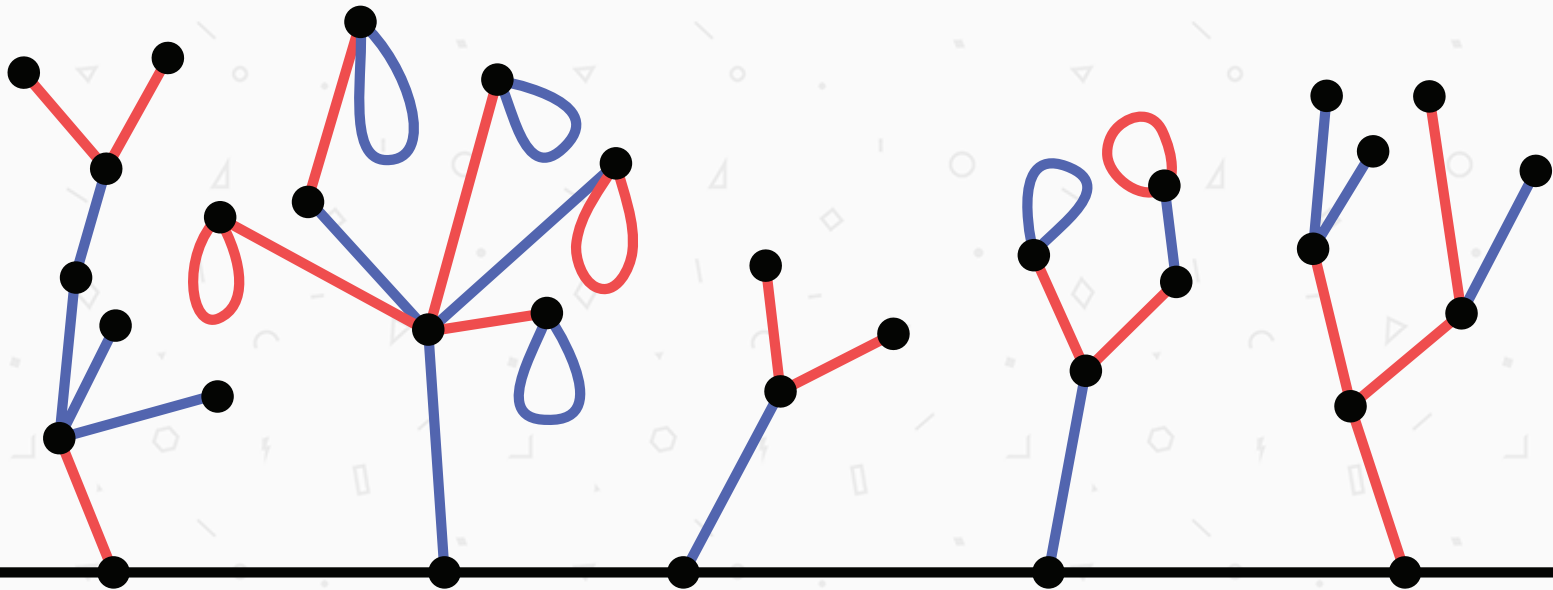


PRIME

Hackenbush

Jens Bossaert
15 oktober 2013



Hackenbush

Introductie

- ***“Winning Ways for your Mathematical Plays”***
 - Elwyn Berlekamp
 - John Conway
 - Richard Guy
- ***“On Numbers and Games”***
 - John Conway
- ***“Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness”***
 - Donald Knuth

Hackenbush

Eigenschappen

- **Wiskundig spel voor twee spelers**
 - Sequentieel
(gespeeld in beurten)
 - Strategisch
(geen geluk vereist)
 - Perfecte informatie
(geen achtergehouden gegevens)
 - Partizaan
(niet alle zetten beschikbaar voor elke speler)

