Een inleiding tot de theorie van *latin bitrades*

Jens Bossaert
Universiteit Gent
Seminarie

Latijnse vierkanten

Definieer drie verzamelingen van symbolen:

- rijsymbolen $R = \{r_1, \ldots, r_{n_R}\}$;
- kolomsymbolen $C = \{c_1, \ldots, c_{n_C}\}$;
- "symboolsymbolen" $S = \{s_1, \ldots, s_{n_S}\}$.

Latijnse vierkanten

Latijns vierkant van **orde *n***:
$T \subset R \times C \times S$ waarvoor geldt dat

- $(r, c, s), (r, c, s') \in T \Rightarrow s = s'$;
- $(r, c, s), (r, c', s) \in T \Rightarrow c = c'$;
- $(r, c, s), (r', c, s) \in T \Rightarrow r = r'$;
- $(\forall\, r, c)(\exists\, s)((r, c, s) \in T)$;
- $|R| = |C| = |S| = n$.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Latijnse vierkanten

Partieel Latijns vierkant:
$T \subset R \times C \times S$ waarvoor geldt dat

- $(r, c, s), (r, c, s') \in T \Rightarrow s = s'$;
- $(r, c, s), (r, c', s) \in T \Rightarrow c = c'$;
- $(r, c, s), (r', c, s) \in T \Rightarrow r = r'$.

1			4
			3
	4		
4	3	2	

Orde: $\max(|R|, |C|, |S|)$.

Merk op: T niet noodzakelijk deel van Latijns vierkant van zelfde orde!

Latijnse vierkanten

Partieel Latijns vierkant:

$T \subset R \times C \times S$ waarvoor geldt dat

- $(r, c, s), (r, c, s') \in T \Rightarrow s = s'$;
- $(r, c, s), (r, c', s) \in T \Rightarrow c = c'$;
- $(r, c, s), (r', c, s) \in T \Rightarrow r = r'$.

1			4
			3
	4		
4	3	2	

Orde: $\max(|R|, |C|, |S|)$.

Merk op: T niet noodzakelijk deel van Latijns vierkant van zelfde orde!

Latijnse vierkanten

Partieel Latijns vierkant:

$T \subset R \times C \times S$ waarvoor geldt dat

- $(r, c, s), (r, c, s') \in T \Rightarrow s = s'$;
- $(r, c, s), (r, c', s) \in T \Rightarrow c = c'$;
- $(r, c, s), (r', c, s) \in T \Rightarrow r = r'$.

1			4
			3
	4		
4	3	2	

Orde: $\max(|R|, |C|, |S|)$.

Merk op: T niet noodzakelijk deel van Latijns vierkant van zelfde orde!

Equivalentierelaties

Isotopisme:
bijecties $(R_1 \to R_2)$, $(C_1 \to C_2)$ en $(S_1 \to S_2)$ geven *isotope* T_1 en T_2.

Autotopisme:
permutaties op R, C en S geven *autotope* T_1 en T_2.

Parastrofisme:
een permutatie van $\{R, C, S\}$ geeft *parastrofe* T_1 en T_2.

Equivalentierelaties

Isotopisme:
bijecties $(R_1 \to R_2)$, $(C_1 \to C_2)$ en $(S_1 \to S_2)$ geven *isotope* T_1 en T_2.

Autotopisme:
permutaties op R, C en S geven *autotope* T_1 en T_2.

Parastrofisme:
een permutatie van $\{R, C, S\}$ geeft *parastrofe* T_1 en T_2.

Equivalentierelaties

Isotopisme:
bijecties $(R_1 \to R_2)$, $(C_1 \to C_2)$ en $(S_1 \to S_2)$ geven *isotope* T_1 en T_2.

Autotopisme:
permutaties op R, C en S geven *autotope* T_1 en T_2.

Parastrofisme:
een permutatie van $\{R, C, S\}$ geeft *parastrofe* T_1 en T_2.

Latin bitrades

Definitie 1

Latin bitrade:
een koppel partiële Latijnse vierkanten (T, T') waarvoor geldt:

- T en T' gebruiken dezelfde cellen;
- T en T' zijn disjunct (geen overlappende symbolen);
- elke kolom of rij in T bevat dezelfde symbolen als in T'.

