabolische deelgroepen bij vlaggen van hetzelfde type zijn weliswaar allen toegevoegd aan elkaar binnen $GL(n, \mathbb{R})$ maar niet noodzakelijk binnen $SL(n, \mathbb{R})$. Bovendien steunen de constructies van

Young op expliciete parabolische deelgroepen binnen $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ en gecontroleerde omzettingen van woorden ertussen. Daarom voeren we nu een constructie in die meer voorbeelden levert dan enkel de blokmatrixgroepen horende bij deelvlaggen van de standaardvlag.

Laat $\{b_1, \dots, b_n\}$ de standaardbasis in \mathbb{R}^n zijn. Voor iedere deelverzameling indices $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ definiëren we de deelvectorruimte

$$\mathbb{R}^S = \langle b_i \mid i \in S \rangle.$$

Vervolgens noemen we $\mathrm{SL}(S, \mathbb{R})$ de deelgroep van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ die op \mathbb{R}^S werkt als $\mathrm{SL}(|S|, \mathbb{R})$ en die de overige basisvectoren b_i met $i \notin S$ fixeert. Op dezelfde manier definiëren we $\mathrm{SL}(S, \mathbb{Z})$.

Voor disjuncte deelverzamelingen $S_1, \dots, S_k \subseteq \{1, \dots, n\}$ met $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$ definiëren we tot slot de parabolische deelgroep $U(S_1, \dots, S_k)$ van $\mathrm{SL}(S, \mathbb{Z})$ als de stabilisator van de vlag

$$\{0\} \subset \mathbb{R}^{S_1} \subset \mathbb{R}^{S_1 \cup S_2} \subset \dots \subset \mathbb{R}^S \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Als de S_i bestaan uit alle indices opeenvolgend in oplopende volgorde, dan bestaat deze deelgroep precies uit de blokmatrices van de vorm zoals hierboven beschreven. De groep $U(\{1\}, \{2, 3\})$ bijvoorbeeld bevat precies die matrices die de deelruimte $(\mathbb{R}, 0, 0)^\top$ van \mathbb{R}^3 bewaren, dus van de vorm

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

We noteren in dat geval ook kortweg $U(|S_1|, \dots, |S_k|)$, zodat het voorbeeld hierboven $U(1, 2)$ is. Merk op dat $|S_i|$ dan net de grootte van het i -de blok op de diagonaal voorstelt.

Op het einde van hoofdstuk 2.1 werd de notie van een parabolische deelgroep voor een variëteit al geschetst als de stabilisator van een punt op oneindig. In [Ebe97] wordt de correspondentie tussen vlaggen in \mathbb{R}^n en punten op oneindig voor $\mathcal{E} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ (en dus tussen de beide noties van parabolische deelgroepen) als volgt uit de doeken gedaan. Wij hebben geen precieze definitie gegeven voor de structuur op oneindig en volgende paragrafen zijn dan ook niet bijzonder rigoreus, maar schetsen wel hoe (meetkundige) horoballen in \mathcal{E} overeenkomen met (algebraïsche) parabolische deelgroepen. Voor details verwijzen we naar [Ebe97].

Een punt op oneindig $x \in \mathcal{E}(\infty)$ is op te vatten als de limiet van een geodetische straal van de vorm

$$\gamma_v(t) = \exp(tv) \mathrm{SO}(n, \mathbb{R}),$$

met v een uniek bepaalde eenheidsvector in \mathfrak{p} , de ruimte van symmetrische spoorloze matrices. Elk punt op oneindig correspondeert zo met één raakvector v . De verschillende eigenwaarden van v noteren we als $\{\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_k(x)\}$, zodanig geordend dat $\lambda_1(x) > \lambda_2(x) > \dots > \lambda_k(x)$. Noteer de eigenruimte bij $\lambda_j(x)$ in \mathbb{R}^n als $E_j(x)$ en definieer

$$V_j(x) = \bigoplus_{1 \leq i \leq j} E_i(x).$$

Dit associeert aan elk punt x op oneindig een uniek bepaalde vector van eigenwaarden en een vlag $\{0\} \subset V_1(x) \subset V_2(x) \subset \dots \subset V_k(x) = \mathbb{R}^n$ met de volgende eigenschappen:

- $\lambda_1(x) > \lambda_2(x) > \dots > \lambda_k(x)$;
- $\sum_{i=1}^k m_i \lambda_i(x) = 0$, waarin $m_i = \dim V_i(x) - \dim V_{i-1}(x)$;
- $\sum_{i=1}^k m_i \lambda_i^2(x) = 1$.

De tweede eigenschap drukt uit dat v spoor nul heeft en de derde dat v norm één heeft. Omgekeerd kan men ook aan ieder eigenwaarden-vlag-koppel met deze drie eigenschappen een uniek punt op oneindig associëren. Bovendien wordt deze correspondentie bewaard onder de actie van $SL(n, \mathbb{R})$: als $(\lambda(x), V(x))$ het eigenwaarden-vlag-koppel is horende bij x , dan is $(\lambda(x), g(V(x)))$ het koppel bij $g(x)$ voor elke $g \in SL(n, \mathbb{R})$. Met andere woorden, $\lambda(g(x)) = \lambda(x)$ en $V(g(x)) = g(V(x))$.

Nogmaals, we verwijzen naar [Ebe97] voor details, maar nu mag het geen verrassing meer zijn dat meetkundige parabolische deelgroepen (als stabilisator van een punt op oneindig) corresponderen met algebraïsche parabolische deelgroepen (als stabilisatoren van een vlag).

5

Reductietheorie

De wortels van reductietheorie liggen in de studie van kwadratische vormen, en de bedoeling is om acties van discrete groepen te bestuderen aan de hand van geschikte fundamentealgebieden. Voor discrete deelgroepen $\Gamma \leq G$ met de linkse vermenigvuldiging als actie, komt de “reductie” neer op vermenigvuldiging met een goedgekozen $\gamma \in \Gamma$, in de hoop γg zo eenvoudig mogelijk te krijgen (namelijk binnen een gecontroleerd fundamentealgebied).

5.1 Iwasawadecompositie

Definitie 5.1 (K, A, N). Beschouw volgende deelgroepen van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$:

- $K = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, de groep van orthogonale matrices met determinant 1;
- $A =$ de groep van diagonaalmatrices met positieve entries en determinant 1;
- $N =$ de unipotente groep van bovendriehoeksmatrices met 1 op de diagonaal.

Deze specifieke deelgroepen zullen concreet van belang blijken in de Iwasawadecompositie, en ook de definitie van een Siegelverzameling motiveren. We zullen deze en een gerelateerde decompositie rechtstreeks bewijzen voor $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, ook al is de achterliggende theorie toepasbaar op algemenere semisimpele Liegroepen.

Stelling 5.2 (Cartandecompositie). Elk element $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ is te schrijven als $g = k \cdot a \cdot k'$, met $k, k' \in K$ en $a \in A$. Dit geeft de *Cartandecompositie* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{KAK}$.

Bewijs. Omdat $g^\top g$ positief-definiet en symmetrisch is, heeft die een unieke positief-definiete vierkantswortel p (waarvoor dus $p^2 = g^\top g$), die bovendien symmetrisch is. Definieer nu $k = g \cdot p^{-1}$. Dan is duidelijk $g = k \cdot p$, en steunend op de symmetrie van p blijkt k orthogonaal, want

$$k \cdot k^\top = gp^{-1} \cdot p^{-\top} g^\top = gp^{-2} g^\top = g(g^{-1} g^{-\top}) g^\top = e.$$

Omdat $\det k = (\det p)^{-1} > 0$ zien we alvast dat $k \in K$.

Symmetrische matrices zijn precies die matrices diagonaliseerbaar via een orthogonale matrix. Dit betekent dat we $p = k' \cdot a \cdot k'^{-1}$ kunnen schrijven, met k' orthogonaal en a een diagonaalmatrix. Bemerk dat $a \in A$ aangezien a dezelfde positieve eigenwaarden en determinant als p moet hebben. Bovendien kunnen we garanderen dat $\det k = 1$ door eventueel twee elementen op de diagonaal van A van plaats te wisselen. Samen is dus $g = k \cdot p = (kk') \cdot a \cdot k'^{-1} \in \mathrm{KAK}$. ■

Stelling 5.3 (Iwasawadecompositie). Elk element $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ is op unieke wijze te schrijven als $g = k \cdot a \cdot u$, met $k \in K$, $a \in A$ en $u \in N$. Dit geeft de *Iwasawadecompositie* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{KAN}$.

Bewijs. De QR-decompositie geeft een unieke ontbinding $g = k \cdot r$ met k een orthogonale matrix (dus $\det k = \pm 1$) en r een bovendriehoeksmatrix met positieve diagonaalelementen ($\det r > 0$). Aangezien $\det g = 1$ moet dan ook $\det k = \det r = 1$, of met andere woorden $k \in K$.

Door vervolgens elke rij van r te delen door het corresponderende diagonaalelement, kunnen we een diagonaalmatrix met positieve elementen vooropzetten en $r = a \cdot u$ schrijven. Opnieuw via de determinant moet $a \in A$ en $u \in N$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \bullet & \bullet \\ \vdots & a_2 & & \bullet \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & a_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \bullet/a_1 & \bullet/a_1 \\ \vdots & 1 & & \bullet/a_2 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

De uniciteit volgt uit die van de QR-decompositie, of uit het feit dat $K \cap AN = A \cap N = \{e\}$. ■

In feite kan men aantonen dat de componenten (k, a, u) van de Iwasawadecompositie op differentieerbare wijze afhangen van g , zodat de afbeelding $K \times A \times N \rightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) : (k, a, u) \mapsto k \cdot a \cdot u$ een diffeomorfisme is tussen Riemannvariëteiten (als deelstructuren van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$).

Merk op dat voor ieder element $au \in AN$ geldt dat $au = (aua^{-1}) \cdot a \in NA$, zodat ook $G = KNA$. Bovendien, door de Iwasawadecompositie van elementen g^{-1} te bekijken, is $G = NAK = ANK$. Een oefening in [Mor15] vraagt echter om aan te tonen dat $G \neq NKA$.

Voor algemene semisimpele Liegroepen worden deze composities gevonden op Lie-algebranimeau. We zijn de Cartandecompositie $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ voor symmetrische paren in definitie 2.25 reeds tegengekomen; de Liecorrespondentie maakt hier een algemene decompositie $G = KP$ op Liegroepniveau van. Merk inderdaad op dat we g hebben geschreven als $g = kp \in KP$ met $P \leq \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ de concrete deelgroep van positief-definiete matrices, waarvan de Lie-algebra \mathfrak{p} is.

Een verfijning wordt gegeven door \mathfrak{p} nogmaals op te splitsen in een maximale abelse deelalgebra \mathfrak{a} en een zekere nilpotente deelalgebra \mathfrak{n} , wat de Iwasawadecompositie op Lie-algebranimeau geeft.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

Hierna kan men terug afzakken naar het Liegroepniveau om een compacte deelgroep K , een abelse deelgroep A , en een nilpotente deelgroep N te bekomen. Voor $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ resulteert dit precies in de concrete decompositie die wij expliciet aangetoond hebben.

5.2 Reductie via Siegelverzamelingen

5.2.1 Siegelverzamelingen

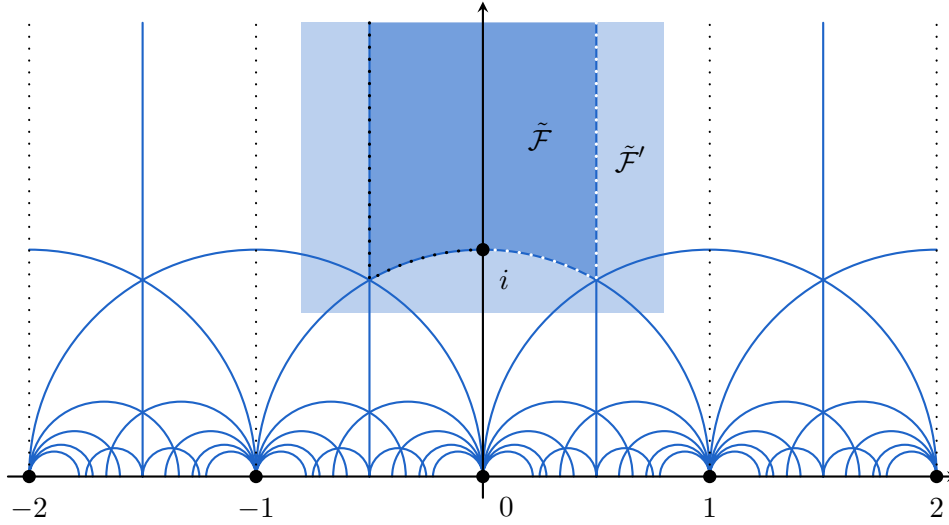
Het is welbekend dat $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ een boeiende actie heeft op het complexe halfvlak $\mathfrak{H} = \{a + bi \mid b > 0\} \subseteq \mathbb{C}$ uitgerust met een hyperbolische metriek, die bovendien deze metriek bewaart, via

$$\rho : \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H} : \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Voor de eenvoud noteren we de actie via functienotatie, i.e. we schrijven kortweg $g(z)$ voor $\rho(g, z)$. We kunnen hier niet dieper op deze boeiende theorie ingaan maar vermelden enkel het klassieke fundamenteaalgebied $\tilde{\mathcal{F}}$, ter motivatie van de Siegelverzamelingen verderop.

$$\tilde{\mathcal{F}} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1, |\mathrm{Re}(z)| < \frac{1}{2} \right\} \cup (\text{deel van de rand}).$$

De exacte keuze van de rand varieert doorheen de literatuur, maar een goede keuze is bijvoorbeeld de rand van de linkerhelft van dit gebied, tot en met het punt i .



Uit $\tilde{\mathcal{F}}$ kunnen we eenvoudig een fundamentealgebied voor Γ in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ definiëren.

Lemma 5.4. Zij H en Γ een gesloten en discrete deelgroep van G , respectievelijk, en $\tilde{\mathcal{F}}$ een strikt fundamentealgebied voor de actie van Γ op G/H . Kies een $xH \in G/H$ vast. Dan is

$$\mathcal{F} = \{g \in G \mid g \cdot xH \in \tilde{\mathcal{F}}\}$$

een strikt fundamentealgebied voor Γ in G .

Bewijs. Het gegeven leert dat $\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \Gamma \backslash G/H : fH \mapsto \Gamma fH$ een bijectie is, of met andere woorden, dat elk element $gH \in G/H$ op unieke manier te schrijven is als $\gamma \cdot fH$ met $\gamma \in \Gamma$ en $fH \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Beschouw nu $g \in G$ willekeurig. Dan is gxH een element van G/H , en de voorgaande opmerking leert dat $gxH = \gamma \cdot fH$ voor uniek bepaalde $\gamma \in \Gamma$ en $fH \in \tilde{\mathcal{F}}$. Merk op dat dan $\gamma^{-1}g \in \mathcal{F}$. We vinden dus dat $g = \gamma \cdot (\gamma^{-1}g)$ op unieke manier te schrijven is als product van een element van Γ met een element van \mathcal{F} , wat het gestelde bewijst. ■

Gevolg 5.5. $\mathcal{F} = \{g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \mid g(i) \in \tilde{\mathcal{F}}\}$ is een fundamentealgebied voor Γ in G .

Bewijs. We passen vorig lemma toe met H gelijk aan de stabilisator van een punt (dat we willekeurig kunnen kiezen omdat $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ transitief werkt op \mathfrak{H}), en kiezen voor de stabilisator van het punt i . Een eenvoudige berekening leert dat

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (i) = \frac{ai + b}{ci + d} = i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = d; \\ b = -c. \end{cases}$$

De determinant betekent dat $a^2 + b^2 = 1$, zodat $a = \cos(\psi)$ en $b = \sin(\psi)$ voor een zekere hoek ψ . We vinden dus precies de speciale orthogonale groep $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ terug. Dit geeft een identificatie

$$\mathfrak{H} \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}),$$

en het gestelde volgt uit het bovenstaande lemma. ■

Helaas is de vorm van $\tilde{\mathcal{F}}$ niet heel triviaal, door het boogvormige gedeelte onderaan. De fundamentealgebieden worden bovendien veel ingewikkelder als we kijken naar veralgemeningen $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ voor $n > 2$. Daarom is het handig te kijken naar een ruw fundamentealgebied (cf. definitie 1.31),

dat we verkrijgen door $\tilde{\mathcal{F}}$ een beetje uit te breiden tot een rechthoekig gebied $\tilde{\mathcal{F}}'$ zoals op de figuur. Het voordeel is dat deze veel eenvoudiger gedefinieerd en veralgemeend kan worden;

$$\tilde{\mathcal{F}}' = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid c_1 \leq \operatorname{Im}(z), c_2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq c_3 \right\},$$

voor geschikte reële constanten c_1, c_2 en c_3 . Merk op dat een “optimale” keuze van de constanten gegeven wordt door $c_1 = \sqrt{3}/2$ en $c_2 = c_3 = 1/2$. Op dezelfde manier als in gevolg 5.5 kunnen we hieruit een corresponderend ruw fundamenteelgebied \mathcal{F}' voor Γ in G definiëren.