Hackenbush

Spelregels

Hackenbushpositie

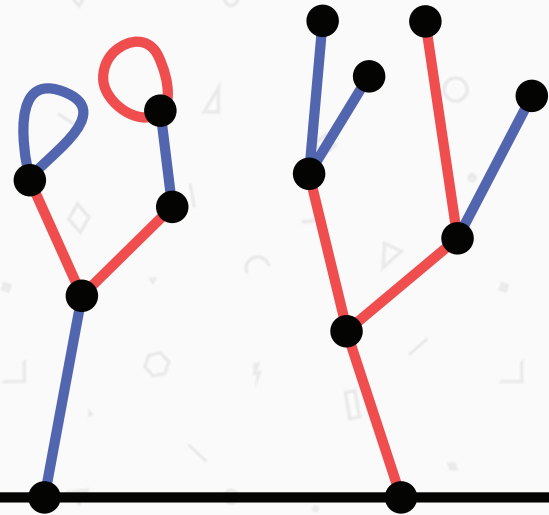
- In theorie:
 - Samenhangende graaf
 - Rood- / blauwgekleurde bogen
 - Eén speciale top (“grond”)

Hackenbush

Spelregels

Hackenbushpositie

- In theorie:
 - Samenhangende graaf
 - Rood- / blauwgekleurde bogen
 - Eén speciale top (“grond”)
- In praktijk:

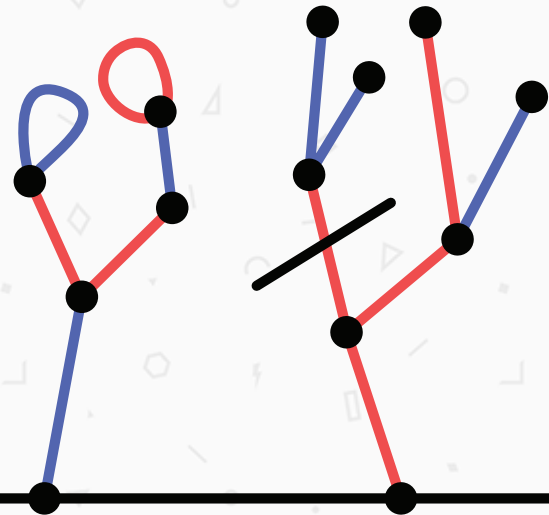


Hackenbush

Spelregels

Legale zet

- Knip een lijnsegment van de eigen kleur door.
- Dit segment verdwijnt, samen met alle van de grond losgesneden stukken.

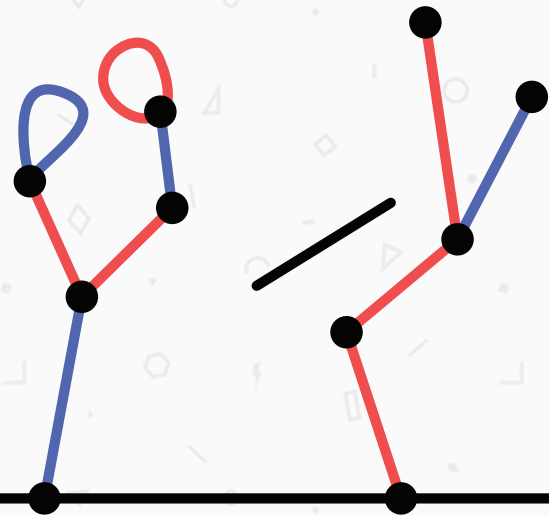


Hackenbush

Spelregels

Legale zet

- Knip een lijnsegment van de eigen kleur door.
- Dit segment verdwijnt, samen met alle van de grond losgesneden stukken.

