Analyse

Differentiaalvergelijkingen

Gottfried Leibniz

Jens Bossaert
2013

Isaac Newton

Inhoudsopgave

1 Terminologie

Een *differentiaalvergelijking* (DV) is een vergelijking die afgeleiden van een functie naar één of meerdere onafhankelijke veranderlijken bevat. Is de onbekende functie van slechts één variabele afhankelijk, dan spreekt men van gewone differentiaalvergelijkingen. De onbekende functie in een gewone DV noemt men de *afhankelijke variabele* en noteert men meestal als y: $y(x)$ in functie van de *onafhankelijke variabele* x.

De *orde* van een differentiaalvergelijking is de orde van de hoogste afgeleide functie; de *graad* ervan is de hoogste macht waarin de hoogste orde voorkomt.

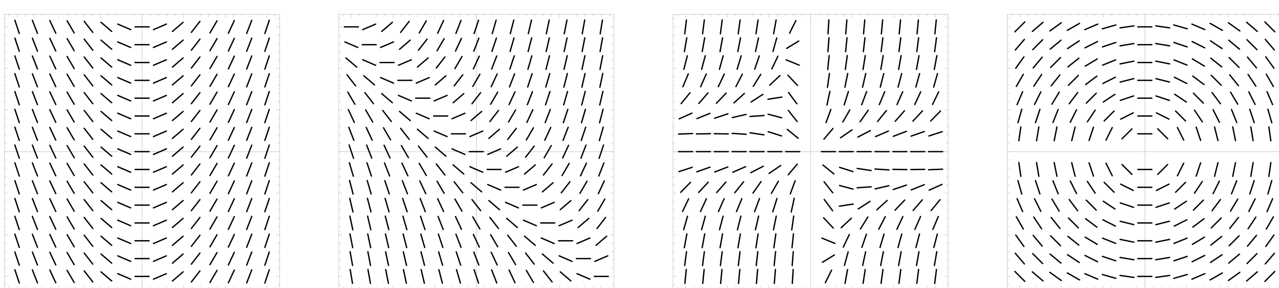
De oplossing van een differentiaalvergelijking is geen variabele x, maar een functie $y(x)$. De grafiek ervan wordt een integraalkromme genoemd.

Elke oplosbare DV heeft oneindig veel *algemene oplossingen* (functies). Een DV van de n^{de} orde zal in zijn algemene oplossing n constanten hebben, die kunnen worden vastgelegd door *beginvoorwaarden* en *randvoorwaarden*; dan spreekt men van een *particuliere oplossing.* Soms heeft een DV een bijzondere oplossing zonder constanten; dan spreekt men van een *singuliere oplossing.*

De functie kan op verschillende manieren geschreven zijn, expliciet, impliciet of via een parametrisatie; indien mogelijk wordt de expliciete oplossing verkozen. Parametrisatie kan handig zijn bij bepaalde typen DV's waar een hulpparameter niet geëlimineerd kan worden. Soms is het mogelijk dat niet overal afleidbare functies voor problemen zorgen; hier maken we er ons geen zorgen over, hoewel soms het domein van een oplossing moet worden beperkt.

De oplossingen van een eerstegraads-DV kunnen grafisch worden voorgesteld met behulp van een *richtingsveld* of *richtveld.* Door op bepaalde punten in het assenstelsel (normalerwijs de roosterpunten) de x- en y-coördinaat in te vullen in de DV kan de helling y' op dat punt berekend worden en gevisualiseerd met een hellingsmarkering. Door opeenvolgende lijntjes te volgen kunnen de oplossingen benaderd worden.

$y' = x$ $\qquad$ $y' = x + y$ $\qquad$ $x \cdot y' = x \cdot y^2 + y$ $\qquad$ $y \cdot y' = -x$



2 Algemene technieken

2.1 Factorisatie

Factorisatie is een algemeen bruikbare techniek, zowel bij gewone vergelijkingen als differentiaalvergelijkingen. Soms is het mogelijk een DV te ontbinden in factoren, die dan elk één oplossing geven.

$$\boxed{P(x, y, y', y'' \ldots) \cdot Q(x, y, y', y'' \ldots) = 0} \qquad \Rightarrow \qquad P(x, y, y', y'' \ldots) = 0 \vee Q(x, y, y', y'' \ldots) = 0$$

2.2 Integratie

DV's van de volgende vorm worden simpelweg opgelost door linker- en rechterlid te integreren, tot de afgeleide functie niet meer voorkomt. Voor een vergelijking van orde n komt dit neer op n keer integreren. Let wel op de C's in elke integraal door te rekenen naar de volgende, zodat het geheel n constanten bevat.