Via de Iwasawadecompositie van $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ kunnen we \mathcal{F}' vrij eenvoudig beschrijven. Definieer

- $A_{c_1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid 0 < a, c_1 \leq a^2 \right\} \subseteq A$;
- $N_{c_2, c_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c_2 \leq u \leq c_3 \right\} \subseteq N$.

We kunnen de symmetrie benutten om $c_2 = c_3$ te kiezen, ook in het algemene geval, en dan noteren we gewoon N_{c_2} in plaats van N_{c_2, c_3} .

Lemma 5.6. We kunnen $\mathcal{F}' = \{g \in G \mid g(i) \in \tilde{\mathcal{F}}'\}$ beschrijven als $\mathcal{F}' = N_{c_2, c_3} A_{c_1} K$.

Bewijs. Gebruik de Iwasawadecompositie $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R}) = \operatorname{NAK}$ om een willekeurige matrix $g \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ te schrijven als

$$g = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix},$$

en zoals nagerekend in het voorgaande lemma wordt het punt i gestabiliseerd door de laatste factor. Alles samen wordt de actie van g op het punt i eenvoudigweg gegeven door $g(i) = a^2 i + u$, zodat $g \in \mathcal{F}'$ precies wanneer $0 < a, c_1 \leq a^2$ en $c_2 \leq u \leq c_3$. ■

We veralgemenen deze ideeën nu naar algemene $\operatorname{SL}(n, \mathbb{R})$. Het enige verschil dat we doorvoeren, is dat we zullen steunen op de decompositie KAN in plaats van NAK , zodat ook de precieze rol van de constante c_1 wijzigt.

Definitie 5.7 (Siegelverzamelingen). Beschouw de decompositie $\operatorname{SL}(n, \mathbb{R}) = \operatorname{KAN}$ en definieer

- $A_{c_1} =$ alle matrices $a = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n) \in A$ met $a_i \leq c_1 \cdot a_{i+1}$ voor alle $1 \leq i < n$;
- $N_{c_2, c_3} =$ alle matrices $u \in N$ met $c_2 \leq u_{i,j} \leq c_3$ voor alle $1 \leq i < j \leq n$.

Dan noemen we de verzameling $\mathcal{S}_{c_1, c_2, c_3} = K A_{c_1} N_{c_2, c_3}$ een *Siegelverzameling* voor $\operatorname{SL}(n, \mathbb{R})$.

Ook hier geldt de afspraak dat we gewoon twee parameters schrijven bij \mathcal{S} als we $c_2 = c_3$ kiezen.

Daar $G = \operatorname{KAN} = \operatorname{KNA} = \operatorname{NAK} = \operatorname{ANK}$ zijn er in de literatuur variaties te vinden die de volgorde van de componenten omwisselen. Dan wijzigt ook de betekenis van de constanten mee. Beschouw bijvoorbeeld alternatief

$$\mathcal{S}'_{c_1, c_2, c_3} = N_{c_2, c_3} A_{c_1} K$$

zoals in [Mor15]. Willen we dat elk element $g = uak = k'a'u'$ in \mathcal{S}' (met k', a', u' de inversen van de KAN -componenten van g^{-1}) in \mathcal{S} zit voor onze definitie, dan moet $a'_i \leq c_1 \cdot a'_{i+1}$. Merk op dat $a'_i = a_i^{-1}$. We moeten dus de voorwaarde $a_{i+1} \leq c_1 \cdot a_i$ vooropstellen in een definitie van A'_{c_1} om equivalente Siegelverzamelingen te verkrijgen. Bepaalde bronnen definiëren de verzameling A_{c_1} anders omdat daar een andere volgorde in de Iwasawadecompositie gehanteerd wordt.

Het doel van de volgende paragrafen is om aan te tonen dat Siegelverzamelingen ook voor $n > 2$ handige ruwe fundamentealgebieden vormen. In het bijzonder zullen we expliciet aantonen dat

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{S}_{\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}} \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}),$$

en dat Siegelverzamelingen een eindig volume hebben. Dit is wegens lemma 1.35 voldoende om te besluiten dat $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ een rooster is in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

5.2.2 Roosters in \mathbb{R}^n

In eerste instantie hebben we hiervoor enkele resultaten over roosters in de vectorruimte \mathbb{R}^n nodig. We kunnen zulke roosters makkelijk construeren door alle \mathbb{Z} -lineaire combinaties van de vectoren in een vastgekozen basis te beschouwen; het volgende lemma stelt dit de enige mogelijkheden zijn.

Lemma 5.8. Veronderstel dat L een rooster is in \mathbb{R}^n . Dan bestaat er een basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ van \mathbb{R}^n zodat L precies de \mathbb{Z} -lineaire span van \mathcal{B} is, i.e. $L = \mathbb{Z}v_1 + \dots + \mathbb{Z}v_n$.

Bewijs. Beschouw de \mathbb{R} -lineaire span van L en noem deze W . Merk op dat W een deelvectorruimte van \mathbb{R}^n is en dat het quotiënt \mathbb{R}^n/W een eindig volume heeft. Dit kan enkel als $\dim(\mathbb{R}^n/W) = 0$, zodat $W = \mathbb{R}^n$. Dit laat ons toe om een basis \mathcal{B} van \mathbb{R}^n te kiezen die volledig in L bevat zit.

Noem L' de \mathbb{Z} -lineaire span van \mathcal{B} . Dan is L' enerzijds bevat in L en anderzijds een rooster in \mathbb{R}^n . Hieruit volgt dat L/L' eindig is en L dus eindig voortgebracht en torsievrij. Volgens de structuurstelling is L een vrije abelse groep op een eindig aantal (zegge k) generatoren. Omdat L' eindige index heeft in L en zelf een vrije abelse groep is op n generatoren, moet $k = n$.

Het resultaat volgt nu omdat de n generatoren voor L zelf ook een basis vormen; de \mathbb{R} -lineaire span deze n vectoren is immers de volledige vectorruimte \mathbb{R}^n . ■

Merk in bovenstaand bewijs op dat L niet noodzakelijk gelijk is aan het geconstrueerde rooster L' . Voor L het standaardrooster in \mathbb{R}^n bijvoorbeeld kunnen we namelijk ook een basis kiezen bestaande uit willekeurige gehele veelvouden $k\vec{e}_i$ van de standaardbasis, en hun \mathbb{Z} -lineaire span L' mist dan een heleboel punten van L . De enige garantie is dat L' een eindige index in L heeft.

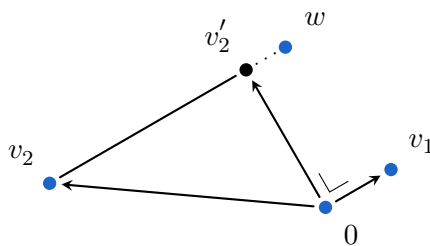
We noemen de gevonden basis een *integrale basis* voor L in \mathbb{R}^n . Vervolgens tonen we aan dat zo'n basis goed gekozen en geordend kan worden opdat enkele handige afschattingen gelden, na enkele opbouwende lemmata.

Lemma 5.9. Zij v_1 een vector met minimale norm in een rooster L in \mathbb{R}^n , en v_2 een willekeurige vector in $L \setminus \mathbb{Z}v_1$. Noem v'_2 de orthogonale projectie van v_2 op het orthogonaal complement van $\langle v_1 \rangle$. Dan geldt de afschatting

$$\|v'_2\| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \|v_1\|.$$

Bewijs. Schrijf $v_2 = v'_2 + \lambda v_1$ voor een zekere reële scalair λ en beschouw het unieke gehele getal κ zodanig dat $|\kappa - \lambda| < \frac{1}{2}$. De orthogonale projectie van de vector $w = v_2 - \kappa v_1$ op het orthogonaal

complement van $\langle v_1 \rangle$ is nog steeds gelijk aan v_2' (zodat in het bijzonder $w \neq 0$), en bovendien ligt w ook in L .



Merk op dat $w = v_2' - (\kappa - \lambda)v_1$, waarin v_2' en v_1 orthogonaal zijn. De norm van w is begrensd door die van v_1 , want v_1 is een vector met minimale norm. Hieruit volgt dat

$$\|v_1\|^2 \leq \|w\|^2 = \|v_2'\|^2 + |\kappa - \lambda|^2 \cdot \|v_1\|^2 \leq \|v_2'\|^2 + \frac{1}{4}\|v_1\|^2,$$

zodat inderdaad

$$\|v_2'\|^2 \geq \frac{3}{4}\|v_1\|^2. \quad \blacksquare$$

Lemma 5.10. Zij v_1 opnieuw een vector met minimale norm in een rooster L in \mathbb{R}^n . De orthogonale projectie L' van L op het orthogonale complement van $\langle v_1 \rangle$ is een rooster in \mathbb{R}^{n-1} .

Bewijs. L' is duidelijk een additieve deelgroep van \mathbb{R}^{n-1} , want projectie is een lineaire afbeelding.

Lemma 5.9 leert dat voor elke vector in $L \setminus \mathbb{Z}v_1$ de norm van diens projectie langs onder begrensd is, zodat we een bal rond de oorsprong in $\langle v_1 \rangle^\perp$ kunnen kiezen die met L' enkel de oorsprong gemeen heeft; een straal kleiner dan $\sqrt{3}/2$ werkt.

Tot slot is de projectie van een fundamenteelgebied van L een Borelverzameling met eindig volume, en het resultaat volgt uit lemma 1.35. \blacksquare

Stelling 5.11. Voor elk rooster L in \mathbb{R}^n bestaat een integrale basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ van L zodat

$$\|v_i'\| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\|v_{i-1}\|,$$

met v_i' de orthogonale projectie van v_i op het orthogonaal complement van $\langle v_1, \dots, v_{i-1} \rangle$.

Bewijs. Kies eerst een niet-nul vector $v_1 \in L$ met minimale norm. Mocht die een \mathbb{Z} -scalair veelvoud van een vector in L zijn, dan leert minimaliteit van de norm dat de scalair gelijk moet zijn aan ± 1 . Wegens lemma 5.8 is L isomorf met \mathbb{Z}^n . We construeren een integrale basis van L waar v_1 inzit door een isomorfisme $\phi : L \rightarrow \mathbb{Z}^n$ vast te nemen, dan $\{\phi(v_1)\}$ uit te breiden tot een integrale basis van \mathbb{Z}^n , en tot slot terug te keren naar L via ϕ^{-1} .

We gaan verder via inductie op n . Het geval $n = 2$ is juist lemma 5.9. Pas in het algemene geval de inductiehypothese toe op de projectie van L op het orthogonaal complement van $\langle v_1 \rangle$, wat een rooster L' geeft dankzij lemma 5.10: daar vinden we een integrale basis $\{v_2', \dots, v_n'\}$, die projecties van roosterelementen $\{v_2, \dots, v_n\}$ zijn en voldoen aan de gevraagde ongelijkheden voor $i \geq 3$.

Samen vormen $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ een integrale basis van L , en de ongelijkheden voor $i = 2$ volgen opnieuw uit lemma 5.9. \blacksquare

Waarom doen we al deze moeite om roosters in \mathbb{R}^n te bestuderen, als we eigenlijk willen aantonen dat $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$ een rooster in $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ is? De reden schuilt in de identificatie tussen zulke roosters en inverteerbare matrices, die we in hoofdstuk 4 beschreven hebben.

5.2.3 Siegelverzamelingen zijn ruwe fundamentealgebieden

De verzamelde informatie zullen we nu gebruiken om aan te tonen dat de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ -translaties van een Siegelverzameling met geschikte parameters, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ wel degelijk geheel bedekken. Eerst nog twee lemma's.

Lemma 5.12. Beschouw een element $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ en diens Iwasawadecompositie $g = k \cdot a \cdot u$. Noteer $\{v_1, \dots, v_n\}$ voor de n rijen van g , die een integrale basis voor $L(g)$ vormen. Met dezelfde notaties als in stelling 5.11 geldt dat de diagonaalentry a_i gelijk is aan $\|v'_i\|$.

Zonder bewijs. Dit volgt bijvoorbeeld uit een zorgvuldige analyse van het Gram–Schmidt proces, dat via iteratieve projecties de QR-decompositie van een matrix bepaalt. \blacksquare

Lemma 5.13. Voor elke $u \in \mathbb{N}$ bestaan er matrices $y \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ en $u' \in \mathbb{N}_{\frac{1}{2}}$ waarvoor $uy = u'$.

Bewijs. Via inductie. Voor het geval $n = 2$ zoeken we $k \in \mathbb{Z}$ en $u'_{1,2} \in [-1/2, 1/2]$ zodat

$$\begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u'_{1,2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en we zien dat we k eenvoudigweg kunnen kiezen als het gehele getal het dichtst bij $-u_{1,2}$ gelegen. Veronderstel voor het algemene geval $n > 2$ dat we inductief reeds de $(n - 1)$ onderste rijen van u' en y hebben kunnen invullen, zodat we enkel nog de bovenste rij zoeken;

$$\begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & 1 & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & k_{1,2} & k_{1,3} & \cdots & k_{1,n} \\ 0 & 1 & k_{2,3} & \cdots & k_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & k_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u'_{1,2} & u'_{1,3} & \cdots & u'_{1,n} \\ 0 & 1 & u'_{2,3} & \cdots & u'_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u'_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dit geeft als nog op te lossen vergelijkingen:

$$\begin{cases} u'_{1,2} = k_{1,2} + u_{1,2}; \\ u'_{1,3} = k_{1,3} + u_{1,2} k_{2,3} + u_{1,3}; \\ \vdots \\ u'_{1,n} = k_{1,n} + u_{1,2} k_{2,n} + \cdots + u_{1,n-1} k_{n-1,n} + u_{1,n}. \end{cases}$$

Merk op dat enkel de allereerste term in elk rechterlid nog onbekend is. We kunnen dan dezelfde strategie toepassen als voor $n = 2$: kies $k_{1,2}$ als het gehele getal het dichtst bij $-u_{1,2}$ gelegen, dan $k_{1,3}$ het dichtst bij $-u_{1,2} k_{2,3} - u_{1,3}$ gelegen, etc. De claim is duidelijk. \blacksquare

Stelling 5.14. Er geldt dat

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{S}_{\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}} \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}).$$

Bewijs. Beschouw een willekeurig element $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ en het geassocieerde rooster $L(g)$ in \mathbb{R}^n . Stelling 5.11 geeft een bepaalde basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ voor $L(g)$; definieer de matrix $x \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ als de overgangsmatrix van de rijen van g naar deze nieuwe basis. Dan heeft gx Iwasawadecompositie $k \cdot a \cdot u$, waarbij voor alle $1 \leq i < n$ geldt dat

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{\|v'_i\|}{\|v'_{i+1}\|} \leq \frac{\|v_i\|}{\|v_{i+1}\|} \leq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

via lemma 5.12 en de eigenschappen van de integrale basis die stelling 5.11 vooropstelt. Dit betekent dat alvast $a \in A_{c_1}$ met $c_1 = 2/\sqrt{3}$.

Schrijf vervolgens $uy = u' \in N_{\frac{1}{2}}$ zoals in lemma 5.13. Dan is alles samen

$$g = (kau') \cdot (xy)^{-1},$$

met kau' bevat in de Siegelverzameling $\mathcal{S}_{\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}}$ en met $(xy)^{-1}$ in $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$. ■

5.2.4 Siegelverzamelingen hebben eindig volume

Om te mogen besluiten dat $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$ een rooster is in $\text{SL}(n, \mathbb{R})$, dienen we enkel nog te bewijzen dat het volume van een Siegelverzameling (met parameters $c_1 \geq 2/\sqrt{3}$ en $c_2 = c_3 \geq 1/2$), eindig is. Hiervoor hebben we de Haarmaat op $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ nodig, uitgedrukt via de Iwasawadecompositie.