	2	3	4
2	1	4	
3		1	2
4	3		1

	3	4	2
4	2	1	
2		3	1
3	1		4

Definitie 2

Latin bitrade:
een koppel (T, T') met $T, T' \subset R \times C \times S$ zodat voor elke $(r, c, s) \in T$ unieke $r' \neq r, c' \neq c, s' \neq s$ bestaan met $(r', c, s) \in T'$, $(r, c', s) \in T'$ en $(r, c, s') \in T'$, en vice versa.

	2	3	4
2	1	4	
3		1	2
4	3		1

	3	4	2
4	2	1	
2		3	1
3	1		4

Latin bitrades

Definitie 3

Latin bitrade:
een koppel van de vorm $(L \setminus L', L' \setminus L)$ met L, L' Latijnse vierkanten.

	2	3	4
2	1	4	
3		1	2
4	3		1

	3	4	2
4	2	1	
2		3	1
3	1		4

Samenhangende bitrades

Primaire of **samenhangende** latin bitrade:
latin bitrade (T, T') zodat voor elke latin bitrade (U, U') met $U \subseteq T$ en $U' \subseteq T'$ geldt dat $U = T$ en $U' = T'$.

Merk op: elke latin bitrade te partitioneren in primaire bitrades.

Minimale latin trade:
latin trade T zodat voor elke latin trade $U \subseteq T$ geldt dat $U = T$.

Merk op: $\begin{cases} T \text{ minimaal} \Rightarrow (T, T') \text{ samenhangend;} \\ (T, T') \text{ samenhangend} \not\Rightarrow T \text{ minimaal.} \end{cases}$

Samenhangende bitrades

Primaire of **samenhangende** latin bitrade:
latin bitrade (T, T') zodat voor elke latin bitrade (U, U')
met $U \subseteq T$ en $U' \subseteq T'$ geldt dat $U = T$ en $U' = T'$.

Merk op: elke latin bitrade te partitioneren in primaire bitrades.

Minimale latin trade:
latin trade T zodat voor elke latin trade $U \subseteq T$ geldt dat $U = T$.

Merk op: $\begin{cases} T \text{ minimaal} \Rightarrow (T, T') \text{ samenhangend;} \\ (T, T') \text{ samenhangend} \not\Rightarrow T \text{ minimaal.} \end{cases}$

Permutaties $\tau_\bullet$

Definieer volgende drie bijecties $T \to T'$:

- $\beta_R : (r, c, s) \mapsto (r', c, s)$;
- $\beta_C : (r, c, s) \mapsto (r, c', s)$;
- $\beta_S : (r, c, s) \mapsto (r, c, s')$.

Definieer hieruit drie permutaties op T:

- $\tau_R = \beta_S^{-1} \circ \beta_C$;
- $\tau_C = \beta_R^{-1} \circ \beta_S$;
- $\tau_S = \beta_C^{-1} \circ \beta_R$.

Permutaties τ.

Definieer volgende drie bijecties $T \to T'$:

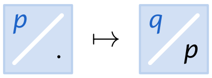
- $\beta_R : (r, c, s) \mapsto (r', c, s)$;
- $\beta_C : (r, c, s) \mapsto (r, c', s)$;
- $\beta_S : (r, c, s) \mapsto (r, c, s')$.

Definieer hieruit drie permutaties op T:

- $\tau_R = \beta_S^{-1} \circ \beta_C$;
- $\tau_C = \beta_R^{-1} \circ \beta_S$;
- $\tau_S = \beta_C^{-1} \circ \beta_R$.