$$\boxed{y^{(n)} = P(x)} \qquad \Rightarrow \qquad y = \underbrace{\int \int \ldots \int P(x)\, \mathrm{d}x}_{n \text{ integralen}}$$

2.3 Differentiatie

Soms gebeurt het dat een differentiaalvergelijking nóg eens afleiden resulteert in een vergelijking die eenvoudiger op te lossen valt. Let dan wel op voor de constanten; een DV afleiden verhoogt de orde met één, en zorgt dus voor een extra constante in de oplossing. Vul daarom altijd het resultaat opnieuw in in de oorspronkelijke vergelijking of gebruik eliminatie om de extra C weg te werken.

Voorbeelden

- $2y \cdot y'' - (y')^2 = \dfrac{1}{3} \cdot (y' - x \cdot y'')^2$
  Afleiden naar x geeft na vereenvoudiging $y''' \cdot \left(x^2 \cdot y'' - x \cdot y' - 3y\right) = 0$.

3 Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

3.1 Scheiding van veranderlijken

Door de afgeleide functie y' te schrijven in Leibniz' notatie $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, is het soms mogelijk de veranderlijken x en y te scheiden, zodat in het linkerlid enkel nog een functie in x en in het rechterlid enkel nog een functie in y bij de afgeleide staat. Beide leden kunnen dan geïntegreerd worden om de algemene oplossing te vinden.

$$\boxed{P(y) \cdot y' = Q(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \int P(y)\,\mathrm{d}y = \int Q(x)\,\mathrm{d}x$$

Controleer bij deling van beide leden door een functie altijd of deze functie geen singuliere oplossing geeft.

3.2 Homogene differentiaalvergelijkingen

Een functie f is *homogeen* van graad n $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\forall x, y, \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.
Concreet heeft een homogene functie in elke term dezelfde graad in x en y (y' telt niet mee).

Een homogene DV heeft de volgende vorm, waarbij P en Q homogeen zijn van dezelfde graad n.

$$\boxed{P(x, y) \cdot y' = Q(x, y)}$$

Homogene differentiaalvergelijkingen kunnen worden opgelost door middel van een hulpveranderlijke $u = \frac{y}{x}$, waarbij we $x \neq 0$ veronderstellen; merk op dat $x^n = 0$ dan altijd een singuliere oplossing vormt. Door deze x^n weg te delen kan de functie $u(x)$, en daaruit $y(x)$, bepaald worden door het scheiden van veranderlijken.

$$\begin{aligned} y &= ux \\ y' &= (ux)' = u'x + u \\ P(x, y) &= P(x, ux) = x^n \cdot P(1, u) \\ Q(x, y) &= Q(x, ux) = x^n \cdot Q(1, u) \end{aligned}$$

De algemene oplossing kan als volgt in één formule worden geschreven ($u = \dfrac{y}{x}$)

$$\ln x = \int \frac{P(1, u)\,\mathrm{d}u}{Q(1, u) - u \cdot P(1, u)}$$

Opmerking I Een homogene DV kan in de volgende vorm geschreven worden, cf. de substitutie $u = \dfrac{y}{x}$.

$$y' = R\left(\frac{y}{x}\right)$$

Opmerking II Een homogene DV kan altijd worden omgezet naar een exacte DV (zie bladzijde 15) door vermenigvuldiging met volgende multiplicator μ.

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x \cdot Q(x, y) - y \cdot P(x, y)}$$

3.3 Lineaire differentiaalvergelijkingen

Lineaire differentiaalvergelijkingen zijn die van de vorm:

$$\boxed{y' + P(x) \cdot y = Q(x)}$$

Om deze op te lossen proberen we het linkerlid te herleiden naar één afgeleide vorm. Daartoe vermenigvuldigen we beide leden met een *hulpfunctie* of *integratiefactor* r, waarbij $r \cdot P(x) = r'$. In het linkerlid herkennen we nu de productregel voor afgeleiden.

$$r \cdot y' + \underbrace{r \cdot P(x)}_{r'} \cdot y = (r \cdot y)' = r \cdot Q(x)$$

$$r \cdot y' + r \cdot P(x) \cdot y = r \cdot y' + r' \cdot y = (r \cdot y)' = r \cdot Q(x)$$

Los nu eerst $r \cdot P(x) = r'$ op naar r; dit gaat eenvoudig met scheiden van veranderlijken. Aangezien r hier slechts een hulpfunctie is hoeft men geen rekening te houden met een constante C.

$$r = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

Daarna is de resterende vergelijking eenvoudig op te lossen. Let op voor de C, die hier $\dfrac{C}{r}$ wordt.

$$(r \cdot y)' = r \cdot Q(x) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{1}{r} \cdot \int r \cdot Q(x)\,\mathrm{d}x$$

Opmerking Deze werkwijze blijft geldig als P of Q constant is, het rekenwerk wordt alleen vereenvoudigd.