Lemma 5.15. Beschouw topologische groepen A en B , met Haarmaat μ_A en μ_B en modulaire functies Δ_A en Δ_B , respectievelijk. Dan geldt voor hun direct product $A \times B$ dat

$$\mu_{A \times B} = \mu_A \times \mu_B, \quad \Delta_{A \times B}(a, b) = \Delta_A(a) \cdot \Delta_B(b).$$

Bewijs. Men kan nagaan dat de productmaat $\mu_A \times \mu_B$ voldoet aan alle nodige eigenschappen van de Haarmaat op $A \times B$ en er dus mee samenvalt wegens uniciteit. Kies voor de modulaire functie vervolgens een specifieke verzameling $S = S_A \times S_B \subseteq A \times B$. Dan geldt dat

$$\Delta_{A \times B}(a, b) = \frac{\mu_{A \times B}(S \cdot (a, b)^{-1})}{\mu_{A \times B}(S)} = \frac{\mu_A(S_A \cdot a^{-1}) \cdot \mu_B(S_B \cdot b^{-1})}{\mu_A(S_A) \cdot \mu_B(S_B)} = \Delta_A(a) \cdot \Delta_B(b). \quad \blacksquare$$

Lemma 5.16. $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ is unimodulair.

Bewijs. Volgende afbeelding is een isomorfisme van topologische groepen:

$$\text{GL}(n, \mathbb{R})^+ \rightarrow \text{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+ : g \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt[n]{\det g}} g, \det g \right),$$

met $\text{GL}(n, \mathbb{R})^+$ de deelgroep van $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ bestaande uit alle matrices met positieve determinant. Het gevraagde volgt uit lemma 5.15, want \mathbb{R}^+ en $\text{GL}(n, \mathbb{R})^+$ zijn unimodulair (voorbeeld 1.27). ■

De Iwasawadecompositie induceert een morfisme $\text{SL}(n, \mathbb{R})/K \rightarrow \text{NA} = U(1, \dots, 1)$ met zowel $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ als K unimodulair. Na een diepere studie van eigenschappen van de Haarmaat kan men afleiden dat er dan een $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ -invariante maat op het quotiënt bestaat, die men kan overdragen naar een Haarmaat $d(va)$ op NA . Omdat N genormaliseerd wordt door A kan men hier vervolgens uit afleiden dat $d(va) = dv da$. Het ligt niet in de bedoeling van dit project om veel analytische eigenschappen van Haarmaat af te leiden, dus we vermelden slechts een schets van de berekening voor het volume van een Siegelverzameling.

Stelling 5.17. Een Siegelverzameling $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{c_1, c_2, c_3}$ heeft eindig volume in $G = \text{SL}(n, \mathbb{R})$.

Zonder bewijs. We schetsen de concrete berekeningen met de Haarmaat. Schrijf $g = kau = kva$ voor elke $g \in \mathcal{S}$, waarin $v = aua^{-1}$ opnieuw een bovendriehoeksmatrix is van de vorm

$$v = I + \sum_{i < j} \frac{a_i}{a_j} e_{ij}(u_{ij}).$$

Men kan aantonen dat, ten opzichte van deze Iwasawadecompositie $g = kau = kva$, de Haarmaat van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ gegeven wordt door $dg = dk dv da$, en dat vervolgens

$$dv = \prod_{i < j} dv_{ij} = \prod_{i < j} \frac{a_i}{a_j} du_{ij} \quad \text{en} \quad da = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{da_i}{a_i}.$$

Het volledige volume van \mathcal{S} wordt bijgevolg gegeven door de integraal

$$\mathrm{vol}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} dg = \left(\int_{\mathbb{K}} dk \right) \cdot \left(\int_{\frac{a_i}{a_{i+1}} \leq c_1} \left(\prod_{i < j} \frac{a_i}{a_j} \right) \frac{da_1}{a_1} \dots \frac{da_{n-1}}{a_{n-1}} \right) \cdot \left(\prod_{i < j} \int_{c_2 < u_{ij} < c_3} du_{ij} \right).$$

De eerste en derde integraal zijn alvast eindig, want er wordt geïntegreerd over compacte gebieden. Voor de middenste integraal biedt een coördinatentransformatie soelaas; stel namelijk

$$b_1 = \frac{a_1}{a_2}, \quad \dots, \quad b_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Dit geeft

$$\int_{\frac{a_i}{a_{i+1}} \leq c_1} \left(\prod_{i < j} \frac{a_i}{a_j} \right) \frac{da_1}{a_1} \dots \frac{da_{n-1}}{a_{n-1}} = \int_{b_i \leq c_1} b_1^{m_1} \dots b_{n-1}^{m_{n-1}} db_1 \dots db_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} \int_0^{c_1} b_i^{m_i} db_i$$

voor zekere natuurlijke getallen m_i . Ook deze integralen zijn eindig, dus het volledige volume van de Siegelverzameling $\mathcal{S}_{c_1, c_2, c_3}$ is dat eveneens. \blacksquare

5.2.5 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ is een (non-uniform) rooster in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$

We kunnen eindelijk besluiten:

Stelling 5.18. $\Gamma = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ is een rooster in $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$.

Bewijs. Dit volgt meteen uit stellingen 5.14 en 5.17, via lemma 1.35 (3). \blacksquare

Helaas is het quotiënt $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ niet compact, zoals volgend criterium duidelijk maakt.

Stelling 5.19 (criterium van Mahler). Een rij $(g_m)_m$ in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ heeft géén convergente deelrij als en slechts als een rij $(v_m \neq 0)_m$ in \mathbb{Z}^n bestaat zodat $g_m(v_m) \rightarrow 0$ voor $m \rightarrow \infty$.

Zonder bewijs. Zie bijvoorbeeld [Mor15]. \blacksquare

Pas Mahlers criterium toe op de rij van diagonaalmatrices $g_m = \mathrm{diag}(2^{-m}, 2^m, 1, \dots, 1)$ met bijhorende $v_m = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Deze rij heeft dus geen convergente deelrij en $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ is niet rijcompact, wat voor metrische ruimten hetzelfde betekent als compactheid.

5.3 Dieptefunctie

Kies opnieuw concreet de Siegelverzameling $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}}$ vast.

We volgen grotendeels de notaties uit het oorspronkelijke artikel van Young [You13], waar volgende quotiëntruimtes van $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ worden beschouwd:

$$\underbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})}{\Gamma} \setminus \underbrace{\frac{\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})}{G} / \frac{\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})}{K}}_{\mathcal{E}}}_{\mathcal{M}}$$

Overeenkomstig noteren we klassen van matrices ook expliciet als $[\bullet]_{\mathcal{E}}$ of $[\bullet]_{\mathcal{M}}$ indien beschouwd in \mathcal{E} of \mathcal{M} , respectievelijk. De Iwasawadecompositie $G = \mathrm{KAN} = \mathrm{KNA}$ en Siegelverzameling \mathcal{S} leveren via de in het vorige hoofdstuk afgeleide resultaten een verzameling

$$\mathcal{S}' = [\mathcal{S}]_{\mathcal{E}} = \left[\mathrm{N}_{\frac{1}{2}} \mathrm{A}_{\frac{2}{\sqrt{3}}} \right]_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E},$$

waarvoor $\Gamma \mathcal{S}' = \mathcal{E}$ en er slechts eindig veel elementen $\gamma \in \Gamma$ bestaan met $\gamma \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}' \neq \emptyset$. We blijven de projectie \mathcal{S}' van \mathcal{S} in \mathcal{E} evenwel als \mathcal{S} noteren, en de verzamelingen $\mathrm{N}_{1/2}$ en $\mathrm{A}_{2/\sqrt{3}}$ schrijven we kortweg N^+ en A^+ . Young steunt op het feit dat \mathcal{M} Hausdorffequivalent is met A^+ onder de overgeërfdde afstand vanuit G , waarmee bedoeld wordt dat de afstanden tussen overeenkomstige paren van elementen slechts een begrensde hoeveelheid schelen.

Young beweert zonder verdere uitleg dat de geïnduceerde afstand op A^+ gegeven wordt door

$$d_{\mathrm{A}}(\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n), \mathrm{diag}(a'_1, \dots, a'_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \log \frac{a'_i}{a_i} \right|^2}.$$

Dit eerste lemma toont aan dat de inclusie $\mathrm{A}^+ \hookrightarrow \mathcal{S}$ een Hausdorffequivalentie is.

Lemma 5.20. (1) Er bestaat een constante $c \in \mathbb{R}^+$ zodat voor alle $u \in \mathrm{N}^+$ en $a \in \mathrm{A}^+$ geldt dat

$$d_{\mathcal{E}}([ua]_{\mathcal{E}}, [a]_{\mathcal{E}}) \leq c.$$

(2) Voor alle $x \in \mathcal{S}$ geldt dat $d_{\mathcal{E}}(x, [\mathrm{A}^+]_{\mathcal{E}}) \leq c$.

(3) Voor alle $a, a' \in \mathrm{A}^+$ geldt dat $d_{\mathrm{A}}(a, a') = d_{\mathcal{S}}(a, a')$.

Zonder bewijs. In [You13] merkt Young op dat $[ua]_{\mathcal{E}} = [a(a^{-1}ua)]_{\mathcal{E}}$, met $a^{-1}ua \in \mathrm{N}$. Daarnaast is

$$\|a^{-1}ua\|_{\infty} \leq (2/\sqrt{3})^n,$$

zodat

$$d_{\mathcal{E}}([ua]_{\mathcal{E}}, [a]_{\mathcal{E}}) \leq d_G(I, a^{-1}ua)$$

onafhankelijk van $[ua]_{\mathcal{E}}$ begrensd kan worden. Eigenschap (2) volgt rechtstreeks uit (1). Voor (3) ten slotte, is enerzijds duidelijk $d_{\mathrm{A}}(x, y) \geq d_{\mathcal{S}}(x, y)$, aangezien $\mathrm{A}^+ \subset \mathcal{S}$ alvorens naar \mathcal{E} te projecteren. De omgekeerde ongelijkheid geldt daar de afbeelding $\mathcal{S} \rightarrow \mathrm{A}^+ : ua \mapsto a$ (met $u \in \mathrm{N}^+$ en $a \in \mathrm{A}^+$), afstandsverkleinend zou werken. \blacksquare

Siegel zelf vermoedde dat de quotiëntafbeelding $\mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ ook een Hausdorffequivalentie is, ofwel:

Lemma 5.21. Er bestaat een constante $c' \in \mathbb{R}^+$ zodat voor alle $x, y \in \mathcal{S}$ geldt dat

$$d_{\mathcal{E}}(x, y) - c' \leq d_{\mathcal{M}}([x]_{\mathcal{M}}, [y]_{\mathcal{M}}) \leq d_{\mathcal{E}}(x, y).$$

Zonder bewijs. We verwijzen net als Young naar de literatuur, zoals [Leu04]. ▣

De natuurlijke afbeelding $A^+ \rightarrow \mathcal{M}$ is dan ook een Hausdorffequivalentie, want deze is precies de samenstelling van $A^+ \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$.

Omdat \mathcal{S} een ruwe fundamenteaalverzameling is, kan elk punt $x \in \mathcal{E}$ geschreven worden als $[\gamma ua]_{\mathcal{E}}$ voor zekere $\gamma \in \Gamma$, $u \in \mathbb{N}^+$ en $a \in A^+$. Zo'n schrijfwijze is niet noodzakelijk uniek, maar de voorgaande resultaten impliceren dat de componenten van verschillende decomposities van eenzelfde element op begrensde afstand liggen, zoals we nu narekenen.

Gevolg 5.22. Er bestaat een constante $c'' \in \mathbb{R}^+$ zodat voor alle $x, y \in \mathcal{M}$, $u, u' \in \mathbb{N}^+$ en $a, a' \in A^+$ met $x = [ua]_{\mathcal{M}}$ en $y = [u'a']_{\mathcal{M}}$ geldt dat

$$|d_{\mathcal{M}}(x, y) - d_{\mathbb{A}}(a, a')| \leq c''.$$

In het bijzonder volgt dat als $[\gamma ua]_{\mathcal{E}} = [\gamma' u'a']_{\mathcal{E}}$ voor zekere $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, dat dan $d_{\mathbb{A}}(a, a') \leq c''$.

Bewijs. Wegens lemma 5.20 is

$$d_{\mathcal{M}}(x, [a]_{\mathcal{M}}) \leq d_{\mathcal{E}}([ua]_{\mathcal{E}}, [a]_{\mathcal{E}}) \leq c,$$

en op dezelfde manier is $d_{\mathcal{M}}(y, [a']_{\mathcal{M}}) \leq c$. Via de driehoeksongelijkheid is dan

$$d_{\mathcal{M}}(x, y) - 2c \leq d_{\mathcal{M}}([a]_{\mathcal{M}}, [a']_{\mathcal{M}}) \leq d_{\mathcal{M}}(x, y) + 2c.$$

Bovendien is wegens lemma 5.21

$$d_{\mathbb{A}}(a, a') - c' = d_{\mathcal{S}}(a, a') - c' \leq d_{\mathcal{M}}([a]_{\mathcal{M}}, [a']_{\mathcal{M}}) \leq d_{\mathbb{A}}(a, a').$$

Kies nu $c'' = c' + 2c$. ▣

De gevonden resultaten kunnen we gebruiken om enkele functies vast te leggen, die op een begrensde hoeveelheid na goedgedefinieerd zijn.

Definitie 5.23. Noteer ρ voor een afbeelding $\rho : \mathcal{E} \rightarrow \Gamma$ met de eigenschappen dat $\rho(s) = I$ voor alle $s \in \mathcal{S}$ en $x \in \rho(x)\mathcal{S}$ voor alle $x \in \mathcal{E}$. Zo'n afbeelding bestaat omdat $\Gamma\mathcal{S} = \mathcal{E}$ en is weliswaar niet uniek bepaald, maar elk element $x \in \mathcal{E}$ is wel op unieke manier te schrijven als $x = [\rho(x)ua]_{\mathcal{E}}$ voor zekere $u \in \mathbb{N}^+$ en $a \in A^+$.

Noteer vervolgens ϕ voor de afbeelding $\phi : \mathcal{E} \rightarrow A^+ : x = [\rho(x)ua]_{\mathcal{E}} \mapsto a$. Merk op dat ϕ evenmin uniek bepaald is, maar door de voorgaande stelling doet de precieze keuze van ρ er niet veel toe: het effect op ϕ is begrensd door een absolute additieve constante.

Definitie 5.24 (dieptefunctie). De *dieptefunctie* r is de afbeelding

$$r : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto d_{\mathcal{M}}([x]_{\mathcal{M}}, [I]_{\mathcal{M}}).$$

Merk op dat

$$r(x) \sim d_{\mathbb{A}}(\phi(x), [I]_{\mathbb{A}}) = \log \|\phi(x)\|_2.$$

We kunnen de gevonden afschattingen op de verschillende afstanden gebruiken om de dieptefunctie een rudimentaire meetkundige interpretatie te geven; we kunnen stellen dat de woordmetriek d_{Γ} tussen twee punten $\rho(x)$ en $\rho(y)$ benaderd wordt door de afstand tussen x en y in \mathcal{E} , maar dat we een meer vertekend beeld krijgen naarmate we dieper kijken in \mathcal{M} (i.e. verder van $[I]_{\mathcal{M}}$):

Stelling 5.25. Er bestaat een constante $c \in \mathbb{R}^+$ zodat voor alle $x, y \in \mathcal{E}$ geldt dat

$$d_{\Gamma}(\rho(x), \rho(y)) \leq c(d_{\mathcal{E}}(x, y) + r(x) + r(y)) + c.$$

Bewijs. Lemma 5.21 levert een constante c' waarvoor $d_{\mathcal{E}}([\rho(x)]_{\mathcal{E}}, x) \leq r(x) + c'$, en idem voor y , zodat

$$d_{\mathcal{E}}([\rho(x)]_{\mathcal{E}}, [\rho(y)]_{\mathcal{E}}) \leq r(x) + r(y) + d_{\mathcal{E}}(x, y) + 2c'.$$

Het resultaat volgt nu uit stelling 6.7. ■

Er zijn andere meetkundige interpretaties te associëren met de dieptefunctie. In het artikel [You13] beschrijft Young bijvoorbeeld hoe deze een interpretatie heeft op de identificatie tussen matrices in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ en unimodulaire roosters uit hoofdstuk 4.2.

Herinner je dat een matrix $x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ geïdentificeerd kan worden met een rooster $L(x)$ in \mathbb{R}^n door diens rijen op te vatten als een integrale basis. Een matrix in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ gaf zo aanleiding tot een unimodulair rooster met eenheidscovolume. Elementen in $\mathcal{E} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ kunnen we dus identificeren met unimodulaire roosters op rotatie in \mathbb{R}^n na.