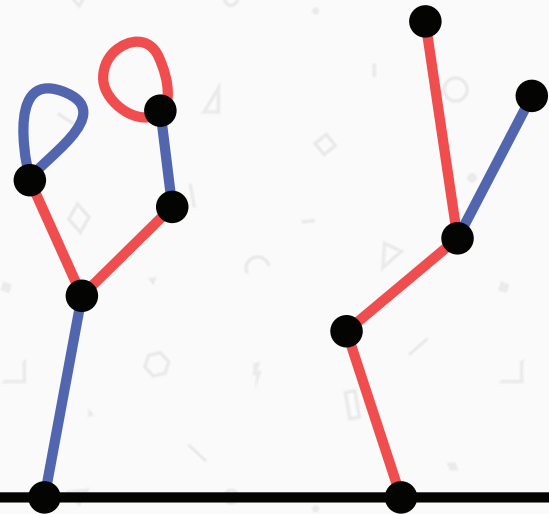


Hackenbush

Spelregels

Speleinde

- Wie als eerste geen segment in zijn kleur meer kan doorknippen, verliest.
- Hoe meer segmenten de winnende speler nog over heeft, hoe groter zijn score.



Voorbeelden

Tijd om te spelen!

Analyse

Op naar surreële getallen

Analyse

Strategie

- Identificatie van Hackenbushposities met “getallen” G :
 - $G > o$: winnende strategie voor blauw
 - $G < o$: winnende strategie voor rood
 - $G = o$: winnende strategie voor *tweede speler*

Analyse

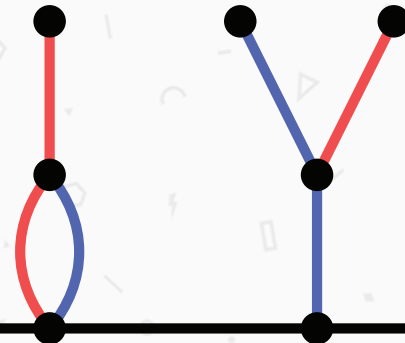
Strategie

- Identificatie van Hackenbushposities met “getallen” G :
 - $G > 0$: winnende strategie voor blauw
 - $G < 0$: winnende strategie voor rood
 - $G = 0$: winnende strategie voor *tweede speler*
- Beste strategie:
 - Blauw: herleiden naar meest positieve getal
 - Rood: herleiden naar meest negatieve getal

Analyse

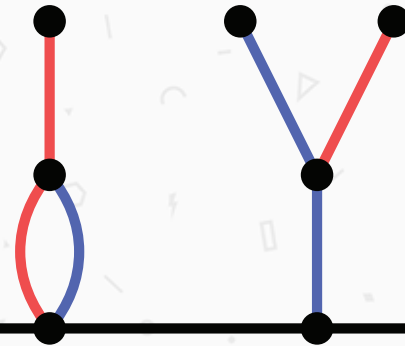
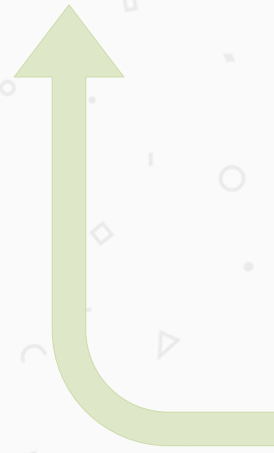
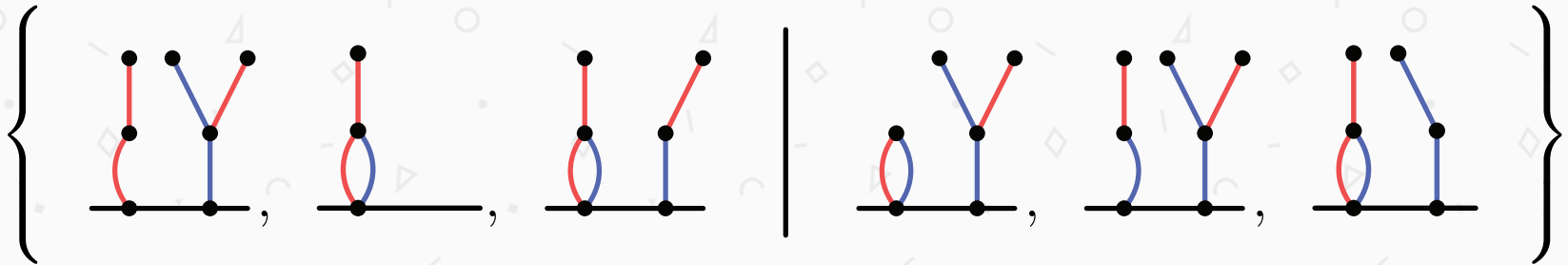
Notatie