3.4 Differentiaalvergelijkingen van Bernoulli

De *differentiaalvergelijking van Bernoulli* heeft de volgende vorm:

$$\boxed{y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n} \qquad \text{met } n \neq 0, n \neq 1$$

Deze kunnen herleid worden naar een lineaire DV door eerst beide leden te delen door y^n, en daarna een hulpfunctie z in te voeren zoals hieronder beschreven.

$$\begin{aligned} z &= \frac{y^{1-n}}{1-n} \\ z' &= \frac{y'}{y^n} \\ \frac{y}{y^n} &= y^{1-n} = (1-n) \cdot z \end{aligned}$$

Dit invullen in de oorspronkelijke DV geeft:

$$\frac{y'}{y^n} + P(x) \cdot \frac{y}{y^n} = Q(x) \qquad \Rightarrow \qquad z' + (1-n) \cdot P(x) \cdot z = Q(x)$$

Het resultaat is een lineaire DV van de eerste orde, dus kan $z(x)$ en daaruit $y(x)$ bepaald worden.

3.5 Vergelijkingen oplosbaar naar y of x

Vergelijkingen van de vorm $y = P(x, y')$ of $x = P(y, y')$ kunnen worden opgelost door een tweede vergelijking met betrekking tot x, y en y' op te stellen en daaruit y' te elimineren. Indien dit onmogelijk is, kan nog een parametrisatie $x(y')$ en $y(y')$ geschreven worden.

Hier schrijven we z voor $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

3.5.1 Oplosbaar naar y

$$\boxed{y = P(x, y')} = P(x, z)$$

Leid de gegeven vergelijking af naar x om volgende uitdrukking te vinden, voor een zekere functie Q.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z = Q\left(x, z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$$

Deze uitdrukking oplossen naar $z(x)$, en z elimineren uit deze oplossing en de beginvergelijking, levert de eindoplossing voor $y(x)$. Indien eliminatie niet mogelijk is verkrijgen we een parametrische oplossing.

3.5.2 Oplosbaar naar y, zonder x

$$\boxed{y = P(y')}$$

Vergelijkingen van deze vorm kunnen worden opgelost met de hierboven beschreven methode. Er bestaat ook een rechtstreekse parametrisatie voor, waarna de parameter t soms kan worden geëlimineerd voor een expliciete oplossing.

$$y = P(t), \qquad x = \int \frac{P'(t)}{t}\,\mathrm{d}t + C$$

3.5.3 Oplosbaar naar x

$$\boxed{x = P(y, y')} = P(y, z)$$

Leid de gegeven vergelijking af naar y om volgende uitdrukking te vinden, voor een zekere functie Q.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{z} = Q\left(y, z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)$$

Deze uitdrukking oplossen naar $z(y)$, en z elimineren uit deze oplossing en de beginvergelijking, levert de eindoplossing voor $y(x)$. Indien eliminatie niet mogelijk is verkrijgen we een parametrische oplossing.

3.5.4 Oplosbaar naar x, zonder y

$$\boxed{x = P(y')}$$

Vergelijkingen van deze vorm kunnen worden opgelost met de hierboven beschreven methode. Er bestaat ook een rechtstreekse parametrisatie voor, waarna de parameter t soms kan worden geëlimineerd voor een expliciete oplossing.

$$x = P(t), \qquad y = \int t \cdot P'(t)\,\mathrm{d}t + C$$

3.5.5 Uitsluitend in y'

$$\boxed{P(y') = 0}$$

De oplossingen van deze vergelijking zijn $y = kx + C$, waarbij k loopt over alle (reële) nulpunten van P.

3.6 Substitutie

Een goedgekozen substitutie kan een differentiaalvergelijking omzetten naar een gemakkelijker oplosbare. Welke substitutie juist toe te passen hangt af van opgave tot opgave. Er is wel een algemeen stappenplan:

1. Kies een element $P(x, y)$ van de vergelijking en vervang hem door een nieuwe variabele u, afhankelijk van de vorm van de vergelijking. Let wel, u moet zodanig gekozen worden dat y in de vergelijking geëlimineerd wordt.
2. Zoek $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ door de gekozen $P(x, y) = u$ af te leiden naar x.
3. Vul nu u en $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ in de gegeven vergelijking in zodat die herleid wordt naar een vergelijking in u en x. Alle gevallen van y moeten nu weggewerkt zijn, of de gekozen substitutie is onbruikbaar.
4. Los de vergelijking (in u en x) op naar u.
5. Werk nu de gevonden u terug naar y via $u = P(x, y)$.