Het eenheidselement $[I]_{\mathcal{E}}$ komt overeen met het standaardrooster \mathbb{Z}^n modulo rotatie, en elementen $x \in \mathcal{E}$ “in de buurt van $[I]_{\mathcal{E}}$ ” (met kleine diepte) komen overeen met “gelijkaardige” roosters. Als $r(x)$ daarentegen groot wordt, dan wordt het overeenkomstige rooster $L(x)$ onstabiel en heeft die “korte” vectoren. Een element y dat in de buurt ligt van zo'n x heeft dan eveneens korte vectoren, en deze bepalen een deelruimte van \mathbb{R}^n die bewaard moet worden onder $\rho(x)^{-1}\rho(y)$, wat betekent dat $\rho(x)^{-1}\rho(y)$ in een parabolische deelgroep $U(\bullet, n - \bullet)$ van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ moet liggen. Voor rigoreuze maar technische details verwijzen we naar [You13].

Hiermee kon Young aan de slag om aan te tonen dat er rond elk punt $x \in \mathcal{E}$ dat diep in \mathcal{M} ligt, een grote bal bestaat die onder ρ geheel wordt afgestuurd in eenzelfde nevenklasse van een parabolische deelgroep van Γ . Concreet:

Stelling 5.26. Er bestaat een constante $c' \in \mathbb{R}^+$ zodat volgende eigenschap geldt: voor alle $x \in \mathcal{E}$ met $r(x) > c'$, ligt het beeld $\rho(B)$ van de bal $B \subset \mathcal{E}$ met straal $r(x)/4n^2$ rond x , volledig bevat in de nevenklasse $gU(i, n - i)$ voor zekere $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ en $1 \leq i < n$.

Zonder bewijs. Zie [You13]. ▣

Deze stelling is van belang omdat ze zal toelaten om triangulaties in \mathcal{E} op te bouwen waarvan elke driehoek ofwel in de buurt van $[I]_{\mathcal{E}}$ ligt, ofwel in eenzelfde nevenklasse van een parabolische deelgroep. In het eerste geval zullen we de diameter absoluut kunnen begrenzen, in het tweede geval het probleem van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ naar zijn parabolische deelgroepen herleiden en inductief te werk gaan. Zie lemma 8.5.

6

Eigenschappen van de normaalvorm

Een aantal belangrijke constructies doorheen het bewijs van Young maken gebruik van zogenaamde *shortcuts*: een resultaat van Lubotzky, Mozes en Raghunathan stelt dat iedere transvectie $e_{ij}(k)$ in $SL(n, \mathbb{Z})$ (zie de definitie verderop) voor te stellen is door middel van een “kort” woord met lengte logaritmisches in k , mits $n \geq 3$. Dit resultaat zullen we hier expliciet bewijzen, zij het op een andere, concretere manier dan Lubotzky, Mozes en Raghunathan. Deze shortcuts gebruiken we vervolgens om een normaalvorm ω te definiëren, die elke matrix $g \in SL(n, \mathbb{Z})$ zal uitdrukken als een product van shortcutwoorden en bovendien enkele belangrijke deelgroepen van $g \in SL(n, \mathbb{Z})$ respecteert.

6.1 Steinbergpresentatie

Om over woorden in $SL(n, \mathbb{Z})$ te kunnen spreken, moeten we eerst beschikken over een presentatie van deze groep. Een zeer geschikte presentatie is de Steinbergpresentatie, die voor een algemenere klasse van algebraïsche groepen op te stellen is, maar voor de speciale lineaire groepen de concrete vorm aanneemt die we nu zullen beschrijven. De generatoren in deze presentatie zijn transvecties: matrices die slechts op één entry verschillen van de eenheidsmatrix.

Definitie 6.1 (transvecties). Voor alle $1 \leq i \neq j \leq n$ en $k \in \mathbb{Z}$ noteren we $e_{ij}(k) \in SL(n, \mathbb{Z})$ voor de eenheidsmatrix waarbij de (i, j) -de entry vervangen is door k . Zo'n element noemen we een *transvectie*. De *elementaire matrices* zijn de elementen $e_{ij}(1)$ en noteren we kortweg als e_{ij} .

Merk op dat $e_{ij}(k) = e_{ij}^k$.

Stelling 6.2 (Steinberg). Er geldt dat

$$SL(n, \mathbb{Z}) \cong \langle e_{ij} \mid [e_{ij}, e_{kl}] = I, [e_{ij}, e_{jk}] = e_{ik}, (e_{ij}e_{ji}^{-1}e_{ij})^4 = I \rangle,$$

met de generatoren geïndexeerd over alle $i \neq j$, de relaties $[e_{ij}, e_{kl}]$ over $i \neq l$ en $j \neq k$, de relaties $[e_{ij}, e_{jk}] = e_{ik}$ over $i \neq k$ en j , en de relaties $(e_{ij}e_{ji}^{-1}e_{ij})^4$ over i en j .

Zonder bewijs. Zie [Ste62]. ▀

Om woorden eenvoudiger te kunnen transformeren voegt Young aan de genererende verzameling van elementaire matrices ook de verzameling D van alle diagonaalmatrices toe. Merk op dat deze matrices in $SL(n, \mathbb{Z})$ enkel ± 1 op de diagonaal staan hebben en dus eindig zijn in aantal. Daarnaast moeten we relaties toevoegen die matrices in D uitdrukken als product van elementaire matrices, om een equivalente presentatie $SL(n, \mathbb{Z}) \cong \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R} \rangle$ te verkrijgen waarin $\mathcal{A} = \{e_{ij} \mid i \neq j\} \cup D$. Wat deze extra relaties juist zijn, is vrij irrelevant; de belangrijkste relaties zijn die van de originele Steinbergpresentatie.

Een eenvoudige maar belangrijke eigenschap van de Steinbergpresentatie en zijn modificatie is dat elke deelgroep $H = SL(m, \mathbb{Z})$ ingebed in $SL(n, \mathbb{Z})$ of elke parabolische deelgroep H bestaande uit bovendriehoeksblokmatrixes wordt voortgebracht door de restrictie van het alfabet tot H , of met andere woorden $H = \langle \mathcal{A} \cap H \rangle$. We kunnen voor zo'n deelgroepen dus zorgeloos spreken over de relatieve Dehnfuncties uit hoofdstuk 3.4.1.

In het volgende hoofdstuk gaan we eerst aan de slag om aan te tonen dat transvecties korte woorden toelaten zodra $n \geq 3$, alvorens daarna de normaalvorm ω te definiëren via deze shortcuts.

6.2 Shortcuts

In het bewijs dat shortcutwoorden voor transvecties bestaan, zullen we de gezochte woorden eerst construeren voor Fibonaccigetallen en daarna voor algemene getallen via de volgende stelling.

Stelling 6.3 (Zeckendorf). Elk natuurlijk getal kan op unieke wijze geschreven worden als een som van niet-openvolgende Fibonaccigetallen F_i ($i \geq 2$), de *Zeckendorfrepresentatie* genoemd.

Bewijs. We zullen enkel de existentie aantonen; uniciteit is niet veel moeilijker, maar ook niet van belang voor onze doeleinden, en we verwijzen dan ook naar de literatuur voor het volledige bewijs.

De uitspraak geldt triviaal voor $n \in \{1, 2, 3\}$. Onderstel inductief dat elke $i < n$ een Zeckendorfrepresentatie heeft. Als n zelf een Fibonaccigetal is, hoeven we niks te bewijzen; in het andere geval is $F_j < n < F_{j+1}$ voor zekere index j . Beschouw de Zeckendorfrepresentatie voor $m = n - F_j$. Omdat $m < F_{j+1} - F_j = F_{j-1}$ bevat deze representatie geen term F_{j-1} en blijkt n te ontbinden als F_j plus de representatie voor m . ■

Stelling 6.4. Een transvectie $e_{ij}(k) \in \text{SL}(n, \mathbb{Z})$, $n \geq 3$, kan worden gerepresenteerd door middel van een woord $w \in \mathcal{A}^*$ met lengte $\ell(w) = \mathcal{O}(\log |k|)$, dat we een *shortcut* voor $e_{ij}(k)$ noemen.

Bewijs. We bewijzen het geval $n = 3$; voor $n > 3$ volstaat het een kopie van $\text{SL}(3, \mathbb{Z})$ in $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$ te beschouwen door het alfabet adequaat te beperken. We mogen ook aannemen dat $k > 0$ omdat $e_{ij}(-k) = e_{ij}(k)^{-1}$, en dat $(i, j) = (1, 3)$ omdat bijvoorbeeld $e_{12}(k) = [e_{13}(k), e_{32}]$.

Beschouw eerst de gevallen met k een Fibonaccigetal, en maak onderscheid tussen even en oneven indices. We beweren dat de volgende woorden de transvecties $e_{13}(F_{2m})$ en $e_{13}(F_{2m+1})$ voorstellen.

$$\begin{aligned} w_{F_{2m}} &= (e_{23})^{-1} (e_{23}e_{32})^{-m} (e_{13})^{-1} (e_{23}e_{32})^m (e_{23})^{-1} (e_{23}e_{32})^{-m} (e_{13}) (e_{23}e_{32})^m (e_{23})^2; \\ w_{F_{2m+1}} &= (e_{23})^{-1} (e_{23}e_{32})^{-m} (e_{12})^{-1} (e_{23}e_{32})^m (e_{23})^{-1} (e_{23}e_{32})^{-m} (e_{12}) (e_{23}e_{32})^m (e_{23})^2. \end{aligned}$$

We zullen bij wijze van illustratie de tweede claim expliciet controleren; de eerste verloopt analogo of kan worden teruggevonden in [Ril05]. We rekenen uit van rechts naar links.

$$\begin{aligned} (e_{23})^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(e_{23}e_{32})^m} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & F_{2m+1} & F_{2m+3} \\ 0 & F_{2m} & F_{2m+2} \end{pmatrix} \xrightarrow{(e_{12})} \begin{pmatrix} 1 & F_{2m+1} & F_{2m+3} \\ 0 & F_{2m+1} & F_{2m+3} \\ 0 & F_{2m} & F_{2m+2} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{(e_{23}e_{32})^{-m}} \begin{pmatrix} 1 & F_{2m+1} & F_{2m+3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(e_{23})^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & F_{2m+1} & F_{2m+3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{(e_{23}e_{32})^m} \begin{pmatrix} 1 & F_{2m+1} & F_{2m+3} \\ 0 & F_{2m+1} & F_{2m+2} \\ 0 & F_{2m} & F_{2m+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{(e_{12})^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & F_{2m+1} \\ 0 & F_{2m+1} & F_{2m+2} \\ 0 & F_{2m} & F_{2m+1} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{(e_{23}e_{32})^{-m}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & F_{2m+1} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(e_{23})^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & F_{2m+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beschouw nu een willekeurig natuurlijk getal k en diens Zeckendorfrepresentatie

$$k = (F_{a_1} + F_{a_2} + \cdots + F_{a_A}) + (F_{b_1} + F_{b_2} + \cdots + F_{b_B}),$$

met $a_1 < a_2 < \cdots < a_A$ de even indices en $b_1 < b_2 < \cdots < b_B$ de oneven indices. Definieer m zodanig dat $\max(a_A, b_B)$ gelijk is aan $a_A = 2m$ of aan $b_B = 2m + 1$, en stel vervolgens

$$\begin{aligned} u_k &= x_m y_m (e_{23} e_{32}) \cdots x_2 y_2 (e_{23} e_{32}) x_1 y_1 (e_{23} e_{32}), \\ v_k &= x_m^{-1} y_m^{-1} (e_{23} e_{32}) \cdots x_2^{-1} y_2^{-1} (e_{23} e_{32}) x_1^{-1} y_1^{-1} (e_{23} e_{32}), \end{aligned}$$

waarin $x_i = e_{13}$ als $2i \in \{a_1, \dots, a_A\}$ en $y_i = e_{12}$ als $2i + 1 \in \{b_1, \dots, b_B\}$ (of het ledige woord anders). Tot slot stellen we

$$w_k = (e_{23})^{-1} (e_{23} e_{32})^{-m} v_k (e_{23})^{-1} (e_{23} e_{32})^{-m} u_k (e_{23})^2.$$

Merk op: voor een Fibonaccigetel k is de Zeckendorfrepresentatie uiterst eenvoudig en komt het aldus gedefinieerde woord w_k precies overeen met de eerdere voorgestelde woorden.

Een gecompliceerdere maar analoge berekening als voorheen toont aan dat w_k de transvectie $e_{13}(k)$ voorstelt. Opnieuw doen de factoren $(e_{23} e_{32})$ de Fibonaccigetallen in de rechteronderhoek telkens twee indices oplopen, maar het verschil is dat de tussenliggende factoren x_i en y_i er ondertussen de benodigde elementen uit filteren en optellen bij de eerste rij. De sommaties lopen over alle indices $i \in \{a_1, \dots, a_A\} \cup \{b_1, \dots, b_B\}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{u_k} \begin{pmatrix} 1 & \Sigma F_i & \Sigma F_{i+2} \\ 0 & F_{2m+1} & F_{2m+3} \\ 0 & F_{2m} & F_{2m+2} \end{pmatrix} \xrightarrow{(e_{23} e_{32})^{-m}} \begin{pmatrix} 1 & \Sigma F_i & \Sigma F_{i+2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{v_k (e_{23})^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Sigma (F_{i+2} - F_{i+1}) \\ 0 & F_{2m+1} & F_{2m+2} \\ 0 & F_{2m} & F_{2m+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{(e_{23})^{-1} (e_{23} e_{32})^{-m}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Sigma F_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De totale lengte van de vooropgestelde woorden wordt gegeven door $\ell(w_k) = 4 + 8m + 2A + 2B$. We kunnen dit afschatten via de formules van Binet, een expliciete formule voor Fibonaccigetallen steunend op de gulden snede $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$:

$$F_p = \frac{\varphi^p - (-\varphi)^{-p}}{\sqrt{5}}.$$

Dit betekent dat alle Fibonaccigetallen voldoen aan $F_p \geq (\varphi^p - 1)/\sqrt{5}$. Kiezen we in onze situatie $p = \max(a_A, b_B)$, dan is $F_p \leq k$, zodat $p \leq \log_\varphi(1 + k\sqrt{5})$. Samen met $A + B \leq p$ en $m \leq p/2$ volgt dan finaal dat

$$\ell(w_k) = 4 + 8m + 2A + 2B \leq 4 + 6p \leq 4 + 6 \log_\varphi(1 + k\sqrt{5}). \quad \blacksquare$$

De voorwaarde $n \geq 3$ is cruciaal voor voldoende bewegingsruimte in de voorgaande berekeningen; inderdaad, voor $n = 2$ bestaan er helemaal geen shortcuts meer.

Stelling 6.5. Een transvectie $e_{ij}(k) \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ kan *niet* worden voorgesteld door middel van een woord w met lengte $\ell(w) < k$.

Bewijs. Beschouw de canonieke projectie $\bullet : \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) / \{\pm I\} : m \mapsto \pm m$, die elk element van $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ met zijn tegengestelde identificeert. Het is welbekend dat $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ isomorf is met $C_2 * C_3 = \langle \bar{x}, \bar{y} \mid \bar{x}^2, \bar{y}^3 \rangle$, via

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Een rechtstreekse berekening leert dat $xy = e_{21}$ en $yx = (e_{12})^{-1}$, zodat $(xy)^k = e_{21}(k)$. Bovendien is $(\bar{x}\bar{y})^k$ met lengte $2k$ duidelijk het kortste woord in het vrij product $C_2 * C_3$ dat $\bar{e}_{21}(k)$ voorstelt, want er zijn geen vrije reducties mogelijk. Mocht nu een woord w in de Steinbergpresentatie met lengte kleiner dan k het element $e_{21}(k) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ voorstellen, dan is \bar{w} na “vertaling” een woord in $\bar{x}^{\pm 1}$ en $\bar{y}^{\pm 1}$ met lengte strikt kleiner dan $2k$ voor $\bar{e}_{21}(k)$, een strijdigheid. ■

Voor onze doeleindig is dit kleine geval niet zo problematisch: wanneer we $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ als ingebed in $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ of groter beschouwen, is het namelijk wel mogelijk om (binnen de grote groep) shortcuts te vinden, alleen hebben we dan ook elementaire matrices buiten $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ nodig. De normaalvorm die we verderop definiëren, zal toelaten dat generatoren buiten deze kleine deelgroepen treden.