- Mogelijke zetten voor **Links**: L1, L2 ...
- Mogelijke zetten voor **Rechts**: R1, R2 ...
- Positie = { L1, L2 ... | R1, R2 ... }
- Recursief terugwerken tot leeg speelveld



Analyse

Notatie



Analyse

De eerste getallen

- Leeg speelveld
 - Blauw: verloren
 - Rood: verloren
 - $\{ | \} = \mathbf{o}$

Analyse

De eerste getallen

- Eén blauw segment

- Blauw: nog één zet
- Rood: verloren

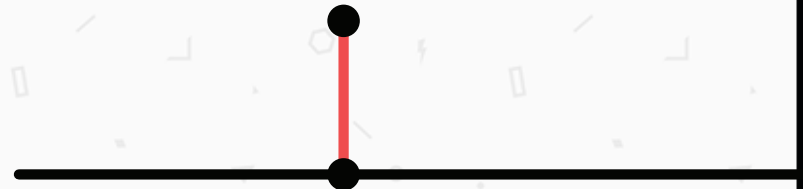
– $\{ \mathbf{0} \mid \} = \mathbf{1}$



- Eén rood segment

- Rood: nog één zet
- Blauw: verloren

– $\{ \mid \mathbf{0} \} = \mathbf{-1}$



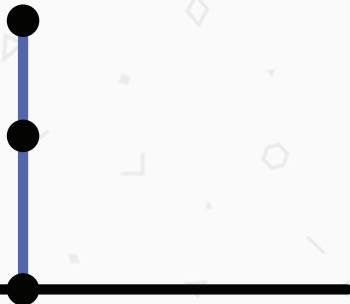
Analyse

De eerste getallen

- Twee blauwe segmenten

- Blauw: nog twee zetten
- Rood: verloren

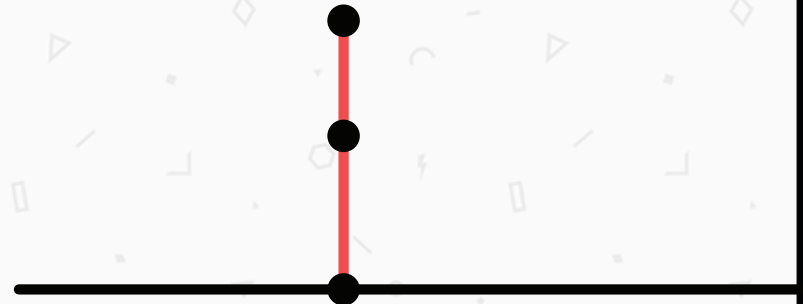
– $\{ \mathbf{0, 1} \mid \} = \mathbf{2}$



- Twee rode segmenten

- Rood: nog twee zetten
- Blauw: verloren

– $\{ \mid \mathbf{-1, 0} \} = \mathbf{-2}$



Analyse

De eerste getallen

- Blauw + rood segment
 - Blauw: één zet
 - Rood: één zet
 - Tweede speler wint
 - $\{-1 \mid 1\} = 0$
 - Vertolkt “ $-1 + 1 = 0$ ”



Analyse

De eerste breuken

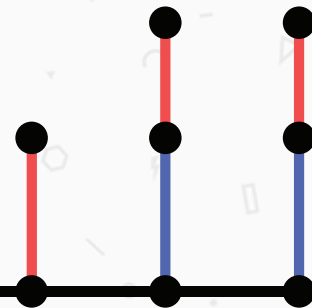
- Blauw + rood segment
 - Blauw: één, winnende zet
 - Rood: één, verliezende zet
 - Duidelijk > 0 , maar minder voordeel voor blauw
 - $\{ 0 \mid 1 \} = 1/2$



Analyse

De eerste breuken

- Blauw + rood segment
 - Blauw: één, winnende zet
 - Rood: één, verliezende zet
 - Duidelijk > 0 , maar minder voordeel voor blauw
 - $\{0 \mid 1\} = 1/2$
 - Inderdaad: $-1 + \{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} = 0$