Substitutie werd reeds toegepast in de vorige hoofdstukken bij homogene DV's en DV's van Bernoulli, maar is dus algemener bruikbaar onder verschillende vormen. Een gelijktijdige substitutie van x en y kan ook voorkomen.

In het volgende, vaak voorkomende geval kiezen we $u = ax + by + c$.

$$\boxed{y' = P(ax + by + c)}$$

Differentiaalvergelijkingen van de volgende vorm kunnen altijd homogeen of scheidbaar worden gemaakt.

$$\boxed{y' = P\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)}$$

Hier zijn er twee mogelijke gevallen, afhankelijk van de coëfficiënten.

- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$: substitutie transformeert de differentiaalvergelijking in een homogene DV.

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases} \quad \text{met} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = P\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right)$$

- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$: substitutie transformeert de differentiaalvergelijking in een scheidbare DV.

$$Y = x + \frac{b_1}{a_1} \cdot y = x + \frac{b_2}{a_2} \cdot y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = 1 + \frac{b_1}{a_1} \cdot P\left(\frac{a_1Y + c_1}{a_2Y + c_2}\right)$$

3.7 Contacttransformaties

Sommige DV's kunnen worden omgezet naar een eenvoudiger oplosbare via een contacttransformatie.

$$\boxed{\phi(x, y, z) = 0}$$

Deze vergelijking is van de eerste orde wanneer $z = y'$, ofwel wanneer $\mathrm{d}y - z \cdot \mathrm{d}x = 0$. De variabelen van de oorspronkelijke vergelijking kunnen nu worden aangepast in functie van de nieuwe variabelen X, Y en Z:

$$\begin{aligned} x &= x(X, Y, Z) \\ y &= y(X, Y, Z) \\ z &= z(X, Y, Z) \end{aligned}$$

De nieuwe vergelijking $\Phi(X, Y, Z) = 0$ zal nu ook van de eerste orde zijn op voorwaarde dat $Z = Y'$, ofwel $\mathrm{d}Y - Z \cdot \mathrm{d}X = 0$. Wanneer aan deze voorwaarde voldaan is, is bovenstaande transformatie een *contacttransformatie*. Wanneer van hieruit Φ opgelost kan worden, geeft eliminatie van X, Y en Z uit de getransformeerde vergelijking, de transformatieformules en de oplossing Y, uiteindelijk de oplossing in $y(x)$.

Enkele voorbeelden van contacttransformaties zijn:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& Z \\ y &=& Z \cdot X - Y \\ z &=& X \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} X &=& z \\ Y &=& z \cdot x - y \\ Z &=& x \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& X - Y \cdot Z \\ y &=& -Y \cdot \sqrt{Z^2 - 1} \\ z &=& \dfrac{Z}{\sqrt{Z^2 - 1}} \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} X &=& x - y \cdot z \\ Y &=& y \cdot \sqrt{z^2 - 1} \\ Z &=& -\dfrac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& X - \dfrac{a \cdot Z}{\sqrt{1 + Z^2}} \\ y &=& Y + \dfrac{a}{\sqrt{1 + Z^2}} \\ z &=& Z \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} X &=& x + \dfrac{a \cdot z}{\sqrt{1 + z^2}} \\ Y &=& y - \dfrac{a}{\sqrt{1 + z^2}} \\ Z &=& z \end{array}\right.$$

3.8 Differentiaalvergelijkingen van Riccati

De *differentiaalvergelijking van Riccati* kan over het algemeen niet opgelost worden, behalve wanneer een enkele particuliere oplossing gekend is. Riccati kwam tot deze vergelijking bij een onderzoek naar een vlakke beweging, beschreven door een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen. Ze heeft de algemene vorm:

$$\boxed{y' = P(x) + Q(x) \cdot y + R(x) \cdot y^2}$$

Wanneer een particuliere oplossing y_1 gekend is, kan deze DV verder opgelost worden via een hulpfunctie z:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{y - y_1} \\ y &= \frac{1}{z} + y_1 \\ y' &= \frac{-z'}{z^2} + y_1' \end{aligned}$$

Deze substituties doorvoeren in de oorspronkelijke DV, rekening houdend met het feit dat $y_1' = P(x) + Q(x) \cdot y + R(x) \cdot y^2$, levert een lineaire DV van de eerste graad op in z:

$$z' + (Q(x) + 2R(x) \cdot y_1) \cdot z = -R(x)$$

Van hieruit kan de oplossing voor z bepaald worden en daaruit die voor y als $\dfrac{1}{z} + y_1$.