6.3 Resultaten van Lubotzky–Mozes–Raghunathan

Merk op dat we in stelling 6.4 niet alle elementaire matrices gebruikten: controleer dat e_{31} en e_{21} nergens opduiken in het woord voor $e_{13}(k)$ en de gehele constructie dus plaatsvindt binnen $U(1, 2)$, of binnen $U(2, 1)$ als we alles hadden getransponeerd. Young argumenteert dat dit algemener geldt:

Stelling 6.6. Beschouw een transvectie $e_{ij}(k) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, $n \geq 3$. Kies een indexverzameling S met $|S| \geq 2$, $i \in S$ en $j \notin S$. Dan kan $e_{ij}(k)$ worden gerepresenteerd door middel van een shortcut met alle generatoren bevat in $U(S, \{j\})$.

Zonder bewijs. De auteur geeft in [You13] een beknopte constructie maar verwijst zelf naar [LMR93] voor meer details. ■

Eenmaal verzekerd van het bestaan van korte woorden voor transvecties, kan men vervolgens ook het bestaan van korte woorden voor willekeurige matrices afleiden.

Stelling 6.7 (Lubotzky–Mozes–Raghunathan). Zodra $n \geq 3$ is de woordmetriek op $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ Lipschitzequivalent met de restrictie van de Riemannmetriek op $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ tot $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$. Concreet bestaan er constanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ zodat voor alle $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ geldt dat

$$c_1 \cdot \log \|g\|_2 \leq \ell(g) \leq c_2 \cdot \log \|g\|_2.$$

Zonder bewijs. Zie [LMR93] voor een vrij abstract bewijs of [Ril05] voor een computationeel bewijs. Laatstnoemde geeft ook meer informatie over de constanten, zij het voor de (equivalente) matrix- ∞ -norm: voor de afschattingen

$$c_1 \cdot \log \|g\|_\infty \leq \ell(g) \leq c_2 \cdot \log \|g\|_\infty$$

kan men ten opzichte van de Steinbergpresentatie c_1 onafhankelijk van n kiezen, en bestaat er een constante c_3 onafhankelijk van n zodat $c_2 \leq c_3 \cdot n^n$. ■

Matrices $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, $n \geq 3$, zijn dus voor te stellen via woorden met lengte logaritmisch in $\|g\|_2$ en voor transvecties g lukt dat zelfs binnen een vaste parabolische deelgroep.

6.4 Normaalvorm ω

We willen nu shortcuts voor elementaire matrices en de stelling van Lubotsky–Mozes–Raghunathan gebruiken om een handige normaalvorm te definiëren, die op een gecontroleerde manier matrices in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ uitdrukt als woorden in de gemodificeerde Steinbergpresentatie. Shortcuts bestaan al voor $n = 3$; omdat er voor $n \geq 4$ meerdere manieren zijn om $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ in te bedden in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, voeren we eerst ook meerdere shortcuts voor eenzelfde woord in.

Beschouw een transvectie $e_{ij}(k)$ en beschouw een indexverzameling $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ met $|S| \geq 2$, $i \in S$ en $j \notin S$. Stelling 6.6 verzekert het bestaan van een woord in $U(S, \{j\})$ met logaritmische lengte in $|k|$; noem dit woord $\hat{e}_{ij,S}(k)$.

Over het algemeen maakt de precieze keuze van S niet veel uit, dus kunnen we voor elk paar (i, j) een index $d_{ij} \notin \{i, j\}$ kiezen en kortweg $\hat{e}_{ij}(k) = \hat{e}_{ij, \{i, d_{ij}\}}(k)$ noteren.

Definitie 6.8 (shortcutwoorden). Beschouw $H \leq \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$. We noemen een woord $w \in \mathcal{A}^*$ een *shortcutwoord in H* als w een product is van deelwoorden waarvan elk ofwel een diagonaalmatrix in H is, ofwel een shortcut $\hat{e}_{ij}(k)$ van een transvectie $e_{ij}(k) \in H$.

Merk op dat woorden in H meteen shortcutwoorden in H zijn (omdat elementaire matrices shortcuts voor zichzelf vormen) maar niet vice versa: shortcuts voor elementen van H kunnen immers buiten H treden en generatoren gebruiken die niet tot H behoren.

Stelling 6.9. Er bestaat een normaalvorm $\omega : \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{A}^*$ zodat

- voor elke matrix $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ geldt dat $\ell(\omega(g)) = \mathcal{O}(\ell(g))$;
- voor elke transvectie $e_{ij}(k)$ geldt dat $\omega(e_{ij}(k)) = \hat{e}_{ij}(k)$;
- voor elke bovendriehoeksblokmatrix $g \in U = U(s_1, \dots, s_k)$ geldt dat $\omega(g)$ een product is van een begrensd aantal shortcutwoorden in de diagonaalblokken van U , een begrensd aantal shortcuts van entries buiten de diagonaal, en hoogstens één diagonaalmatrix.

Bewijs. Kies $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ willekeurig. Als g een transvectie $e_{ij}(k)$ is, definiëren we $\omega(g) = \hat{e}_{ij}(k)$. Beschouw anders de unieke parabolische deelgroep $U = U(s_1, \dots, s_k)$ met minimale diagonaalblokken (i.e. met elke s_i zo klein mogelijk) die g bevat, en schrijf

$$g = \begin{pmatrix} m_1 & v_{12} & \cdots & v_{1k} \\ 0 & m_2 & \cdots & v_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_k \end{pmatrix} \cdot d,$$

waar d een diagonaalmatrix is met entries ± 1 , zodanig gekozen dat $\det m_i = 1$ voor alle $1 \leq i \leq k$. Als $U = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ is er slechts één blok, met $g = m_1$ en $d = I$. Noteer vervolgens

- $u(v_{ij}) \in U$ voor de blokmatrix overal gelijk aan I behalve in blok (i, j) , waar v_{ij} staat;
- $s(m_i) \in \mathrm{SL}(S_i, \mathbb{Z})$ voor de blokdiaagonaalmatrix overal gelijk aan I behalve in diagonaalblok (i, i) , waar m_i staat.

Dan kunnen we g als volgt schrijven als een product van $u(v_{ij})$'s en $s(m_i)$'s. Stel

$$\gamma_i = s(m_i) \cdot \prod_{j=1}^{i-1} u(v_{ij}),$$

dan volgt na een kleine controle dat $g = \gamma_k \cdots \gamma_1 \cdot d$. We behandelen nu deze componenten apart. Op $s(m_i)$ kunnen we rechtstreeks stelling 6.7 toepassen om een shortcutwoord in $\mathrm{SL}(S_i, \mathbb{Z})$ te vinden, dat we als $\hat{s}(m_i)$ noteren. Voor $u(v_{ij})$ schrijven we eerst

$$u(v_{ij}) = \prod_{\substack{a \in S_i \\ b \in S_j}} e_{ab}(k_{ab}),$$

met k_{ab} de entry op positie (a, b) , en dan ligt het voor de hand om $\hat{u}(v_{ij})$ te definiëren als

$$\hat{u}(v_{ij}) = \prod_{\substack{a \in S_i \\ b \in S_j}} \hat{e}_{ab}(k_{ab}).$$

Stellen we nu

$$\hat{\gamma}_i = \hat{s}(m_i) \cdot \prod_{j=1}^{i-1} \hat{u}(v_{ij}),$$

dan kunnen we tot slot $\omega(g) = \hat{\gamma}_k \cdots \hat{\gamma}_1 \cdot d$ definiëren. Het is duidelijk dat $\omega(g)$ een woord in \mathcal{A}^* is dat g voorstelt en bestaat uit één (mogelijks triviale) diagonaalmatrix, $k \leq n$ shortcutwoorden in de diagonaalblokken, en hoogstens $n(n-1)/2$ shortcuts in blokken buiten de diagonaal.

Ter voltooiing volgt de afschatting op de lengte van $\omega(g)$ bijvoorbeeld uit

$$\begin{aligned} \ell(\omega(g)) &\leq n \cdot \max \ell(\hat{s}(m_i)) + \frac{1}{2}n(n-1) \cdot \max \ell(\hat{e}_{ab}(k_{ab})) + 1 \\ &\leq \frac{1}{2}n(n+1)c \cdot \log \|g\|_\infty + 1, \end{aligned}$$

met zekere constante c , volgens de stelling van Lubotzsky–Mozes–Ragnunathan. Diezelfde stelling geeft tevens het gezochte resultaat, aangezien $\log \|g\|_\infty = \mathcal{O}(\ell(g))$. ■

6.5 Shortcuts manipuleren

We hebben in de constructie van ω shortcuts van transvecties gedefinieerd in een arbitrair gekozen maar vaste kopie van $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$. Voor het bewijs dat $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ voor $n \geq 5$ een kwadratische Dehn-functie heeft, toont Young aan dat shortcuts van eenzelfde woord in verschillende kopieën in elkaar om te vormen zijn via homotopieën met kwadratische oppervlakte. Concreet:

Stelling 6.10. Veronderstel dat $n \geq 5$ en beschouw een indexverzameling $S \subset \{1, \dots, n\}$ zodat $2 \leq |S| \leq n-2$, $i \in S$ en $j \notin S$. Dan is

$$\mathrm{area}_a(\hat{e}_{ij}(x), \hat{e}_{ij,S}(x)) = \mathcal{O}((\log |x|)^2).$$

Zonder bewijs. Het kost Young verscheidene paginalange berekeningen en technische meetkundige constructies om tot dit resultaat te geraken, dus we verwijzen zonder meer naar [You13]. ■

De verscheidene relatoren in de gemodificeerde Steinbergpresentatie tussen elementaire matrices en diagonaalmatrices zijn woorden met—per definitie—algebraïsche eenheidsoppervlakte. Gezien

een aantal bewijzen van Young intensief gebruik maken van shortcuts en transformaties ertussen, is het nuttig te weten wat de oppervlakte is van overeenkomstige relaties tussen shortcuts. Omdat elementaire matrices gelijk zijn aan hun shortcuts, houdt deze vraag eerder steek voor transvecties in het algemeen.

Stelling 6.11. Veronderstel dat $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(1) Voor alle $1 \leq i \neq j \leq n$ is

$$\text{area}_a(\hat{e}_{ij}(a) \hat{e}_{ij}(b), \hat{e}_{ij}(a+b)) = \mathcal{O}((\log |x| + \log |y|)^2),$$

en in het bijzonder is

$$\text{area}_a(\hat{e}_{ij}(a) \hat{e}_{ij}(-a)) = \text{area}_a(\hat{e}_{ij}(a), \hat{e}_{ij}(-a)^{-1}) = \mathcal{O}((\log |x|)^2).$$

(2) Voor alle $1 \leq i \neq j \neq k \leq n$ is

$$\text{area}_a([\hat{e}_{ij}(a), \hat{e}_{jk}(b)], \hat{e}_{ik}(ab)) = \mathcal{O}((\log |x| + \log |y|)^2).$$

(3) Voor alle $1 \leq i, j, k, l \leq n$ met $i \neq j$, $i \neq l$ en $j \neq k$ is

$$\text{area}_a([\hat{e}_{ij}(a), \hat{e}_{kl}(b)]) = \mathcal{O}((\log |x| + \log |y|)^2).$$

(4) Schrijf $s_{ij} = e_{ji}^{-1} e_{ij} e_{ji}^{-1}$, zodat s_{ij} het element

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SL}(\{i, j\}, \mathbb{Z})$$

voorstelt. Voor alle $1 \leq i, j, k, l \leq n$ met $i \neq j$ en $k \neq l$ is

$$\text{area}_a(s_{ij} \hat{e}_{kl}(x) s_{ij}^{-1}, \hat{e}_{\sigma(k)\sigma(l)}(\tau(k, l) x)) = \mathcal{O}((\log |x|)^2),$$

met σ de transpositie $i \leftrightarrow j$ en $\tau(k, l)$ gelijk aan -1 als $i \in \{k, l\}$ of gelijk aan $+1$ anders.

(5) Beschouw een diagonaalmatrix $d = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Voor alle $1 \leq i \neq j \leq n$ is

$$\text{area}_a(d \hat{e}_{ij}(a) d^{-1}, \hat{e}_{ij}(b_i b_j a)) = \mathcal{O}((\log |x|)^2).$$

Zonder bewijs. Zie [You13]. ▀

In de nabespreking van [You13] blijkt de auteur specifiek terug op stelling 6.10. Heel ruw gezegd werken de constructies voor $n \geq 5$ omdat er dan voldoende deelgroepen met kwadratische Dehn-functie binnen $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$ voorhanden zijn, die bovendien veel overlappen: Young schetst in enkele lijnen hoe eenvoudig dit resultaat te bewijzen is vanaf $n \geq 6$, steunend op grote intersecties tussen gekende deelgroepen. Het geval $n = 5$ is echter al veel minder evident en vergt veel meer aandacht voor details, terwijl $n = 4$ tot op heden onopgelost is—het is precies dit openstaande probleem dat het grootste obstakel vormt om de ideeën door te voeren naar $\text{SL}(4, \mathbb{Z})$!

Terzijde: in de inleiding stelt Young wat kort door de bocht dat stelling 6.10 gewoonweg niet waar is voor $n = 4$, maar dat zou betekenen dat $\text{SL}(4, \mathbb{Z})$ geen kwadratische Dehnfunctie heeft; het woord $\hat{e}_{ij}(x) \cdot \hat{e}_{ij,S}(x)^{-1}$ zou dan immers geen kwadratische opvulling toelaten. Naar alle waarschijnlijkheid wordt bedoeld dat de waarheid van de stelling voor $n = 4$ nog open staat.

7

Dehnfunctie van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ voor $n < 4$

In dit hoofdstuk schenken we even aandacht aan de reeds gekende kleine gevallen. De allereerste is de niet bijster boeiende groep $\mathrm{SL}(1, \mathbb{Z})$, ook wel gekend als de triviale groep. Deze heeft uiteraard een lineaire Dehnfunctie. De gevallen $n = 2$ en $n = 3$ zijn minder voor de hand liggend, maar ook voor deze groepen is de Dehnfunctie reeds lang gekend (lineair en exponentieel, respectievelijk).

7.1 Dehnfunctie van $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$

We tonen eerst aan dat deze groep een vrije deelgroep bevat met eindige rang en index.

Lemma 7.1. De matrices

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

genereren een vrije deelgroep H van $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ met rang twee en index 12.

Bewijs. Merk op dat

$$\langle g_1 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \langle g_2 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$

zodat x_1 en x_2 in het bijzonder oneindige orde hebben. Beschouw de natuurlijke actie van $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ op \mathbb{R}^2 en definieer

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y| \right\}, \quad A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |y| \right\}.$$

Het valt nu eenvoudig na te rekenen dat voor alle elementen $h_1 \in \langle g_1 \rangle$ en $h_2 \in \langle g_2 \rangle$, verschillend van de eenheidsmatrix, geldt dat $h_1(A_2) \subseteq A_1$ en dat $h_2(A_1) \subseteq A_2$. Uit het pingponglemma volgt dat $H = \langle g_1, g_2 \rangle \cong \langle g_1 \rangle * \langle g_2 \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ zodat H een vrije groep van rang twee is.

Het valt bovendien te controleren dat

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 4k_1 & 2k_2 \\ 2k_3 & 1 + 4k_4 \end{pmatrix} \mid k_1, \dots, k_4 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De index van H berekenen we als volgt. Merk algemeen op dat voor iedere normaaldeeler N van G bevat in een deelgroep $H \leq G$, geldt dat $[G : H] = [G/N : H/N]$. Dit volgt via een argument à la de derde isomorfiestelling (in het achterhoofd houdende dat H geen normaaldeeler hoeft te zijn, en de relevante afbeeldingen dan geen groepsisomorfismen voorstellen maar slechts bijjecties).

Beschouw nu het natuurlijke morfisme ϕ dat alle matrixentries modulo vier interpreteert,

$$\phi : \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}),$$

dan leert bovenstaande observatie toegepast met $N = \ker(\phi)$ dat

$$[\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) : H] = [\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) : \phi(H)] = 48/4 = 12. \quad \blacksquare$$

De hoop is nu dat $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ en deze vrije deelgroep voldoende op elkaar lijken om te mogen besluiten dat hun Dehnfuncties equivalent zijn. Men kan inderdaad in het algemeen aantonen dat als $H \leq G$ een deelgroep is met eindige index in een eindig voortgebrachte groep G , dat dan $\delta_H \simeq \delta_G$. Hiertoe voeren we eerst volgende definitie in.