Analyse

Observaties

- Getallen optellen: teken Hackenbushposities naast elkaar
- Getallen tegenstellen: wissel rood en blauw om
- Zelfde getallen hebben meerdere notaties, zoals $\{-1 \mid 1\} = \{\mid\} = 0$
- $\{a \mid b\}$ is het “eenvoudigste” getal tussen a en b

Surreële getallen

Rigoreuze invoering

Surreële getallen

Definities

Surreëel getal

- Een *surreëel getal* is een koppel verzamelingen L en R van surreële getallen, waarbij geen enkel element van R kleiner is dan of gelijk is aan een element van L.
- Notatie: $\{ L \mid R \}$
- Merk op: recursief

Surreële getallen

Definities

Kleiner dan of gelijk aan

- Een surreëel getal x is *kleiner dan of gelijk aan* een surreëel getal y als en slechts als:
 - y kleiner is dan of gelijk aan geen enkel element van de linkerset van x ,
 - en geen enkel element van de rechterset van y kleiner is dan of gelijk aan x .
- Notatie: \leq
- Volstaat om andere relaties te definiëren

Surreële getallen

Dag 0

- Nog geen surreële getallen bekend
- Eerste surreële getal uit lege verzamelingen: $\{ \}$
- Notatie: $\{ \} = \mathbf{o}$
- Er geldt: $\mathbf{o} \leq \mathbf{o}$

Surreële getallen

Dag 1

- Twee nieuwe getallen:

- $\{ \mathbf{o} \mid \}$

- $\{ \mid \mathbf{o} \}$

Merk op dat $\{ \mathbf{o} \mid \mathbf{o} \}$ niet voldoet aan de definitie!

- Er geldt:

- $\mathbf{o} \leq \{ \mathbf{o} \mid \}$

- $\{ \mid \mathbf{o} \} \leq \mathbf{o}$

- Notatie:

