UNIVERSITEIT GENT

FRACTRAN

A Simple Universal Programming Language for Arithmetic

Jens Bossaert

PRIME, 24 november 2015

Een FRACTRAN-programma (F, n) bestaat uit:

- een eindige lijst $F = (f_i)_i$ van positieve breuken;
- een natuurlijk getal n als invoerwaarde.

Het programma loopt door n herhaaldelijk als volgt te updaten:

$$\begin{cases} n \mapsto n \cdot f_j & \text{met } j = \min\{i : n \cdot f_i \in \mathbb{N}\}; \\ \text{return } n & \text{indien } j \text{ niet bestaat } (\forall i : n \cdot f_i \notin \mathbb{N}). \end{cases}$$

Zo definieert $(F, \cdot)$ een partiële functie $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Optelling

$$F = \left(\frac{3}{2}\right)$$

Aftrekking

$$F = \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$2^a \cdot 3^b \;\mapsto\; \cdots \;\mapsto\; 3^{a+b}$$

$$2^a \cdot 3^b \;\mapsto\; \cdots \;\mapsto\; 3^{b-a}$$

(voor $a < b$)

Minimum

$$F = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

$$2^a \cdot 3^b \quad \mapsto \quad \cdots \quad \mapsto \quad 5^{\min(a,b)}$$

Maximum

$$F = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right)$$

$$2^a \cdot 3^b \quad \mapsto \quad \cdots \quad \mapsto \quad 5^{\max(a,b)}$$

Verdubbeling

$$F = \left(\frac{9}{2}\right)$$

Halvering

$$F = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$2^a \mapsto \cdots \mapsto 3^{2a}$$

$$2^a \mapsto \cdots \mapsto 3^{\lfloor a/2 \rfloor}$$

Vermenigvuldiging

$$F = \left(\frac{455}{33}, \frac{11}{13}, \frac{1}{11}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

$$2^a \cdot 3^b \;\mapsto\; \cdots \;\mapsto\; 5^{a \cdot b}$$

<table>
<tr><th>huidige toestand</th><th>indicator</th><th>condities</th><th>acties</th><th>volgende toestand</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="4">A</td><td rowspan="4">(default)</td><td>$v7 > 0$</td><td>$v7 - 1$
$v3 + 1$</td><td>A</td><td>$\longrightarrow \frac{3}{7}$</td></tr>
<tr><td>$v7 = 0$
$v2 > 0$</td><td>$v2 - 1$</td><td>B</td><td>$\longrightarrow \frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>$v7 = 0$
$v2 = 0$
$v3 > 0$</td><td>$v3 - 1$</td><td>A</td><td>$\longrightarrow \frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>$v7 = 0$
$v2 = 0$
$v3 = 0$</td><td>HALT</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">B</td><td rowspan="2">$v11, v13$</td><td>$v3 > 0$</td><td>$v3 - 1$
$v5 + 1$
$v7 + 1$</td><td>B</td><td>$\longrightarrow \frac{5 \cdot 7 \cdot 13}{3 \cdot 11}, \frac{11}{13}$</td></tr>
<tr><td>$v3 = 0$</td><td>/</td><td>A</td><td>$\longrightarrow \frac{1}{11}$</td></tr>
</table>

Deling (met rest)

$$F = \left(\frac{91}{66}, \frac{11}{13}, \frac{1}{33}, \frac{85}{11}, \frac{57}{119}, \frac{17}{19}, \frac{11}{17}, \frac{1}{3}\right)$$

$$2^a \cdot 3^b \cdot 11 \quad \mapsto \quad \cdots \quad \mapsto \quad 5^{a//b} \cdot 7^{a \bmod b}$$