Permutaties $\tau_\bullet$

$$\tau_R = \beta_S^{-1} \circ \beta_C$$

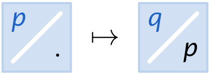


$$\tau_C = \beta_R^{-1} \circ \beta_S$$

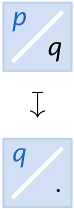
$$\tau_S = \beta_C^{-1} \circ \beta_R$$

Permutaties $\tau_\bullet$

$$\tau_R = \beta_S^{-1} \circ \beta_C$$



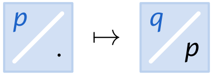
$$\tau_C = \beta_R^{-1} \circ \beta_S$$



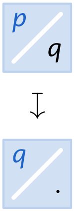
$$\tau_S = \beta_C^{-1} \circ \beta_R$$

Permutaties $\tau_\bullet$

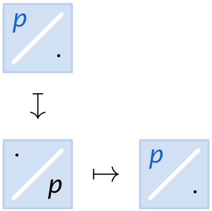
$$\tau_R = \beta_S^{-1} \circ \beta_C$$



$$\tau_C = \beta_R^{-1} \circ \beta_S$$

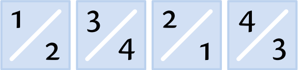


$$\tau_S = \beta_C^{-1} \circ \beta_R$$



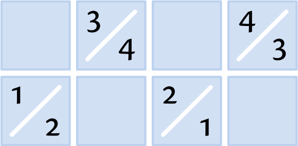
Gescheiden bitrades

Gescheiden (*separated*) latin bitrade:
latin bitrade waarvoor elk element van R, C en S correspondeert met een enkele cykel in τ_R, τ_C en τ_S.



niet-gescheiden rij

$\Rightarrow$



twee gescheiden rijen

Eigenschappen van $\tau_\bullet$

Deze permutaties $\tau_\bullet$ voldoen aan volgende eigenschappen:

1. $\tau_S \circ \tau_C \circ \tau_R$ is de identiteit;
2. τ_R, τ_C en τ_S hebben geen fixpunten;
3. twee cykels van twee verschillende $\tau_\bullet$ bewegen hoogstens één gemeenschappelijk element van T.

De groep $\langle \tau_R, \tau_C, \tau_S \rangle$ werkt transitief op T als en slechts als (T, T') samenhangend is.

Drápal (2003) [5]:
Permutaties $\{\tau_R, \tau_C, \tau_S\}$ met deze drie eigenschappen zijn equivalent met gescheiden latin bitrades, modulo isotopie.

Eigenschappen van $\tau_\bullet$

Deze permutaties $\tau_\bullet$ voldoen aan volgende eigenschappen:

1. $\tau_S \circ \tau_C \circ \tau_R$ is de identiteit;
2. τ_R, τ_C en τ_S hebben geen fixpunten;
3. twee cykels van twee verschillende $\tau_\bullet$ bewegen hoogstens één gemeenschappelijk element van T.

De groep $\langle \tau_R, \tau_C, \tau_S \rangle$ werkt transitief op T
als en slechts als (T, T') samenhangend is.

Drápal (2003) [5]:
Permutaties $\{\tau_R, \tau_C, \tau_S\}$ met deze drie eigenschappen zijn equivalent met gescheiden latin bitrades, modulo isotopie.

Eigenschappen van $\tau_\bullet$

Deze permutaties $\tau_\bullet$ voldoen aan volgende eigenschappen:

1. $\tau_S \circ \tau_C \circ \tau_R$ is de identiteit;
2. τ_R, τ_C en τ_S hebben geen fixpunten;
3. twee cykels van twee verschillende $\tau_\bullet$ bewegen hoogstens één gemeenschappelijk element van T.

De groep $\langle \tau_R, \tau_C, \tau_S \rangle$ werkt transitief op T
als en slechts als (T, T') samenhangend is.

Drápal (2003) [5]:
Permutaties $\{\tau_R, \tau_C, \tau_S\}$ met deze drie eigenschappen zijn equivalent met gescheiden latin bitrades, modulo isotopie.

Genus

Definieer een gerichte graaf G met toppen $R \sqcup C \sqcup S$
en bogen (r, c), (c, s) en (s, r) voor elke $(r, c, s) \in T$ (of T').

Kleur vlak (r, c, s) zwart of wit, naargelang $(r, c, s) \in T$ of $(r, c, s) \in T'$.