- $\{ \mathbf{o} \mid \} = \mathbf{1}$

- $\{ \mid \mathbf{o} \} = \mathbf{-1}$

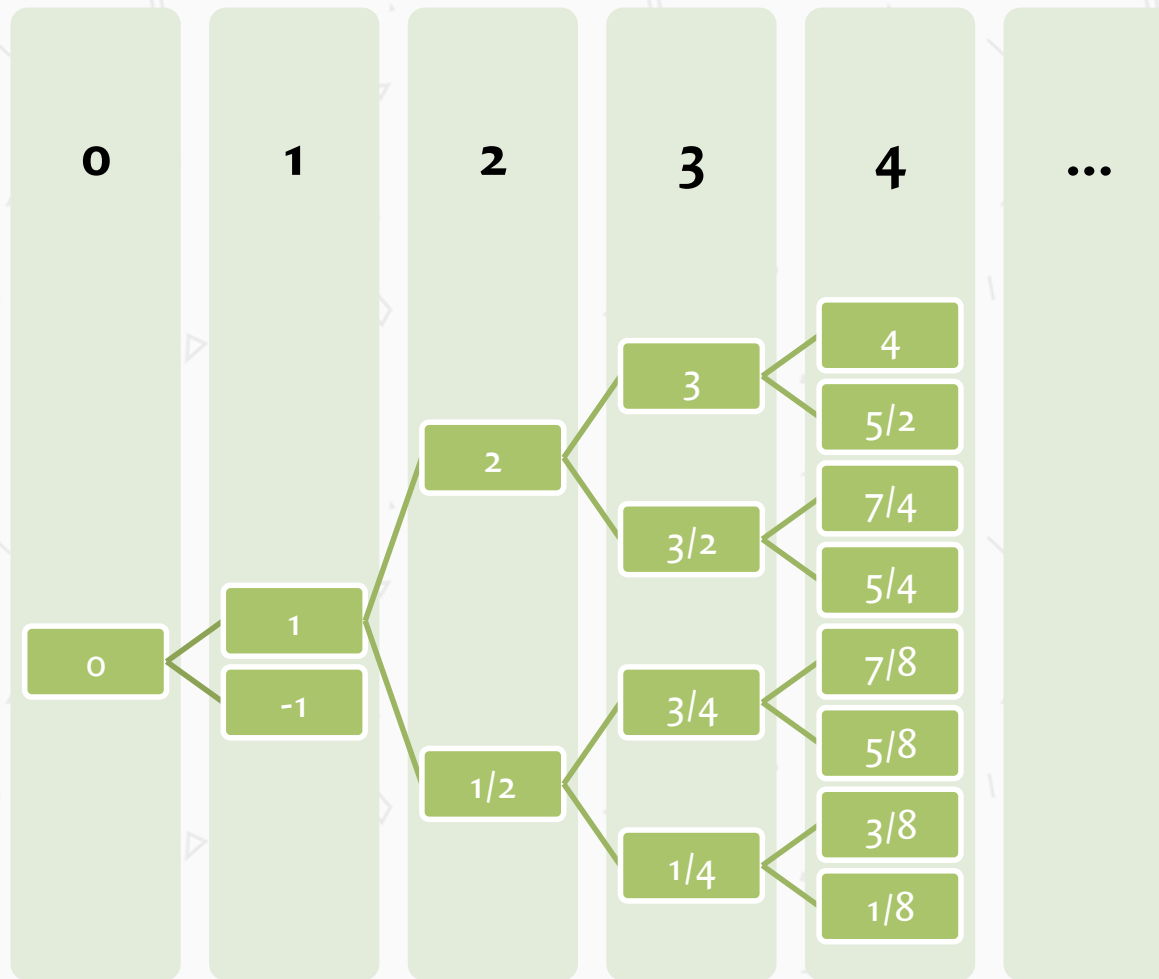
Surreële getallen

Dag 2

- 17 nieuwe getallen:
 - $\{ \mathbf{1} \mid \} = \{ \mathbf{0}, \mathbf{1} \mid \} = \{ \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \mid \} = \{ \mathbf{-1}, \mathbf{1} \mid \} = \mathbf{2}$
 - $\{ \mathbf{-1}, \mathbf{0} \mid \} = \mathbf{1}$
 - $\{ \mathbf{0} \mid \mathbf{1} \} = \{ \mathbf{-1}, \mathbf{0} \mid \mathbf{1} \} = \mathbf{1/2}$
 - $\{ \mathbf{-1} \mid \} = \{ \mid \mathbf{1} \} = \{ \mathbf{-1} \mid \mathbf{1} \} = \mathbf{0}$
 - $\{ \mathbf{-1} \mid \mathbf{0} \} = \{ \mathbf{-1} \mid \mathbf{0}, \mathbf{1} \} = \mathbf{-1/2}$
 - $\{ \mid \mathbf{0}, \mathbf{1} \} = \mathbf{-1}$
 - $\{ \mid \mathbf{-1} \} = \{ \mid \mathbf{-1}, \mathbf{0} \} = \{ \mid \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \} = \{ \mid \mathbf{-1}, \mathbf{1} \} = \mathbf{-2}$
- Getallen hebben géén unieke schrijfwijze!

Surreële getallen

Overzicht



Surreële getallen

Simpel, niet?

Simpliciteitsstelling

- $\{a \mid b\}$ heeft als waarde het *simpelste* getal groter dan **a** en kleiner dan **b**, d.w.z. het getal dat het vroegst geconstrueerd werd.

Surreële getallen

Simpel, niet?

Simpliciteitsstelling

- $\{ a \mid b \}$ heeft als waarde het *simpelste* getal groter dan a en kleiner dan b , d.w.z. het getal dat het vroegst geconstrueerd werd.
- Bijvoorbeeld: $3/4$ werd eerder geconstrueerd dan $7/8$, dus $\{ 5/8 \mid 1 \} = 3/4$.
- Enkel het grootste getal uit de linker- en het kleinste getal uit de rechterverzameling zijn nodig om een surreëel getal te bepalen.