Definitie 7.2 (quasi-isometrie). Een afbeelding $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ tussen twee metrische ruimten (M_1, d_1) en (M_2, d_2) (niet noodzakelijk continu of injectief) heet een *quasi-isometrische inbedding* als er reële constanten $a \geq 1$ en $b \geq 0$ bestaan zodat voor alle $x, y \in M_1$ geldt dat

$$\frac{1}{a} d_1(x, y) - b \leq d_2(\phi(x), \phi(y)) \leq a d_1(x, y) + b.$$

Als bovendien elk punt van M_2 op begrensde afstand van het beeld van ϕ ligt, i.e. als er voor iedere $z \in M_2$ een $x \in M_1$ bestaat zodat $d_2(\phi(x), z) \leq c$ voor een zekere derde reële constante $c \geq 0$, dan noemen we ϕ een *quasi-isometrie*. Metrische ruimten waartussen een quasi-isometrie bestaat, noemen we vanzelfsprekend ook *quasi-isometrisch*.

Het valt te controleren dat de relatie “quasi-isometrisch zijn” reflexief, symmetrisch en transitief is, en dus een equivalentierelatie. Enkele eenvoudige voorbeelden zijn de inclusie van \mathbb{R} in $\mathbb{R} \times [0, 1]$ of de natuurlijke inbedding van \mathbb{Z}^n in \mathbb{R}^n . Merk op dat begrensdsheid invariant blijft onder quasi-isometrieën, zodat bijvoorbeeld $[0, 1]$ en \mathbb{R} niet quasi-isometrisch zijn.

Quasi-isometrieën zijn van fundamenteel belang in de geometrische groepentheorie, onder andere omwille van het volgende beroemde lemma.

Lemma 7.3 (Švarc–Milnor). Indien G een cocompacte en eigenlijk discontinue (zie definitie 3.11) actie heeft op een eigenlijke geodetische ruimte⁽¹⁾ M , dan is G eindig voortgebracht en de afbeelding $G \rightarrow M : g \mapsto g \cdot x_0$ een quasi-isometrie, waarbij we G uitrusten met de woordmetriek en x_0 een vast punt van M kiezen.

Zonder bewijs. Gedetailleerde bewijzen zijn overal terug te vinden, bijvoorbeeld in [Bow05]. ✎

Uit dit lemma kan men bijvoorbeeld afleiden dat Cayleygraf van een eindig gepresenteerde groep ten opzichte van twee verschillende stelsels generatoren quasi-isometrisch zijn, waaruit de woordmetriek goedgedefinieerd blijkt (onafhankelijk van de presentatie) op quasi-isometrie na.

Stelling 7.4. Als $H \leq G$ een deelgroep is met eindige index in een eindig voortgebrachte groep G , dan zijn G en H (uitgerust met de woordmetrieken) quasi-isometrisch en is $\delta_H \simeq \delta_G$.

Bewijs. Beschouw de natuurlijke, eigenlijk discontinue actie van H op G door linkse vermenigvuldiging. Deze actie heeft eindig quotiënt en is dus cocompact. Uit het lemma van Švarc–Milnor volgt dat H zelf eindig voortgebracht is en quasi-isometrisch is met G .

De laatste claim volgt uit het feit dat Dehnfuncties invariant zijn onder quasi-isometrieën; het bronartikel [DCT10] van Young verwijst hiervoor naar [Alo90]. ■

Gevolg 7.5. De Dehnfunctie van $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ is lineair.

Bewijs. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ bevat een vrije deelgroep met eindige index en rang, die trivialeerwijs een lineaire Dehnfunctie heeft (voor een presentatie zonder relatoren is de Dehnfunctie immers identisch nul). Het resultaat volgt dus rechtstreeks uit de vorige stelling. ■

⁽¹⁾Een metrische ruimte M is *geodetisch* als elke twee punten met een afstandsminimaliserende kromme verbonden kunnen worden, en *eigenlijk (proper)* als elke begrensde gesloten bal in M compact is.

7.2 Dehnfunctie van $SL(3, \mathbb{Z})$

De groepen $SL(n, \mathbb{Z})$ worden eveneens aandachtig bestudeerd in [ECH+92], het standaardwerk over zogenaamde “automatische groepen”. De theorie tracht om groepen beter te begrijpen en concrete computationele vraagstukken op te lossen via een normaalvorm die—in een precieze formele taal—theoretische betekenis—zo eenvoudig mogelijk is. Idealiter bepaalt de normaalvorm een *reguliere taal* en kan men groeps-elementen en bewerkingen herkennen via *finite state machines*; dan wordt de groep *automatisch* genoemd. Relaxaties tot algemenere klassen van talen leiden tot algemenere klassen van groepen. Wij hebben deze boeiende wisselwerking tussen groepen en formele talen bestudeerd in het project Literatuurstudie [Bos16] in academiejaar 2015–2016.

In het boek [ECH+92] trachten de auteurs aan te tonen dat $SL(n, \mathbb{R})$ voor $n \geq 3$ niet automatisch is via gelijkaardige constructies als die waar Young gebruik van maakt, zoals bijvoorbeeld de actie op de symmetrische ruimte $SL(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$. Concreet wordt voor $n = 3$ het bestaan bewezen van woorden met exponentiële oppervlakte. De bron gebruikt echter vrij andere terminologie en heeft andere doeleinden dan het bestuderen van de precieze Dehnfuncties.

Stelling 7.6. De Dehnfunctie van $SL(3, \mathbb{Z})$ is exponentieel.

Zonder bewijs. Zie [ECH+92]. ▣

We zijn niet op de hoogte of er ook een meer “elementair” bewijs voor dit resultaat bestaat.

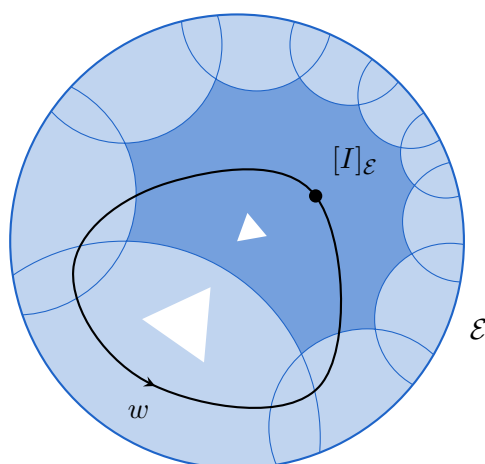
8.1 Bewijsschets

Beschouw een nulhomotoop woord $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ in de Steinbergpresentatie van $\Gamma = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$. Interpreteer dit woord w als een lus binnen de symmetrische ruimte $\mathcal{E} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ door achtereenvolgens de groeps-elementen voorgesteld door het lege woord, a_1 , $a_1 a_2$, enzovoort tot en met $a_1 a_2 \cdots a_n$ te verbinden via geodeten. Het feit dat w nulhomotoop is, betekent dat dit laatste punt inderdaad samenvalt met het startpunt, de triviale nevenklasse in \mathcal{E} .

Binnen \mathcal{E} kunnen we w efficiënt opvullen aangezien deze ruimte negatief gekromd is; stelling 3.10 geeft een kwadratische opvulling via een homotopie langs geodeten. Γ werkt echter niet cocompact op \mathcal{E} , dus werkt de *filling theorem* van Gromov niet en vinden we niet automatisch een kwadratische Dehnfunctie voor Γ . Intuïtief betekent het feit dat $\mathcal{M} = \Gamma \backslash \mathcal{E}$ niet compact is dat een optimale opvulling voor w erg “diep” in \mathcal{M} kan liggen, en hoe dieper, hoe meer vertekend de metriek $d_{\mathcal{E}}$ wordt ten opzichte van d_{Γ} (zoals in stelling 5.25 geformaliseerd).

Aan de andere kant leert stelling 5.26 dat er rond elk diep punt in \mathcal{M} een grote bal bestaat, volledig bevat in een parabolische deelgroep. Deze parabolische deelgroepen komen overeen met stabilisatoren van punten op oneindig in \mathcal{E} , of dus met horosferen. Ons opnieuw beroepend op de intuïtie, is het idee om de symmetrische ruimte \mathcal{E} compact te krijgen door er horosferen uit weg te snijden, tot het overblijvende gedeelte⁽¹⁾ compact is.

Het meetkundige idee is dan ook als volgt: probeer een opvulling van w in \mathcal{E} op te splitsen in delen binnen een horosfeer gelegen of binnen het compacte centrale gedeelte. In de laatste situatie hoeft er niet veel meer aangetoond te worden, en vinden we meteen een opvulling in Γ ; in de eerste situatie trachten we gebruik te maken van de algebraïsche structuur van de parabolische deelgroepen.



⁽¹⁾Young gebruikt in zijn constructies de benaming *thick part* en de notatie $\mathcal{E}(\epsilon)$ voor de verzameling punten waar de injectiviteitsstraal minstens ϵ is; in [ECH+92] wordt bewezen dat $\mathcal{E}(\epsilon)$ samentrekbaar is en dat Γ er cocompact op werkt voor $0 < \epsilon \leq 1/2$.

Concreet gaan we een template construeren voor w waarvoor elke ω -driehoek ofwel een absoluut begrensde diameter in Γ heeft, ofwel volledig in een parabolische deelgroep ligt. Expliciet:

Lemma (1). Veronderstel dat $n \geq 5$ en $2 < m \leq n$. Er bestaat een constante $c \in \mathbb{R}^+$ zodat elk woord w in $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$ aan kost $\mathcal{O}(\ell(w))$ op te breken is in woorden w_1, \dots, w_k met volgende eigenschappen:

- voor elke w_i geldt ófwel dat diens lengte absoluut begrensd is door $\ell(w_i) \leq c$, ófwel dat w_i een ω -driehoek is met toppen in een parabolische deelgroep $U(m_i, m - m_i)$, $1 \leq m_i < m$;
- de lengtes van w_i zijn begrensd via

$$\sum_{i=1}^k \ell(w_i)^2 = \mathcal{O}(\ell(w)^2).$$

We hebben hiervoor een manier nodig om adaptieve templates op zo'n manier te genereren dat, na inbedding in \mathcal{E} , ieder punt x in de template bevat is in een driehoek met diameter min of meer proportioneel met de diepte $r(x)$. We bewijzen daartoe verderop lemma 8.4, dat templates construeert waarvan de booglengtes overeenkomen met een vooropgegeven Lipschitzfunctie.

De zo gevonden korte woorden kunnen we opvullen in Γ aan een begrensde kost. De ω -driehoeken vergen echter meer aandacht. Deze zullen we opnieuw opbreken in beter begrepen woorden—dit keer shortcutwoorden in deelgroepen $\mathrm{SL}(m_i, \mathbb{Z})$, die overeenkomen met de diagonaalblokken van de parabolische deelgroep. We zullen zien dat dit lukt aan kwadratische kost.

Lemma (2). Veronderstel dat $n \geq 5$ en $m \leq n$. Beschouw $1 \leq s_1, \dots, s_l \leq m$ met $\sum_i s_i \leq n$. Dan is elke ω -driehoek w met toppen in $U(s_1, \dots, s_l)$ aan kost $\mathcal{O}(\ell(w)^2)$ op te splitsen in woorden w_1, \dots, w_k met volgende eigenschappen:

- voor elke i is w_i een shortcutwoord in $\mathrm{SL}(m_i, \mathbb{Z})$ voor zekere $1 \leq m_i < m$;
- de lengtes van w_i zijn begrensd via

$$\sum_{i=1}^k \ell(w_i)^2 = \mathcal{O}(\ell(w)^2).$$

De bedoeling is ondertussen allicht wel duidelijk: we trachten om inductief op n verder te werken. Nog een struikelblok echter is dat de gevonden woorden in het vorige lemma weliswaar elementen in $\mathrm{SL}(m_i, \mathbb{Z})$ voorstellen maar *shortcutwoorden* zijn, wat betekent dat ze ook buiten (de generatoren van) deze deelgroep $\mathrm{SL}(m_i, \mathbb{Z})$ kunnen treden. Vandaar het volgende lemma, dat shortcutwoorden manipuleert tot deze volledig binnen $\mathrm{SL}(m_i, \mathbb{Z})$ liggen, opnieuw aan kwadratische kost.

Lemma (3). Veronderstel dat $n \geq 5$ en $2 < m \leq n$. Als w een shortcutwoord is in $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$, dan bestaat er een woord w' in $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$ zodat $\ell(w') = \mathcal{O}(\ell(w))$ en $\mathrm{area}_a(w, w') = \mathcal{O}(\ell(w)^2)$.

Merk op dat dit resultaat slechts geldt voor $m > 2$. Op de herschikte woorden in $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$ kunnen we nu effectief de inductiehypothese toepassen, en zo uiteindelijk lussen in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ opbreken in shortcutwoorden in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Eenmaal op dit punt gekomen is bovenstaand lemma niet langer van toepassing, en moeten we de shortcutwoorden expliciet opvullen. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ heeft weliswaar lineaire Dehnfunctie, zoals bewezen in gevolg 7.5, maar shortcutwoorden hoeven opnieuw niet volledig in

deze vaste kopie te liggen; daarom tonen we nog expliciet aan dat zo'n shortcutwoorden in $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$ met kwadratische oppervlakte op te vullen zijn.

Lemma (4). Als w een shortcutwoord is in $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, dan is $\text{area}_a(w) = \mathcal{O}(\ell(w)^2)$.

Alles samen bewijzen deze vier lemma's samen inderdaad het vermoeden van Thurston voor $n \geq 5$:

Gevolg 8.1. Als $n \geq 5$, dan heeft $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$ een kwadratische Dehnfunctie.

We bespreken in de volgende secties de bewijzen voor deze vier lemma's.

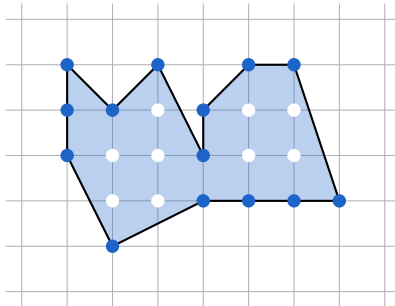
8.2 Herleiden naar parabolische deelgroepen

In een detail van het centrale resultaat van deze sectie zullen we steunen op de formule van Pick om een bovengrens voor een aantal driehoeken te bekomen. We zullen deze formule hier niet bewijzen, niet alleen omdat een volledig bewijs niet bijzonder spannend of inzichtelijk is, maar ook omdat we slechts een eenvoudig gevolg nodig hebben.

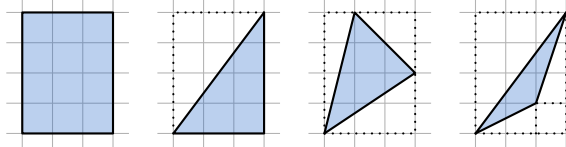
Stelling 8.2 (Pick). Beschouw een simpele⁽²⁾ veelhoek P in \mathbb{R}^2 waarvan ieder hoekpunt in \mathbb{Z}^2 ligt. Noteer $I(P)$ voor het aantal inwendige roosterpunten in P en $B(P)$ voor het aantal roosterpunten op de rand van P (inclusief hoekpunten). Dan wordt de oppervlakte van P gegeven door

$$\text{area}(P) = I(P) + \frac{1}{2} B(P) - 1.$$

Het voorbeeld P hieronder voldoet aan $I(P) = 9$ en $B(P) = 14$, en heeft aldus volgens de formule van Pick een oppervlakte van 15 eenheden.



Zonder bewijs. We beperken ons tot een bewijsschets: controleer de formule eerst voor rechthoeken met zijden parallel aan de roosterlijnen, voor rechthoekige driehoeken, en tot slot voor willekeurige driehoeken door deze te omsluiten door een rechthoek via rechthoekige driehoeken.



Vervolgens gaat men na dat de formule additief is en kan men inductief elke veelhoek trianguleren via een inwendige diagonaal (het is echter niet triviaal dat dit steeds mogelijk is; in drie dimensies geldt dit bijvoorbeeld niet) om zo de formule te besluiten voor algemene simpele veelhoeken. \blacksquare

⁽²⁾Met *simpel* bedoelen we dat de veelhoek zichzelf niet mag snijden en geen gaten mag bevatten. Zo'n veelhoek wordt ook een *Jordanveelhoek* genoemd, een knipoog naar de stelling van Jordan.

Gevolg 8.3. Elke roosterdriehoek heeft een oppervlakte van minstens $1/2$.

Bewijs. Dit volgt meteen uit de formule van Pick, aangezien dan $B(P) \geq 3$ en $I(P) \geq 0$. ■

Het volgende lemma laat toe om triangulaties ineen te knutselen waarvan de lengtes van de bogen goed overeenkomen met een vooropgegeven afbeelding.