Dus G blijkt een vlak-2-kleurbare triangulatie van een oriënteerbaar oppervlak, en kunnen we een Eulerkarakteristiek (genus) toekennen:

$$\begin{aligned} g &= (2 + e - f - v)/2 \\ &= (2 + |T| - |R| - |C| - |S|)/2. \end{aligned}$$

Genus

Definieer een gerichte graaf G met toppen $R \sqcup C \sqcup S$
en bogen (r,c), (c,s) en (s,r) voor elke $(r,c,s) \in T$ (of T').

Kleur vlak (r,c,s) zwart of wit, naargelang $(r,c,s) \in T$ of $(r,c,s) \in T'$.

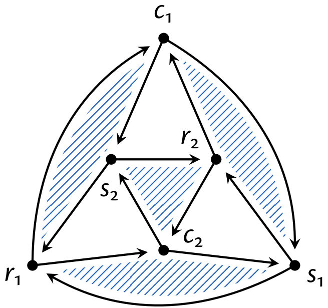
Dus G blijkt een vlak-2-kleurbare triangulatie van een oriënteerbaar oppervlak, en kunnen we een Eulerkarakteristiek (genus) toekennen:

$$\begin{aligned} g &= (2 + e - f - v)/2 \\ &= (2 + |T| - |R| - |C| - |S|)/2. \end{aligned}$$

Genus

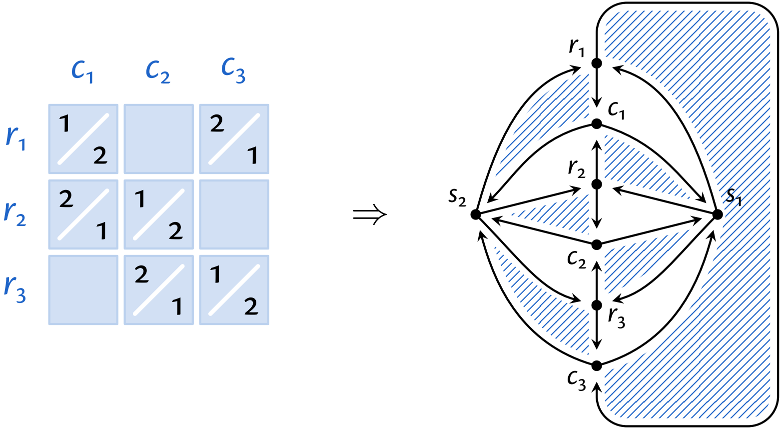
	c_1	c_2
r_1	1 / 2	2 / 1
r_2	2 / 1	1 / 2

$\Rightarrow$

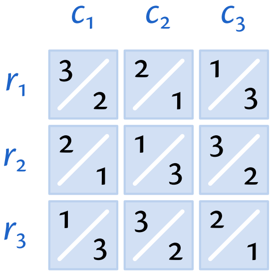


Genus

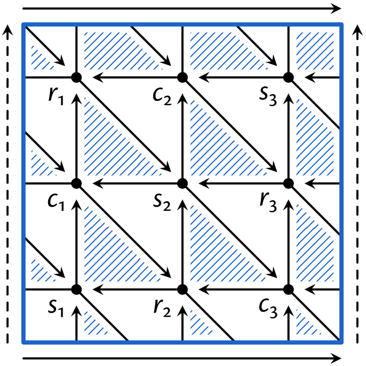
Genus 0



Genus



$\Rightarrow$



Planaire bitrades

Planaire (of ***spherical***) latin bitrade:
samenhangende, gescheiden latin bitrade met genus 0,
dus met numerieke voorwaarde $|R| + |C| + |S| = |T| + 2$.

Cavenagh, Lisoněk (2008) [4]:
Planaire Euleriaanse triangulaties (op v toppen, modulo isomorfisme) zijn equivalent met planaire latin bitrades (van grootte $v - 2$, modulo isotopie en parastrofie, ongeordend).

Batagelj, Brinkmann, McKay [2]:
Er bestaat een snel algoritme om alle planaire Euleriaanse triangulaties eenmalig te genereren (modulo isomorfisme).

Planaire bitrades

Planaire (of ***spherical***) latin bitrade:
samenhangende, gescheiden latin bitrade met genus 0,
dus met numerieke voorwaarde $|R| + |C| + |S| = |T| + 2$.