Surreële getallen

Aritmetica

- Noteer L^x en R^x voor de linker-, resp. rechterverzameling van een surreëel getal x .

Tegenstelling

- $-x = \{ -R^x \mid -L^x \}$
- Blijkt onafhankelijk van gekozen representatie
- Vb. $-(-1) = -(\{ -2 \mid -1/2, 0 \}) = \{ 0, 1/2 \mid 2 \} = 1$

Surreële getallen

Aritmetica

- Noteer L^x en R^x voor de linker-, resp. rechterverzameling van een surreëel getal x .

Optelling

- $x + y = \{ L^x + y, x + L^y \mid R^x + y, x + R^y \}$
- Blijkt onafhankelijk van gekozen representatie
- Vb. $1/2 + 1 = \{ 0 \mid 1 \} + \{ 0 \mid \} = \{ 1, 1/2 \mid 2 \} = 3/2$

Surreële getallen

Aritmetica

- Noteer L^x en R^x voor de linker-, resp. rechterverzameling van een surreëel getal x .

Vermenigvuldiging

- $x \cdot y = \left\{ \begin{array}{l} L^x \cdot y + x \cdot L^y - L^x \cdot L^y, R^x \cdot y + x \cdot R^y - R^x \cdot R^y \mid \\ L^x \cdot y + x \cdot R^y - L^x \cdot R^y, R^x \cdot y + x \cdot L^y - R^x \cdot L^y \end{array} \right\}$

Surreële getallen

To infinity...

- Alle gehele getallen zijn surreële getallen, dus ook $\{1, 2, 3, 4, 5 \dots \mid\}$ is een surreëel getal.

Surreële getallen

To infinity...

- Alle gehele getallen zijn surreële getallen, dus ook $\{1, 2, 3, 4, 5 \dots \mid\}$ is een surreëel getal.
- Dit getal is groter dan eender welk geheel getal!
- $\{1, 2, 3, 4, 5 \dots \mid\} = \omega$

Surreële getallen

To infinity...

- Alle dyadische rationale getallen zijn surreële getallen, dus ook $\{ | 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 \dots \}$ is een surreëel getal.

Surreële getallen

To infinity...

- Alle dyadische rationale getallen zijn surreële getallen, dus ook $\{ | 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 \dots \}$ is een surreëel getal.
- Dit positieve getal is kleiner dan elk rationaal getal!
- $\{ | 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 \dots \} = \varepsilon$