Lemma 8.4. Veronderstel dat $t = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$) en dat $\mathbb{D}^2(t) = [0, t] \times [0, t] \subset \mathbb{R}^2$. Beschouw een 1-Lipschitzcontinue functie $h : \mathbb{D}^2(t) \rightarrow \mathbb{R}$ zodat overal $h \geq 1$. Dan bestaat er een triangulatie τ_h van $\mathbb{D}^2(t)$ met volgende eigenschappen:

- alle toppen van τ_h zijn roosterpunten (punten van \mathbb{Z}^2);
- τ_h bevat hoogstens $2t^2$ driehoeken;
- als x en y adjacenten toppen zijn in τ_h , dan is

$$\min\left(\frac{h(x)}{5}, \frac{t}{2}\right) \leq d(x, y) \leq \sqrt{2}h(x);$$

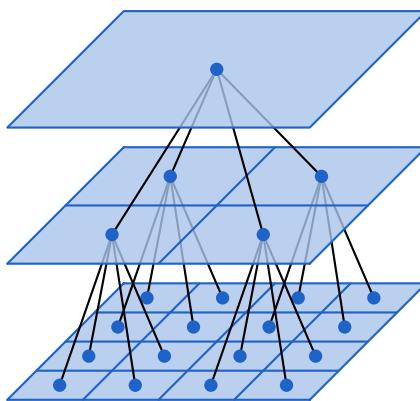
- sommeren we over alle driehoeken Δ en alle bogen e in τ_h , dan is

$$\sum \text{diam}(\Delta)^2 \leq 28t^2 \quad \text{en} \quad \sum \ell(e)^2 \leq 44t^2.$$

Bewijs. Beschouw de verzameling van *dyadische vierkanten* in $\mathbb{D}^2(t)$, van de vorm

$$S_{i,j,s} = [i \cdot 2^s, (i+1) \cdot 2^s] \times [j \cdot 2^s, (j+1) \cdot 2^s] \subseteq \mathbb{D}^2(t)$$

Deze worden verkregen uit $\mathbb{D}^2(t)$ door herhaaldelijk orthogonaal in vier te splitsen, tot en met alle eenheidsvierkantjes van $\mathbb{D}^2(t)$. De zijdelengte van een dyadisch vierkant S noteren we als $\sigma(S)$. De verzameling van alle dyadische vierkanten draagt op een natuurlijke wijze de structuur van een gewortelde boom, door het gehele vierkant als wortel te zien en elk vierkant als ouder van de vier half zo grote vierkanten erin bevat.



Definieer U_0 als de verzameling van alle dyadische vierkanten $S \subseteq \mathbb{D}^2(t)$ waarvoor $\sigma(S) \leq h(x)$ voor alle $x \in S$. Omdat alle vierkantjes S met $\sigma(S) = 1$ reeds in U_0 bevat zitten, houdt het steek om de verzameling U te beschouwen van alle maximale elementen van U_0 (onder de partiële orde geïnduceerd door de boomstructuur). Voor deze verzameling gelden enkele eigenschappen.

- U bedekt $\mathbb{D}^2(t)$ volledig. Dit is duidelijk, aangezien de minimale vierkantjes $\mathbb{D}^2(t)$ bedekken, en elk daarvan bevat zit in een maximaal element van U_0 .

- *Elementen van U overlappen elkaar niet, behalve in hun rand.* Als er wel inwendige overlap is, dan moet één dyadische vierkant bevat zijn in het andere en is die niet maximaal.
- *Voor alle $S \in U$ en alle $x \in S$ geldt dat*

$$\min\left(\frac{h(x)}{5}, \frac{t}{2}\right) \leq \sigma(S) \leq h(x).$$

De rechtse ongelijkheid geldt per constructie. De linkse ongelijkheid is triviaal voldaan voor $S = \mathbb{D}^2(t)$. Beschouw voor een ander element $S \in U$ diens ouder T . Omdat $T \notin U$, bestaat er een punt $y \in T$ waarvoor $h(y) < \sigma(T) = 2\sigma(S)$. Via het 1-Lipschitz zijn van h is dan

$$h(x) \leq h(y) + d(x, y) < (2 + 2\sqrt{2})\sigma(S) < 5\sigma(S).$$

- *Elk vierkant in U heeft hoogstens 16 buren.* Onderstel dat S_1 en S_2 twee elementen van U zijn waarvan de randen niet-ledig snijden, en beschouw een punt $x \in S_1 \cap S_2$. Wegens de vorige eigenschap is dan

$$\begin{cases} \sigma(S_1) \leq h(x) \leq 5\sigma(S_2) \\ \sigma(S_2) \leq h(x) \leq 5\sigma(S_1), \end{cases}$$

maar omdat S_1 en S_2 dyadische vierkanten zijn, moet $\sigma(S_1) \leq 4\sigma(S_2)$ en $\sigma(S_2) \leq 4\sigma(S_1)$. Met andere woorden, elk vierkant in U heeft hoogstens vier buren langs elke zijde.

Interpreteer de partitie U van $\mathbb{D}^2(t)$ in vierkanten als een graaf: zet op elk hoekpunt van elk vierkant van U een top, en verbind twee toppen als een vierkant van U deze twee als hoekpunten heeft. Merk op dat we op die manier toppen op een rand van een vierkant kunnen toevoegen, zodat de vlakken van deze graaf over het algemeen geen vierhoeken meer zijn. Voeg nu in elk n -vlak van de graaf $n - 2$ willekeurige disjuncte diagonalen toe om een partitie τ_h van $\mathbb{D}^2(t)$ in driehoeken te bekomen.

- *Alle toppen van τ_h zijn roosterpunten.* Dit is duidelijk.
- *τ_h bevat hoogstens $2t^2$ driehoeken.* Dit volgt rechtstreeks uit gevolg 8.3.
- *Voor alle adjacenten toppen x en y in τ_h geldt dat*

$$\min\left(\frac{h(x)}{5}, \frac{t}{2}\right) \leq d(x, y) \leq \sqrt{2}h(x).$$

Beschouw namelijk het kleinste vierkant $S \in U$ waar zowel x als y toe behoren. Dan geldt dat $\sigma(S) \leq d(x, y) \leq \sqrt{2}\sigma(S)$, en de claim volgt uit de correponderende afschattingen voor U .

- *Sommerend over alle driehoeken Δ en alle bogen e in τ_h geldt dat*

$$\sum \text{diam}(\Delta)^2 \leq 28t^2 \quad \text{en} \quad \sum \ell(e)^2 \leq 44t^2.$$

Elk vierkant S van U heeft immers hoogstens 16 buren, en geeft dus aanleiding tot hoogstens 14 driehoeken in τ_h met bovendien diameter begrensd door $\sqrt{2}\sigma(S)$, zodat

$$\sum \text{diam}(\Delta)^2 \leq \sum_{S \in U} 14(\sqrt{2}\sigma(S))^2 = 28t^2.$$

Daarnaast heeft elk vierkant aanleiding tot hoogstens 16 bogen langs de rand en 14 inwendige diagonale bogen. Dit geeft een afschatting

$$\sum \ell(e)^2 \leq \sum_{S \in U} 16\sigma(S)^2 + \sum_{S \in U} 14(\sqrt{2}\sigma(S))^2 = 44t^2.$$

Merk op dat we weliswaar alle orthogonale bogen in het inwendige van $\mathbb{D}^2(t)$ op deze manier dubbel tellen, maar de gevonden afschatting blijft natuurlijk een geldige bovengrens.

Alle claims zijn bewezen. ■

In het artikel [You13] maakt de auteur ruwere afschattingen en bekomt hij iets grotere constanten (64 en 128 in plaats van 28 en 44), maar uiteraard is de essentie dat er een kwadratische bovengrens bestaat—de precieze constanten doen er niet veel toe.

We kunnen eindelijk het eerste centrale resultaat stellen en bewijzen, steunende op de verzamelde resultaten en concepten doorheen dit project.

Lemma 8.5 (1). Veronderstel dat $n \geq 5$ en $2 < m \leq n$. Er bestaat een constante $c \in \mathbb{R}^+$ zodat elk woord w in $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$ aan kost $\mathcal{O}(\ell(w))$ op te breken is in woorden w_1, \dots, w_k met volgende eigenschappen:

- voor elke w_i geldt ófwel dat diens lengte absoluut begrensd is door $\ell(w_i) \leq c$, ófwel dat w_i een ω -driehoek is met toppen in een parabolische deelgroep $U(m_i, m - m_i)$, $1 \leq m_i < m$;
- de lengtes van w_i zijn begrensd via

$$\sum_{i=1}^k \ell(w_i)^2 = \mathcal{O}(\ell(w)^2).$$

Bewijs. Noteer $w(i)$ voor het initiële segment $a_1 a_2 \cdots a_i$ en onderstel dat $2^{k-1} < \ell(w) \leq 2^k = t$. Zij $\alpha : [0, \ell(w)] \rightarrow \mathcal{E}$ de kromme geassocieerd aan w , zodanig geparametriseerd dat $\alpha(i) = [w(i)]_{\mathcal{E}}$, en breidt deze uit tot een kromme $\alpha' : [0, t] \rightarrow \mathcal{E}$ door $\alpha'(x) = \alpha(x)$ te definiëren voor $x \leq \ell(w)$ en $\alpha'(x) = [I]_{\mathcal{E}}$ anders. Noemen we c_{Σ} de maximale lengte van een kromme geassocieerd aan een enkele generator uit het alfabet Σ voor $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$, dan is α (en dan ook α') c_{Σ} -Lipschitz.

We weten uit stellingen 2.30 en 3.10 dat de lus α' een opvulling heeft met kwadratische oppervlakte, door samen te trekken langsheen geodeten. Beschouw voor iedere twee punten $x, y \in \mathcal{E}$ de unieke geodeet $\gamma_{x,y}$ die x met y verbindt, geparametriseerd met constante snelheid. Dan vormt de volgende afbeelding f een homotopie van α' naar het constante pad $[I]_{\mathcal{E}}$:

$$f : \mathbb{D}^2(t) = [0, t] \times [0, t] \rightarrow \mathcal{E} : (x, y) \mapsto \gamma_{\alpha'(x), [I]_{\mathcal{E}}}(y/t).$$

Deze opvulling heeft oppervlakte $\mathcal{O}(\ell(w)^2)$ en is tevens $2c_{\Sigma}$ -Lipschitzcontinu.

Definieer nu, met r de dieptefunctie uit hoofdstuk 5.3,

$$h : \mathbb{D}^2(t) \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \max\left(1, \frac{r(f(x))}{16m^2 c_{\Sigma}}\right).$$

De constanten zijn zodanig dat h nu 1-Lipschitz is, en dat voor alle $y \in \mathbb{D}^2(t)$ geldt dat als

$$d(x, y) \leq 2h(x) = \frac{r(f(x))}{8m^2 c_{\Sigma}},$$

dan

$$d(f(x), f(y)) \leq 2c_{\Sigma} d(x, y) \leq \frac{r(f(x))}{4m^2},$$

of met andere woorden: indien $h(x) \geq 1$ wordt de bal $B \subseteq \mathbb{D}^2(t)$ rond x met straal $2h(x)$ onder f afgestuurd binnen de bal $f(B) \subseteq \mathcal{E}$ rond $f(x)$ met straal $r(f(x))/4m^2$. Dit resultaat is belangrijk, omdat uit stelling 5.26 dan volgt dat $\rho(f(B))$ volledig in eenzelfde nevenklasse van een bepaalde parabolische deelgroep van $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$ bevat zit.

We kunnen vervolgens lemma 8.4 gebruiken om een triangulatie τ_h van $\mathbb{D}^2(t)$ ineen te knutselen met deze functie h . We bouwen deze triangulatie nu om tot een template voor w . In eerste instantie dienen we elke top te labelen met elementen uit $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$: label een inwendige top v met $\rho(f(v))$, een top met coördinaten $(i, 0)$ met $w(i)$ indien $i \leq \ell(w)$, en alle overige toppen op de rand met I .

Merk op dat $[f(v)]_{\mathcal{M}} = [I]_{\mathcal{M}}$ voor elke top v op de rand, zodat $f(v)$ dan op diepte nul ligt in \mathcal{M} en derhalve $h(v) = 1$. Dit betekent dat adjacentie toppen op de rand op eenheidsafstand moeten liggen. Elk roosterpunt op de rand is dus een top van τ_v en de rand is een $4t$ -hoek met achtereenvolgende labels $I, w(1), w(2), \dots, w(n-1), I, \dots, I$ (zonder ontbrekende initiële segmenten). We verkrijgen dan ook een template τ voor w door alle toppen met label I op de rand te identificeren.

Beschouw twee adjacentie toppen v_1 en v_2 in τ met labels g_1 en g_2 . Stelling 5.25 betekent dat

$$d_{\Gamma}(g_1, g_2) \leq c(d_{\mathcal{E}}(f(v_1), f(v_2)) + r(f(v_1)) + r(f(v_2))) + c \leq \mathcal{O}(d(v_1, v_2))$$

door het Lipschitzkarakter van f en de constructie van de triangulatie.

Beschouw verder een driehoek in τ met toppen v_1, v_2 en v_3 en respectievelijke labels g_1, g_2 en g_3 . Opnieuw per constructie van de triangulatie geldt dat $\mathrm{diam}(\{x_1, x_2, x_3\})$ van dezelfde grootteorde als $h(x_1)$ is. Voor $h(x_1)$ dus voldoende groot volgt dan uit stelling 5.26 dat g_1, g_2 en g_3 in dezelfde nevenklasse zitten van een parabolische deelgroep $U(i, m-i)$, $1 \leq i < n$; anders liggen g_1, g_2 en g_3 op een begrensde afstand van elkaar dankzij de voorgaande paragraaf.

Gebruik tot slot dit template τ en de normaalvorm ω om het startwoord w op te breken in woorden, zoals beschreven in hoofdstuk 3.4.2. Deze voldoen aan de gewenste eigenschappen. ■

Het belang van deze stelling is duidelijk: het volstaat dat

$$\delta_{U(s, m-s), \omega}^{\mathrm{tri}}(t) \lesssim t^2$$

voor alle $s \in \{1, \dots, m-1\}$ om via stelling 3.19 te mogen besluiten dat

$$\delta_{\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z}) \leq \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})}^{\mathrm{rel}}(t) \lesssim t^2.$$

Voor de rest van het volledige bewijs komt het er dus hoofdzakelijk op aan om efficiënte opvullingen te vinden voor ω -driehoeken in parabolische deelgroepen van $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$.

8.3 Herleiden naar diagonaalblokken

Lemma 8.6 (2). Veronderstel dat $n \geq 5$ en $m \leq n$. Beschouw $1 \leq s_1, \dots, s_l \leq m$ met $\sum_i s_i \leq n$. Dan is elke ω -driehoek w met toppen in $U(s_1, \dots, s_l)$ aan kost $\mathcal{O}(\ell(w)^2)$ op te splitsen in woorden w_1, \dots, w_k met volgende eigenschappen:

- voor elke i is w_i een shortcutwoord in $\mathrm{SL}(m_i, \mathbb{Z})$ voor zekere $1 \leq m_i < m$;
- de lengtes van w_i zijn begrensd via

$$\sum_{i=1}^k \ell(w_i)^2 = \mathcal{O}(\ell(w)^2).$$

Zonder bewijs. Ook dit is een stelling waar Young even mee bezig is—17 volle bladzijden om precies te zijn, zonder voorbereidende hulpstellingen. Bovendien duiken er een heleboel technieken op: voor het specifieke geval $U(1, n-1)$ of $U(n-1, 1)$ bijvoorbeeld werken een aantal hulpstellingen niet of geven die te zwakke grenzen. ▣

8.4 Shortcuts wegwerken

Lemma 8.7 (3). Veronderstel dat $n \geq 5$ en $2 < m \leq n$. Als w een shortcutwoord is in $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$, dan bestaat er een woord w' in $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$ zodat $\ell(w') = \mathcal{O}(\ell(w))$ en $\mathrm{area}_a(w, w') = \mathcal{O}(\ell(w)^2)$.

Bewijs. Dit volgt nu eenvoudig uit stelling 6.10: wegens het gegeven is w een product van diagonaalmatrices in $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$ en shortcuts van transvecties in $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$. Daar $m \geq 3$ laat stelling 6.10 toe iedere shortcut $\hat{e}_{ab}(k_i)$ te vervangen door een shortcut $\hat{e}_{ab, S_i}(k_i)$ volledig in $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$ bevat (voor een geschikte S_i), aan een totale kost van $\mathcal{O}(\ell(w)^2)$. Het resultaat is het gezochte woord w' . ■

8.5 Inductiebasis

We zullen opnieuw gebruikmaken van het knutsellemma 8.4 om adaptieve templates te genereren, dit keer voor *shortcut*woorden in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ die we meteen volledig dienen op te vullen.