Cavenagh, Lisoněk (2008) [4]:
Planaire Euleriaanse triangulaties (op v toppen, modulo isomorfisme) zijn equivalent met planaire latin bitrades (van grootte $v - 2$, modulo isotopie en parastrofie, ongeordend).

Batagelj, Brinkmann, McKay [2]:
Er bestaat een snel algoritme om alle planaire Euleriaanse triangulaties eenmalig te genereren (modulo isomorfisme).

Planaire bitrades

Planaire (of ***spherical***) latin bitrade:
samenhangende, gescheiden latin bitrade met genus 0,
dus met numerieke voorwaarde $|R| + |C| + |S| = |T| + 2$.

Cavenagh, Lisoněk (2008) [4]:
Planaire Euleriaanse triangulaties (op v toppen, modulo isomorfisme) zijn equivalent met planaire latin bitrades (van grootte $v - 2$, modulo isotopie en parastrofie, ongeordend).

Batagelj, Brinkmann, McKay [2]:
Er bestaat een snel algoritme om alle planaire Euleriaanse triangulaties eenmalig te genereren (modulo isomorfisme).

Inbedding in een groep

Inbedding van een partieel Latijns vierkant T in een groep $(G, *)$:

- injectie $f : R \sqcup C \sqcup S \hookrightarrow G$ zodat alle $(r, c, s) \in T$ voldoen aan de identiteit $f(r) * f(c) = f(s)$,

of equivalent:

- isotopie naar partieel Latijns vierkant in de Cayleytabel van G.

Quadrangle criterion

Quadrangle criterion:
als (r_1, c_1, s_1), (r_1, c_2, s_2), (r_2, c_1, s_3), (r_1', c_1', s_1), (r_1', c_2', s_2) en (r_2', c_1', s_3) zes verschillende cellen van T zijn, dan moeten de cellen (r_2, c_2) en (r_2', c_2') hetzelfde symbool bevatten.

$$\begin{array}{c|c|c|} & c_1 & c_2 \\ \hline r_1 & s_1 & s_2 \\ \hline r_2 & s_3 & \star \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c} c_1' & c_2' & \\ \hline s_1 & s_2 & r_1' \\ \hline s_3 & \star & r_2' \\ \hline \end{array}$$

Nodige voorwaarde voor inbedbaarheid in een groep.
Voor Latijnse vierkanten: ook voldoende voorwaarde.

Quadrangle criterion

Quadrangle criterion:
als (r_1, c_1, s_1), (r_1, c_2, s_2), (r_2, c_1, s_3), (r_1', c_1', s_1), (r_1', c_2', s_2) en (r_2', c_1', s_3) zes verschillende cellen van T zijn, dan moeten de cellen (r_2, c_2) en (r_2', c_2') hetzelfde symbool bevatten.

$$\begin{array}{c|c|c|} & c_1 & c_2 \\ \hline r_1 & s_1 & s_2 \\ \hline r_2 & s_3 & \star \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c} c_1' & c_2' & \\ \hline s_1 & s_2 & r_1' \\ \hline s_3 & \star & r_2' \\ \hline \end{array}$$

Nodige voorwaarde voor inbedbaarheid in een groep.
Voor Latijnse vierkanten: ook voldoende voorwaarde.

Quadrangle criterion

0	1	2	3
1	2	3	0
2	0	1	

1	2	3	0
2	0	1	3
0	1	2	

Kleinste latin bitrade (T, T') met T noch T' inbedbaar in een groep.

Gekende resultaten

- Voor elke planaire bitrade (T, T') zijn zowel T als T' inbedbaar in dezelfde eindige abelse groep.
- Voor elk genus $g \geqslant 1$ bestaan er enerzijds bitrades (T, T') met T inbedbaar in geen enkele groep, en anderzijds bitrades met T inbedbaar in een cyclische groep.