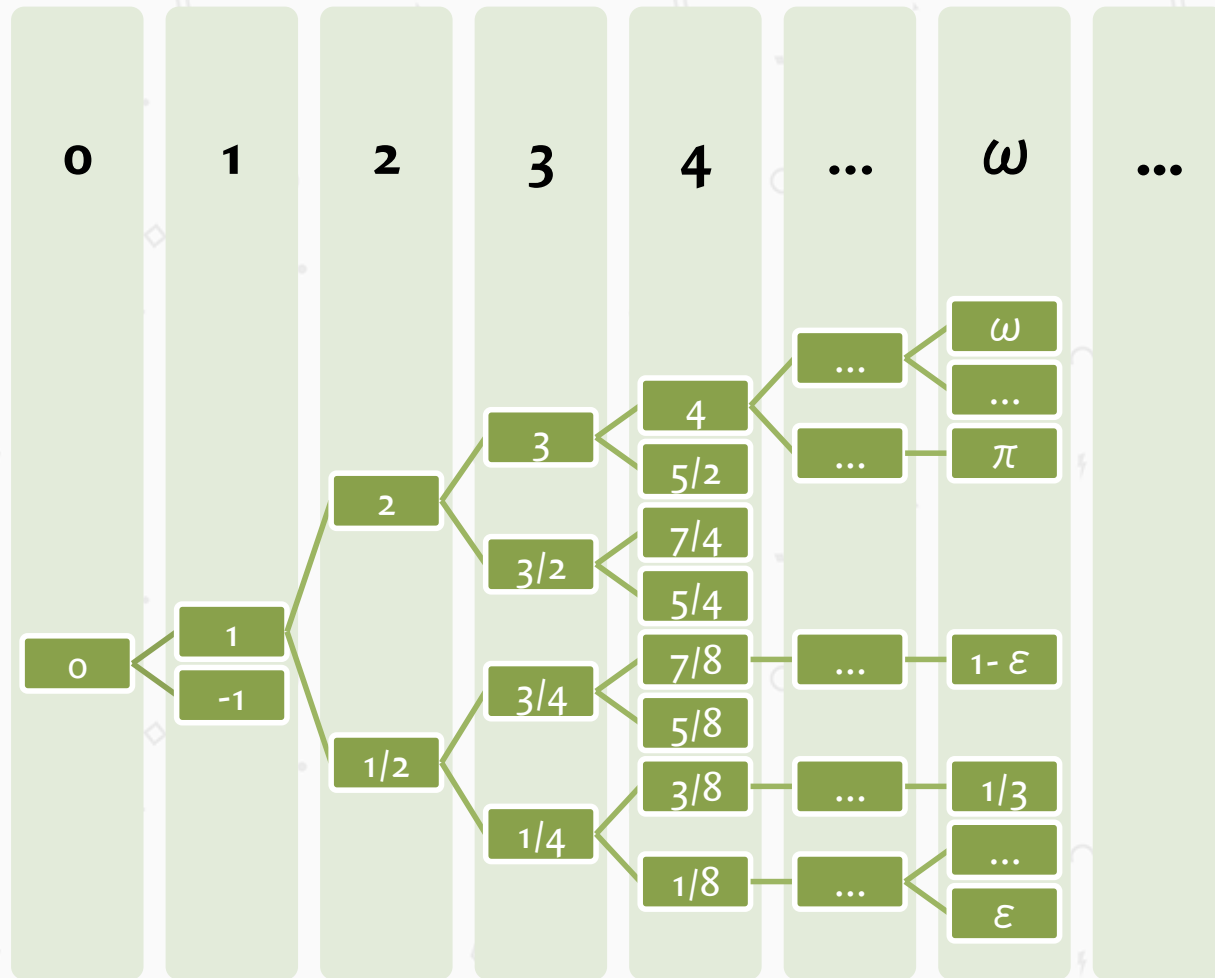
Surreële getallen

... and beyond

- $\{\omega, 1 + \omega, 2 + \omega, 3 + \omega \dots | \} = 2\omega$
- $\{\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega \dots | \} = \omega^2$
- $\{\omega^2, \omega^3, \omega^3, \omega^4 \dots | \} = \omega^\omega$
- $\{1, 2, 3, 4, 5 \dots | \omega, \omega/2, \omega/3, \omega/4 \dots \} = \sqrt{\omega}$
- ...

Surreële getallen

Overzicht



Variatie

Terug naar Hackenbush

Variatie

Nieuwe spelregel

- Nieuw kleur (groen) die door beide spelers weggekapt kan worden, naast rood en blauw



Variatie

Nieuwe spelregel

- $\{ \circ \mid \circ \} = \star$
- Géén surreëel getal!



Variatie

Nieuwe spelregel

- $\{ \circ \mid \circ \} = \star$
- Géén surreëel getal!
- Geen enkele van volgende relaties gaat op:
 - $\star < \circ$
 - $\star > \circ$
 - $\star = \circ$
- \star is “verward” (*fuzzy*) met \circ



Variatie

Nieuwe spelregel

- $\{ \circ \mid \circ \} = \star$
- Géén surreëel getal!
- Geen enkele van volgende relaties gaat op:
 - $\star < \circ$
 - $\star > \circ$
 - $\star = \circ$
- \star is “verward” (*fuzzy*) met \circ
- $\star + \star = \circ$ etc.



**Surrealism, then, neither aims to subvert realism,
as does the fantastic, nor does it try to transcend it.
It looks for different means
by which to explore reality itself.**

- Michael Richardson -