3.9 Exacte differentiaalvergelijkingen

De algemene vorm van een *exacte differentiaalvergelijking* is:

$$\boxed{P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0} \tag{3.9.1}$$

Op $P(x,y)$ en $Q(x,y)$ geldt nog een belangrijke voorwaarde, die verder verklaard wordt. Indien een DV exact is wordt de oplossing daarvan een impliciete functie $\varphi(x,y) = 0$. Beschouwen we eerst even de totale differentiaal van φ; die wordt gegeven door:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y = 0 \tag{3.9.2}$$

Wanneer we nu (3.9.2) vergelijken met (3.9.1), dan kunnen we stellen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x,y) \tag{3.9.3}$$

Nu geldt voor een functie $\varphi \in C^2$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial x}$$

Dus kan φ slechts de oplossing zijn van een differentiaalvergelijking als volgende voorwaarde geldt, die we bekomen door de vergelijkingen uit (3.9.3) nogmaals partieel af te leiden naar de andere functie (x i.p.v. y en vice versa):

$$\textbf{Voorwaarde voor “exact”-zijn: } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial x} = \boxed{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}$$

Indien deze voorwaarde voldaan is, hebben we te maken met een exacte differentiaalvergelijking. Daar de afgeleide van $\varphi(x,y)$ naar x de functie $P(x,y)$ geeft, integreren we $P(x,y)$ naar x. Let hier op, want de integratieconstante kan dan ook in functie van y staan, dus schrijf daar $C(y)$. Om $C(y)$ te bepalen dienen we de gevonden φ nu af te leiden naar y, wat dan $Q(x,y)$ moet geven. Zodoende vinden we waaraan de constante $C(y)$ gelijk is en kunnen we met $\varphi(x,y) = C$ de algemene, impliciete oplossing geven.

$$\varphi = \int P(x,y)\, \mathrm{d}x + \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\int P(x,y)\, \mathrm{d}x \right] \right) \mathrm{d}y + C$$

3.10 Multiplicatoren van Euler

Sommige differentiaalvergelijkingen zijn te herleiden naar exacte vergelijkingen door ze te vermenigvuldigen met een functie $\mu(x,y)$. Deze functie μ noemt men een *multiplicator van Euler*.

Algemeen is het vinden van zo'n multiplicator zeer moeilijk, moeilijker dan de vergelijking zelf oplossen. Daarom beperken we ons hier tot twee klassen waarvoor relatief eenvoudig een multiplicator gevonden kan worden, namelijk die met $\mu(x)$ - uitsluitend in x, en die met $\mu(y)$ - uitsluitend in y.

Beschouwen we de (inexacte) differentiaalvergelijking $P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$.

- Als $\dfrac{1}{Q(x,y)} \cdot \left[\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right] = \varphi(x)$, dan is $e^{\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x}$ een multiplicator $\mu(x)$.
- Als $\dfrac{1}{P(x,y)} \cdot \left[\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right] = \varphi(y)$, dan is $e^{\int \varphi(y)\,\mathrm{d}y}$ een multiplicator $\mu(y)$.

Door nu de DV te vermenigvuldigen met de gevonden μ, wordt die herleid tot een exacte (oplosbare) DV.

3.11 Differentiaalvergelijkingen van Clairaut

In de oplossingsmethode van de *differentiaalvergelijking van Clairaut* komt er een eenvoudige differentiaalvergelijking van de tweede orde voor, maar de vergelijking zelf is van de eerste orde en heeft de volgende vorm.

$$\boxed{y = x \cdot y' + Q(y')}$$

Om een algemene oplossing te vinden, moeten we eerst deze vergelijking afleiden naar x:

$$y' = y' + x \cdot y'' + Q'(y') \cdot y'' \qquad \Rightarrow \qquad 0 = y'' \cdot (x + Q'(y'))$$

Nu zijn er twee mogelijkheden.

1. $y'' = 0$
   De eerste, particuliere oplossing wordt $y'' = 0 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y = C_1 x + C_2$. Deze invullend in de originele vergelijking vinden we dat $C_2 = Q(C_1)$, dus het resultaat wordt $y = C \cdot x + Q(C)$. Deze particuliere oplossingen stellen rechten voor; hun afgeleide y' is C.

2. $x + Q'(y') = 0$
   Let nog op voor de singuliere oplossing. Deze wordt gevonden door y' uit deze factor en de originele vergelijking te elimineren, of deze factor op te lossen en in te vullen in de originele DV.