Definities 1

Permutatiestructuur 2

Topologische structuur 3

4 Inbeddingen

5 **Toepassingen**

6 Bronnen

Kritieke verzamelingen

Kritieke verzameling:
partieel Latijns vierkant K van orde n, dat

1. *uniek* uitbreidbaar is tot een Latijns vierkant $L = \overline{K}$ van orde n (als $K \subset L'$ met L' een Latijns vierkant, dan is $L' = L$);
2. minimaal is met betrekking tot deze eigenschap (voor alle $K' \subset K$ bestaat een Latijns vierkant $L' \neq L$ met $K' \subset L'$).

Merk op: voor elke latin trade $T \subset \overline{K}$ moet $|K \cap T| \geqslant 1$, en voor elke $k \in K$ bestaat een unieke (minimale) latin trade T zodat $|K \cap T| = 1$.

Kritieke verzamelingen

Kritieke verzameling:
partieel Latijns vierkant K van orde n, dat

1. *uniek* uitbreidbaar is tot een Latijns vierkant $L = \overline{K}$ van orde n (als $K \subset L'$ met L' een Latijns vierkant, dan is $L' = L$);
2. minimaal is met betrekking tot deze eigenschap (voor alle $K' \subset K$ bestaat een Latijns vierkant $L' \neq L$ met $K' \subset L'$).

Merk op: voor elke latin trade $T \subset \overline{K}$ moet $|K \cap T| \geqslant 1$, en voor elke $k \in K$ bestaat een unieke (minimale) latin trade T zodat $|K \cap T| = 1$.

Kritieke verzamelingen

Open problemen:

- *Minimale* grootte voor orde n?
  (vermoeden: $|K| \geqslant \lfloor n^2/4 \rfloor$)
- *Maximale* grootte voor orde n?
- Voor welke t en n bestaat een kritieke verzameling van grootte t en orde n?

0	1			
1				
				2
			2	3

Random Latijnse vierkanten

1. Start met een specifiek Latijns vierkant L;
2. selecteer (at random) een latin trade T in L en vervang door T';
3. herhaal “voldoende vaak”.

Mits goedgekozen klassen van bitrades (T, T'):
Markovketen die een uniform random Latijns vierkant genereert.

Random Latijnse vierkanten

1. Start met een specifiek Latijns vierkant L;
2. selecteer (at random) een latin trade T in L en vervang door T';
3. herhaal "voldoende vaak".

Mits goedgekozen klassen van bitrades (T, T'):
Markovketen die een uniform random Latijns vierkant genereert.

Definities 1

Permutatiestructuur 2

Topologische structuur 3

4 Inbeddingen

5 Toepassingen

6 Bronnen

[1] Blackburn, S., McCourt, T., *Triangulations of the sphere, bitrades and abelian groups*. Combinatorica, vol. 34, no. 5 (2014), p. 527-546.

[2] Brinkmann, G., McKay, B., *Guide to using* PLANTRI (version 4.5). http://cs.anu.edu.au/~bdm/plantri/.

[3] Cavenagh, N., *The theory and application of latin bitrades: a survey*. Mathematica Slovaca, vol. 58, no. 6 (2008), p. 691-718.

[4] Cavenagh, N., Lisoněk, P., *Planar Eulerian triangulations are equivalent to spherical latin bitrades*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, vol. 115 (2008), p. 193-197.

[5] Drápal, A., *Geometrical structure and construction of latin trades*. Advanced Geometry, vol. 9, no. 3 (2009), p. 311-348.

[6] Drápal, A., Hämäläinen, C., Kala, V., *Latin bitrades, dissections of equilateral triangles, and abelian groups*. Journal of Combinatorial Designs, vol. 18, no. 1 (2010), p. 1-24.

0 / 4	1	2 / 0	3	4 / 6	5	6 / 2	7
1	0 / 4	3	2 / 0	5	4 / 6	7	6 / 2
2	3 / 0	0 / 5	1	6 / 3	7	4	5 / 6
3 / 0	2	1	0 / 5	7	6 / 3	5 / 6	4
4 / 7	5	6	7 / 2	0	1 / 4	2 / 1	3
5	4 / 7	7 / 2	6	1 / 4	0	3	2 / 1
6	7 / 3	4	5 / 7	2	3 / 1	0	1 / 5
7 / 3	6	5 / 7	4	3 / 1	2	1 / 5	0