Lemma 8.8 (4). Als w een shortcutwoord is in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, dan is $\mathrm{area}_a(w) = \mathcal{O}(\ell(w)^2)$.

Bewijs. We krijgen gegeven dat $w = w_1 \cdots w_m$ waarin elke w_i een diagonaalmatrix in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ is of een shortcut van de vorm $\hat{e}_{12}(k)$ of $\hat{e}_{21}(k)$. Stelling 6.11 (4) laat toe om ieder optreden van $\hat{e}_{21}(k)$ in w te vervangen door $s \hat{e}_{12}(-k) s^{-1}$ aan een kost $\mathcal{O}(\ell(w)^2)$, waarin $s = e_{21}^{-1} e_{12} e_{21}^{-1}$. We mogen dan aannemen dat w geen shortcuts $\hat{e}_{21}(k)$ meer bevat.

Noteer het element voorgesteld door $w_1 \cdots w_i$ kortweg als $w(i)$. Merk op dat dit het product is van de eerste i *deelwoorden*, in tegenstelling tot lemma 8.5, waar we de eerste i *letters* bedoelden! Noem \mathcal{S} een Siegelverzameling voor $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. We definiëren nu voor elke index i een kromme $\alpha_i : [0, \ell(w_i)] \rightarrow \mathcal{E}$ binnen de symmetrische ruimte $\mathcal{E} = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, met de volgende eigenschappen:

- α_i verbindt $[w(i)]_{\mathcal{E}}$ met $[w(i+1)]_{\mathcal{E}}$;
- α_i is uniform Lipschitz, met Lipschitzconstante onafhankelijk van w ;
- er bestaat een natuurlijk getal t_i in het domein van α_i zodat enerzijds $\alpha_i(m) \in w(i)\mathcal{S}$ voor alle $m \in \{0, \dots, t_i\}$ en anderzijds $\alpha_i(m) \in w(i+1)\mathcal{S}$ voor alle $m \in \{t_i+1, \dots, \ell(w_i)\}$.

Als $\ell(w_{i+1}) \in \{1, 2\}$, definieer α_i dan op $[0, 1]$ als de geodeet die $[w(i)]_{\mathcal{E}}$ met $[w(i+1)]_{\mathcal{E}}$ verbindt, en eventueel op $[1, 2]$ identisch gelijk aan het punt $[w(i+1)]_{\mathcal{E}}$. Kies in dit geval $t_i = 0$.

Als $\ell(w_{i+1}) \geq 3$, dan weten we dat $w_{i+1} = \hat{e}_{12}(k)$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$. Definieer voor alle $x \in \mathbb{R}$

$$d(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix},$$

en merk op dat $d(x) \in A_1 \subset A_{2/\sqrt{3}}$ zodat in het bijzonder $d(x) \in \mathcal{S}$, voor alle $x \geq 1$.

Kies in dit geval $t_i = \lceil \ell(w_i)/3 \rceil$, en definieer een pad $\beta_i : [0, \ell(w_i)] \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ als de concatenatie van geodetische segmenten tussen achtereenvolgens

$$\begin{aligned} p_1 &= w(i), \\ p_2 &= w(i) \cdot d(\sqrt{|k|}), \\ p_3 &= w(i) \cdot d(\sqrt{|k|}) \cdot e_{12}(\mathrm{sgn} k), \\ p_4 &= w(i) \cdot d(\sqrt{|k|}) \cdot e_{12}(\mathrm{sgn} k) \cdot d(\sqrt{|k|}^{-1}) = w(i) \cdot e_{12}(k) = w(i+1). \end{aligned}$$

Parametriseer β_i zodanig dat $\beta_i|_{[0,t_1]}$ van p_1 naar p_2 gaat, $\beta_i|_{[t_1,t_1+1]}$ van p_2 naar p_3 , en $\beta_i|_{[t_1+1,\ell(w_i)]}$ van p_3 naar p_4 . Stel vervolgens $\alpha_i = [\beta_i]_{\mathcal{E}}$. Deze voldoet aan de vooropgestelde eigenschappen.

Noem $\alpha : [0, \ell(w)] \rightarrow \mathcal{E}$ de concatenatie van alle krommen α_i . Zoals in lemma 8.5 beschouwen we in de volgende stappen eerst een efficiënte opvulling f van α , waar we vervolgens een triangulatie uit bouwen, en tot slot een template voor w waarin elke top v een label γ krijgt zodat $f(v) \in \gamma\mathcal{S}$. De ideeën zijn geheel analoog als in lemma 8.5; we gaan er dan ook wat vlotter over.

Veronderstel dat $\ell(w) \leq 2^k = t$ met $k \in \mathbb{N}$ minimaal en breidt α uit tot een kromme $\alpha' : [0, t] \rightarrow \mathcal{E}$ door stationair in $[I]_{\mathcal{E}}$ te blijven voor parameters groter dan $\ell(w)$. Schrijf opnieuw $\mathbb{D}^2(t) = [0, t] \times [0, t]$, bed de rand $\partial\mathbb{D}^2(t)$ in in \mathcal{E} door één zijde te identificeren met α' en de drie overige met het constante pad in het punt $[I]_{\mathcal{E}}$, en bepaal de opvulling $f : \mathbb{D}^2(t) \rightarrow \mathcal{E}$ die deze inbedding uitbreidt door samen te trekken langs geodeten in \mathcal{E} . Deze f heeft oppervlakte $\mathcal{O}(\ell(w)^2)$ en is c -Lipschitz voor een zekere constante $c \in \mathbb{R}^+$ onafhankelijk van w .

Definieer opnieuw, via de dieptefunctie r ,

$$h : \mathbb{D}^2(t) \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \max\left(1, \frac{r(f(x))}{32c}\right).$$

Deze afbeelding is 1-Lipschitz en lemma 8.4 geeft een overeenkomstige triangulatie τ_h van $\mathbb{D}^2(t)$.

Label elke top v in τ_h met een element $g \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ waarvoor $f(v) \in g\mathcal{S}$. Voor inwendige toppen volstaat elk zo'n g ; voor toppen op de rand moeten we het label zodanig kiezen dat het randwoord van τ_h juist het woord w is, als volgt. Stel $\ell_i = \ell(w(i))$, zodat de inbeddingen van α_{i-1} en α_i op de rand precies het punt $(\ell_i, 0)$ gemeen hebben. Aangezien het beeld van $\alpha'(\ell_i) = [w(i)]_{\mathcal{E}}$ in \mathcal{M} op diepte nul ligt, is $h(\ell_i, 0) = 1$ en $(\ell_i, 0)$ dus een top van de triangulatie; geef die het label $w(i)$. Definieer vervolgens $s_0 = 0$, $s_i = \ell_{i-1} + t_i$ voor alle $1 \leq i \leq n$, en $s_{n+1} = t$; per constructie van de paden β_i geldt voor alle $m \in \{s_i + 1, \dots, s_{i+1}\}$ dat $f(m, 0) = \alpha'(m) \in w(i)\mathcal{S}$. In dat geval geven we top $(m, 0)$ het label $w(i)$. Elke andere top op de rand wordt door f afgestuurd op $[I]_{\mathcal{E}}$ en krijgt label I . Identificeer alle toppen met dezelfde labels I of $w(i)$; dit geeft een template voor w .

Opnieuw zoals in lemma 8.5 zien we dat elke driehoek in τ_h ofwel een absoluut begrensde diameter (en dus ook oppervlakte) heeft in $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, ofwel volledig in een nevenklasse van een parabolische deelgroep ligt. In dat laatste geval is de enige optie de groep $U(1, 1)$ van bovendriehoeksmatrices. Voor Young is hiermee de kous af, maar wij controleren nog even de details.

We dienen enkel nog aan te tonen dat iedere ω -driehoek binnen een nevenklasse van $U = U(1, 1)$ een kwadratische oppervlakte heeft. Beschouw zo'n driehoek

$$\Delta = \Delta_{\omega}(g_1, g_2, g_3) = \omega(g_1^{-1}g_2)\omega(g_2^{-1}g_3)\omega(g_3^{-1}g_1),$$

met elke $g_i \in hU$, h vast. Dan is elke $g_i^{-1}g_j \in U$ en kunnen we Δ schrijven als

$$\omega\begin{pmatrix} \pm 1 & k_1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \omega\begin{pmatrix} \pm 1 & k_2 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \omega\begin{pmatrix} \pm 1 & k_3 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = d_1 \hat{e}_{12}(\pm k_1) d_2 \hat{e}_{12}(\pm k_2) d_3 \hat{e}_{12}(\pm k_3),$$

voor zekere diagonaalmatrices d_i en gehele getallen k_i . Stelling 6.11 (5) laat toe om de drie diagonaalmatrices voorop te schuiven aan een kwadratische kost. Aangezien Δ een nulhomotoop woord is, moeten de drie niet-triviale entrees van de resterende transvecties sommeren tot nul, dus kunnen we via stelling 6.11 (1) deze termen volledig reduceren aan een kwadratische kost. De diagonaalmatrices ten slotte zijn eenvoudig: ofwel staat er drie keer de identiteitsmatrix en valt er niets aan te tonen, ofwel twee keer de matrix $d = \text{diag}(-1, -1)$ maar dan kunnen we de kost om $d^2 = I$ te reduceren door een absolute constante begrenzen. ■



Summary in English

In this project, we study a recent proof of Young ([You13]) for the fact that the special linear groups $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ have a quadratic Dehn function for any $n \geq 5$. This was known as Thurston's conjecture, now a proof by Young for the case $n \geq 5$. The original conjecture also includes the case $n = 4$, but up to today, this instance remains unsolved.

We start our project with some general facts about Lie groups, Haar measures and lattices. We proceed to investigate the theory of symmetric spaces both algebraically and geometrically, and discuss the connections between them. In particular we show that $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ is a non-positively curved symmetric space, which is crucial to Young's proof. Next, we discuss the Dehn function, again both algebraically and geometrically, and we state some variations and properties introduced by Young. We then turn our focus to the special linear groups in particular, and start up some reduction theory in order to prove the nontrivial fact that $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ is a lattice in $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. We subsequently investigate another crucial ingredient of Young's proof, a normal form expressing matrices as words in the Steinberg presentation of a particularly short length. Finally, we discuss the Dehn function of $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ for $n < 4$ (these results have been known for a long time) and the new results for $n > 4$. We also mention why the case $n = 4$ causes troubles for the proof.



Bibliografie

- [AB09] **M. Alexandrino, R. Bettiol**,
Introduction to Lie groups, isometric and adjoint actions and some generalizations.
ArXiv, <https://arxiv.org/abs/0901.2374v3>, 2009.
- [AL16] **D. Alessandrini, G. Lee**,
An example of arithmetic groups.
Seminar differentialgeometrie: geometry of Lie groups, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 2016.
- [Alo90] **J. Alonso**,
Inégalités isopérimétriques et quasi-isométries.
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Series I, vol. 311, 1990, blz. 761–764.
- [BB00] **N. Brady, M. Bridson**,
There is only one gap in the isoperimetric spectrum.
Geometric & Functional Analysis GAFA, vol. 10, no. 5, 2000, p. 1053–1070.
- [BH99] **M. Bridson, A. Häfliger**,
Metric spaces of non-positive curvature.
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [BHC61] **A. Borel, Harish-Chandra**,
Arithmetic subgroups of algebraic groups.
Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 67, no. 6, 1961, p. 579–583.
- [Bos16] **J. Bossaert**,
Automatic groups.
Universiteit Gent, project Literatuurstudie, automaticgroups.tumblr.com, 2016.
- [Bow95] **B. Bowditch**,
A short proof that a subquadratic isoperimetric inequality implies a linear one.
Michigan Mathematical Journal, vol. 42, no. 1, 1995, p. 103–107.
- [Bow05] **B. Bowditch**,
A course on geometric group theory.
University of Southampton, <http://homepages.warwick.ac.uk/~masgak>, 2005.
- [Bri02] **M. Bridson**,
The geometry of the word problem.
Invitations to Geometry and Topology, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 7, 2002, blz. 29–91.
- [BRS07] **N. Brady, T. Riley, H. Short**,
The geometry of the word problem for finitely generated groups.
Birkhäuser Basel, Advanced Courses in Mathematics–CRM Barcelona, 2007.

- [BT01] **J. Burillo, J. Taback**,
Equivalence of geometric and combinatorial Dehn functions.
ArXiv, <https://arxiv.org/abs/math/0103081>, 2001.
- [Cap14] **P.-E. Caprace**,
Lectures on proper CAT(0) spaces and their isometry groups.
American Mathematical Society, IAS/PCMS, vol. 21, 2014, blz. 91–125.
- [CG72] **J. Cheeger, D. Gromoll**,
On the structure of complete open manifolds of nonnegative curvature.
Annals of Mathematics, vol. 96, no. 3, 1972, p. 413–443.
- [Coh17] **D. Cohen**,
A Dehn function for $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Z})$.
Journal of Topology and Analysis, vol. 9, no. 225, 2017, p. 225–290.
- [DCT10] **Y. de Cornulier, R. Tessera**,
Metabelian groups with quadratic Dehn function and Baumslag–Solitar groups.
Confluentes Mathematici, vol. 2, no. 4, 2010, blz. 431–443.
- [Ebe97] **P. Eberlein**,
Geometry of nonpositively curved manifolds.
Chicago Lectures in Mathematics, 1997.
- [ECH+92] **D. Epstein, J. Cannon, D. Holt, S. Levy, M. Paterson, W. Thurston**,
Word processing in groups.
Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1992.
- [Esc97] **J. Eschenburg**,
Lecture notes on symmetric spaces.
<http://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eschenbu>, 1997.
- [Ger96] **S. Gersten**,
Introduction to hyperbolic and automatic groups.
Centre de Recherches Mathématiques Proceedings & Lecture Notes, vol. 17, Summer School in Group Theory, Banff, 1996, p. 45–70.
- [Gro87] **M. Gromov**,
Hyperbolic groups.
Springer-Verlag New York, MSRI Publications, vol. 8, Essays in Group Theory, 1987, p. 75–265.
- [Hel78] **S. Helgason**,
Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.
Academic Press, 1978.
- [Jos11] **J. Jost**,
Riemannian geometry and geometric analysis.
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [Kna02] **A. Knapp**,
Lie groups beyond an introduction.
Birkhäuser Basel, Progress in Mathematics, 2002.
- [Leu04] **E. Leuzinger**,
Tits geometry, arithmetic groups, and the proof of a conjecture of Siegel.
Journal of Lie Theory, vol. 14, no. 2, 2004, blz. 317–338.

- [LMR93] **A. Lubotzky, S. Mozes, M. Raghunathan,**
Cyclic subgroups of exponential growth and metrics on discrete groups.
 Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Series I, vol. 317, 1993, blz. 735–740.
- [Mor15] **D. Morris,**
Introduction to arithmetic groups.
 ArXiv, <https://arxiv.org/abs/math/0106063>, 2015.
- [MS39] **S. Myers, N. Steenrod,**
The group of isometries of a Riemannian manifold.
 Annals of Mathematics, Second Series, vol. 40, no. 2, 1939, blz. 400–416.
- [Pau17] **G. Paula,**
Comparison of volumes of Siegel sets and fundamental domains for $SL(n, \mathbb{Z})$.
 ArXiv, <https://arxiv.org/abs/1604.03613>, 2017.
- [Ril05] **T. Riley,**
Navigating in the Cayley graphs of $SL(n, \mathbb{Z})$ and $SL(n, \mathbb{F}_p)$.
 ArXiv, <https://arxiv.org/abs/math/0504091>, 2005.
- [Ste62] **R. Steinberg,**
Générateurs, relations, et revêtements de groupes algébriques.
 Colloque sur la théorie des groupes algébriques, Bruxelles, 1962, p. 113-127.
- [Ter88] **A. Terras,**
Harmonic analysis on symmetric spaces and applications (II).
 Springer-Verlag New York, 1988.
- [Ven10] **T. Venkataramana,**
Lattices in Lie groups.
 Workshop on Geometric Group Theory, Goa University, India, 2010.
- [You09] **R. Young,**
A polynomial isoperimetric inequality for $SL(n, \mathbb{Z})$.
 ArXiv, <https://arxiv.org/abs/0903.2495>, 2009.
- [You13] **R. Young,**
The Dehn function of $SL(n, \mathbb{Z})$.
 Annals of Mathematics, vol. 177, 2013, blz. 969–1027.
- [Zil10] **W. Ziller,**
Lie groups, representation theory and symmetric spaces.
 University of Pennsylvania, <https://www.math.upenn.edu/~wziller>, 2010.