De grafiek van de singuliere oplossing geeft de omhullende weer van de rechten gevormd door de particuliere oplossingen.

Opmerking De algemenere vergelijking $P(xy' - y) = Q(y')$ volgt dezelfde oplossingsmethode. Deze afleiden naar x geeft:

$$y'' \cdot [P'(xy' - y) \cdot x - Q'(y')] = 0$$

Ook hieruit volgt een algemene, impliciete oplossing, $P(x \cdot C - y) = Q(C)$, en wordt de singuliere oplossing gevonden door de tweede factor gelijk aan nul te stellen en y' te elimineren.

3.12 Differentiaalvergelijkingen van Lagrange

De *differentiaalvergelijking van Lagrange*, ook bekend als de DV van d'Alembert, is een veralgemening van de DV van Clairaut. Ze werd reeds opgelost voor 1694 door Johan Bernoulli. Jean le Rond d'Alembert publiceerde in 1748 een bespreking van de singuliere oplossingen.

$$\boxed{y = x \cdot P(y') + Q(y')}$$

Ook deze leiden we eerst af naar x.

$$\begin{aligned} y' &= x \cdot P'(y') \cdot y'' + P(y') + Q'(y') \cdot y'' \\ &= P(y') + y'' \cdot (x \cdot P'(y') + Q'(y')) \end{aligned}$$

Dit kunnen we herschrijven naar:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y'} = x \cdot \frac{P'(y')}{y' - P(y')} + \frac{Q'(y')}{y' - P(y')}$$

Hierin herkennen we een lineaire DV; let wel, met afhankelijke variabele x en onafhankelijke variabele y' (in plaats van y en x). Deze kunnen we dus eenvoudig oplossen (zie bladzijde 8). Uiteindelijk kunnen we uit deze oplossing en de beginvergelijking de parameter y' elimineren voor de eindoplossing, of een parametrisatie $x(y')$ en $y(y')$ bepalen.

4 Differentiaalvergelijkingen van hogere orde

4.1 Verlagen van graad

Sommige differentiaalvergelijkingen zijn op te lossen door, via het invoeren van een nieuwe veranderlijke, de graad te verlagen. Dit kan worden toegepast bij DV's waarin y of x ontbreekt. In deze methode wordt de Leibniznotatie aangeraden boven de accentnotatie.

4.1.1 Ontbreken van y

$$\boxed{P\left(y^{(n)}, y^{(n-1)} \dots y'', y', x\right) = 0}$$

Wanneer de afhankelijke variabele y niet expliciet voorkomt in de differentiaalvergelijking, kunnen we de orde van de DV met één verlagen door de substitutie $z = y'$. Los dan deze DV van lagere orde op naar $z(x)$, en integreer $z(x)$ naar x voor de oplossing in $y(x)$.

4.1.2 Ontbreken van x

$$\boxed{P\left(y^{(n)}, y^{(n-1)} \dots y'', y', y\right) = 0}$$

Wanneer de onafhankelijke variabele x ontbreekt, blijft de vergelijking invariant onder de transformatie $x \to x + a$ en spreken we van een *autonome differentiaalvergelijking*. Hier kunnen we dezelfde substitutie $y' = z$ doorvoeren, alleen moeten we hier y'' en verder in functie van z schrijven, door middel van partieel afgeleiden. Daarna wordt ook deze DV herleid naar een DV van lagere orde in z en y; los deze op naar $z(x)$ en integreer naar x voor de oplossing in $y(x)$.

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot z$$

Verder uitrekenen vanuit $y' = z$ (telkens afleiden naar y en vermenigvuldigen met z) geeft deze substituties.

- $y''' = z \cdot \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2 + z^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}y^2}$
- $y'''' = z \cdot \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^3 + 4z^2 \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}y^2} + z^3 \cdot \frac{\mathrm{d}^3 z}{\mathrm{d}y^3}$
- $\dots$

4.2 Reductie van de orde

Wanneer een niet-triviale oplossing van de HLDV gekend is, kan de DV herleid worden naar één van lagere orde via d'Alemberts principe van de *reductie van de orde*.

Stel de gekende oplossing $y(x)$. Door als totale oplossing de vorm $y(x) \cdot \mu(x)$ in te vullen, verkrijgen we een nieuwe DV in $\mu(x)$ die met de techniek van vorig hoofdstuk kan worden verlaagd van graad (de term $\mu(x)$ valt dan weg, zodat enkel zijn afgeleiden overblijven). Reductie van de orde is vooral interessant voor differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, die worden herleid naar eenvoudigere DV's van de eerste orde.