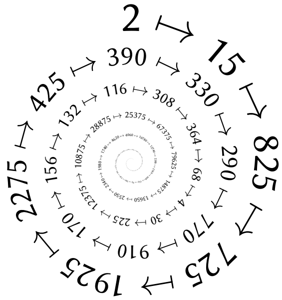
Grootste gemeenschappelijke deler

$$F = \left(\frac{7}{13}, \frac{39}{35}, \frac{2}{7}, \frac{11}{19}, \frac{38}{55}, \frac{3}{11}, \frac{5}{6}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3} \right)$$

$$2^a \cdot 3^b \quad \mapsto \quad \cdots \quad \mapsto \quad 5^{gcd(a,b)}$$

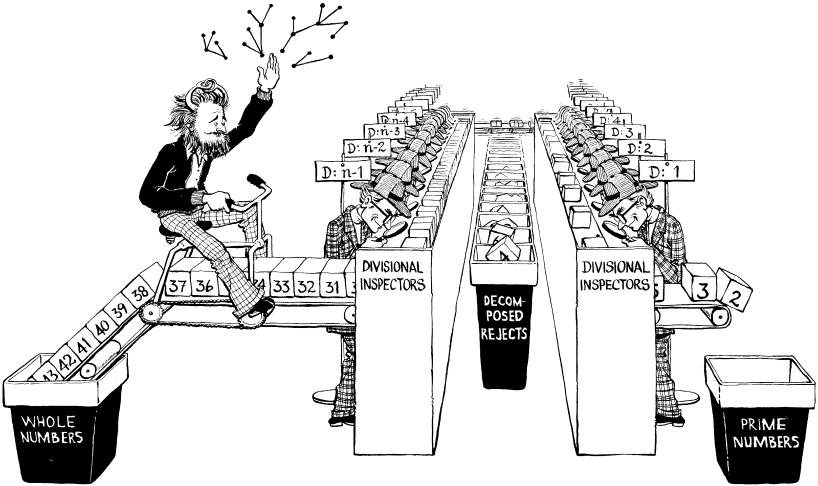
PRIMEGAME

$$F = \left(\frac{17}{91}, \frac{78}{85}, \frac{19}{51}, \frac{23}{38}, \frac{29}{33}, \frac{77}{29}, \frac{95}{23}, \frac{77}{19}, \frac{1}{17}, \frac{11}{13}, \frac{13}{11}, \frac{15}{2}, \frac{1}{7}, \frac{55}{1}\right)$$



$$\begin{aligned} 2 &\mapsto \cdots \mapsto 2^2 \mapsto \cdots \mapsto 2^3 \\ &\mapsto \cdots \mapsto 2^5 \mapsto \cdots \mapsto 2^7 \\ &\mapsto \cdots \mapsto 2^{11} \mapsto \cdots \mapsto 2^{13} \\ &\mapsto \cdots \mapsto 2^{17} \mapsto \cdots \end{aligned}$$

Machten van twee in uitvoer corresponderen juist met de priemgetallen, in oplopende volgorde!


WHOLE NUMBERS
43 42 41 40 39 38
37 36 34 33 32 31
D: n-1
D: n-2
D: n-3
D: n-4
DIVISIONAL INSPECTORS
DECOM-POSED REJECTS
D: 4
D: 3
D: 2
D: 1
DIVISIONAL INSPECTORS
3 2
PRIME NUMBERS

“Elke *intuïtief berekenbare* functie
is berekenbaar op een Turingmachine.”

Turingmachine

$\Updownarrow$

Minsky register machine

$\Updownarrow$

FRACTRAN

Dus: “Elke *intuïtief berekenbare* functie
is berekenbaar via FRACTRAN”.

POLYGAME

$$F = \left(\begin{array}{c} \frac{583}{559}, \frac{629}{551}, \frac{437}{527}, \frac{82}{517}, \frac{615}{329}, \frac{371}{129}, \frac{1}{115}, \frac{53}{86}, \frac{43}{53}, \frac{23}{47}, \frac{341}{46}, \\ \frac{41}{43}, \frac{47}{41}, \frac{29}{37}, \frac{37}{31}, \frac{299}{29}, \frac{47}{23}, \frac{161}{15}, \frac{527}{19}, \frac{159}{7}, \frac{1}{17}, \frac{1}{13}, \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

Stelling (Conway)

Definieer een partiële functie $f_c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ als volgt:

$$f_c(n) = \begin{cases} m & \text{als POLYGAME } c \cdot 2^{2^n} \mapsto 2^{2^m}; \\ \text{ongedefinieerd} & \text{anders.} \end{cases}$$

Dan komt *elke* berekenbare functie voor in de lijst $f_0, f_1, f_2 \ldots$!

- "Catalogusgetallen" c voor berekenbare functies.
- Voorbeeld: $c = 2268945 \quad \Rightarrow \quad f_c(n) = n + 1$.