Vaak loont het de moeite te controleren of x, x^2 of e^x oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking.

4.3 Equidimensionale vergelijkingen

4.3.1 Equidimensionaal in x

Een DV is *equidimensinaal in* x als deze invariant blijft onder de transformatie $x \to ax$, waar a een constante is; deze substitutie levert dezelfde DV als voorheen op. Zo'n DV kan worden herleid naar een autonome DV van dezelfde orde in t door de substitutie $x = e^t$. Eenmaal opgelost naar t wordt dit teruggewerkt naar x.

Dit geeft deze substituties:

- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{-t} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$
- $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = e^{-2t} \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$
- $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = e^{-3t} \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} - 3\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$
- $\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4} = e^{-4t} \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}t^4} - 6\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} + 11\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 6\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$
- ...

4.3.2 Equidimensionaal in y

Een DV is *equidimensinaal in* y als deze invariant blijft onder de transformatie $y \to ay$, waar a een constante is; deze substitutie levert dezelfde DV als voorheen op. Zo'n DV kan worden herleid naar een DV van dezelfde orde waarin y ontbreekt, door de substitutie $y(x) = e^{u(x)}$. Eenmaal opgelost naar $u(x)$ wordt dit teruggewerkt naar $y(x)$.

Dit geeft deze substituties:

- $y = e^u$
- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
- $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = y \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)$
- $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = y \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3} + 3\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^3\right)$
- $\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4} = y \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4} + 4\dfrac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + 3\left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 + 6\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} \cdot \left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^4\right)$
- ...

4.4 Lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde

Met een *lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde* (LDV) bedoelen we een DV met volgende vorm.

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i(x) \cdot y^{(i)} = f(x)}$$

Wanneer $f(x) = 0$ hebben we te maken met een *homogene lineaire differentiaalvergelijking* (HLDV). Er kan worden aangetoond dat de algemene oplossing y van een LDV bestaat uit de oplossing van de HLDV y_h, plus één particuliere oplossing y_p (principe van superpositie):

$$y = y_h + y_p$$

Eerst proberen we de HLDV op te lossen, dus we zoeken y_h. Voor een n^{de}-orde-LDV bestaat deze altijd uit n lineair onafhankelijke oplossingen.

$$y_h = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \ldots + C_n\, y_n$$

4.4.1 Homogene lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot y^{(i)} = 0}$$

Om deze vergelijking op te lossen moeten we een functie y vinden waarvoor een lineaire combinatie van zijn afgeleiden nul is; dit betekent dat de afgeleiden van de functie veelvouden van elkaar moeten zijn. De enige functie waarvoor dit geldt is de exponentiële functie. Een oplossing zal hier dus van de vorm $y_i = e^{rx}$ zijn, wat te controleren valt door y_i in te vullen in de HLDV. We verkrijgen dan:

$$e^{rx} \cdot \big[a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \ldots a_1 \cdot r + a_0\big] = 0$$

Omdat de exponentiële functie e^{rx} nooit nul kan worden, moet de verkregen veelterm in r dat wel zijn. We verkrijgen hier de *karakteristieke vergelijking* van de HLDV. Volgens de hoofdstelling van de algebra zal deze veelterm in r, n oplossingen geven in $\mathbb{C}$ (eventueel dubbele). Met deze oplossingen kunnen we n lineair onafhankelijke oplossingen van de HLDV opstellen.

We onderscheiden vier mogelijke gevallen voor HLDV's met reële coëfficiënten a_i.

- Wanneer de karakteristieke vergelijking een reële oplossing r met multipliciteit één geeft, kan één term van y_h geschreven worden als $C_1\, e^{rx}$.
- Wanneer de karakteristieke vergelijking een reële oplossing r met multipliciteit p geeft, kunnen p termen van y_h geschreven worden als $e^{rx} \cdot \big(C_1 + C_2\, x + \ldots + C_p\, x^{p-1}\big)$.
- Wanneer de karakteristieke vergelijking een complexe oplossing $a + bi$ met multipliciteit één geeft, zal ook zijn complex geconjugeerde $a - bi$ een oplossing zijn. Hier kan de formule van Euler* worden toegepast om de oplossing $C_1\, e^{(a+bi)x} + C_2\, e^{(a-bi)x}$ uit te werken tot $y_h = e^{ax} \cdot (C_1\, \cos bx + C_2\, \sin bx)$.
- Een complexe oplossing met multipliciteit p zal ook voor zijn complex geconjugeerde multipliciteit p geven. De oplossing wordt dan een combinatie van vorige gevallen: $y_h = e^{ax} \cdot (C_1\, \cos bx + C_2\, \sin bx) + x \cdot e^{ax} \cdot (C_3\, \cos bx + C_4\, \sin bx) + \ldots + x^{p-1} \cdot e^{ax} \cdot (C_{2p-1}\, \cos bx + C_{2p}\, \sin bx)$.

* $e^{\alpha i} = \cos\alpha + i \sin\alpha$

4.4.2 Inhomogene lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot y^{(i)} = f(x)}$$

Wanneer het rechterlid een functie van x is in plaats van nul, lossen we hem op als een HLDV en vinden we y_h. Daarna moet er nog een particuliere oplossing y_p gevonden worden voor de totale oplossing $y = y_h + y_p$.

Afhankelijk van de vorm van de functie $f(x)$, stellen we een algemene oplossing voor van dezelfde aard (zie onderstaande tabel) en vullen we die in in de DV. De paramaters kunnen dan bepaald worden a.d.h.v. de *methode van de onbepaalde coëfficiënten.*

Met de notatie $P_n(x)$ bedoelen we hier een veelterm P van graad n in x.

Vorm van $f(x)$	**Vorm van y_p**
$P_n(x)$	$Q_n(x)$
$a \cdot e^{mx}$	$b \cdot e^{mx}$
$a_1 \sin(mx) + a_2 \cos(mx)$	$b_1 \sin(mx) + b_2 \cos(mx)$
$P_n(x) \cdot e^{mx}$	$Q_n(x) \cdot e^{mx}$
$P_n(x) \cdot (a_1 \sin(mx) + a_2 \cos(mx))$	$b_1 \cdot Q_n(x) \cdot \sin(mx) + b_2 \cdot R_n(x) \cdot \cos(mx)$
$(a_1 \sin(mx) + a_2 \cos(mx)) \cdot e^{ax}$	$(b_1 \sin(mx) + b_2 \cos(mx)) \cdot e^{ax}$

Er kunnen problemen optreden wanneer de particuliere oplossing dezelfde vorm heeft als een term uit de homogene oplossing; deze oplossingen moeten namelijk lineair onafhankelijk zijn. Bij deze gevallen moet er rekening worden gehouden met een kleine aanpassing in de vorm van de particuliere oplossing:

- Wanneer de particuliere oplossing van de vorm $Q_n(x)$ zou zijn en de coëfficiënt van y in de DV gelijk is aan nul, zouden zowel de homogene oplossing als de particuliere oplossing een constante term bevatten (immers, de karakteristieke vergelijking heeft $r = 0$ als nulpunt). Daarom vermenigvuldigen we de voorgestelde veelterm met x^k, waarbij k de kleinste orde $y^{(k)}$ is die voorkomt in de DV (zonder coëfficiënt nul).

  $$\textbf{Vorm van } \boldsymbol{y_p}\textbf{:} \quad Q_n(x) \cdot x^{\min\{i|a_i \neq 0\}}$$

- Wanneer de particuliere oplossing van de vorm $b \cdot e^{mx}$ of $Q_n(x) \cdot e^{mx}$ zou zijn en $r = m$ een nulpunt van de karakteristieke vergelijking met multipliciteit p is, doet hetzelfde probleem zich voor. Hier vermenigvuldigen we de voorgestelde oplossing met de algemene veelterm van dezelfde graad als de multipliciteit van de wortel m. Bij de eerste volstaat vaak x^p i.p.v. $R_p(x)$.

  $$\begin{aligned} \textbf{Vorm van } \boldsymbol{y_p}\textbf{:} &\quad R_p(x) \cdot e^{mx} \\ \text{of:} &\quad Q_n(x) \cdot R_p(x) \cdot e^{mx} \end{aligned}$$

- Wanneer de particuliere oplossing van de vorm $(b_1 \sin(mx) + b_2 \cos(mx)) \cdot e^{ax}$ zou zijn en $r = a + mi$ en $r = a - mi$ nulpunten van de karakteristieke vergelijking met multipliciteit p zijn, vermenigvuldigen we de voorgestelde oplossing met x^p.

  $$\textbf{Vorm van } \boldsymbol{y_p}\textbf{:} \quad (b_1 \sin(mx) + b_2 \cos(mx)) \cdot x^p \cdot e^{ax}$$

4.5 Eulervergelijkingen

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \cdot y^{(i)} = 0}$$

Vergelijkingen van deze vorm worden herleid naar lineaire DV's met constante coëfficiënten in t door de substitutie $x = e^t$. Deze oplossen naar t en terugwerken naar x geeft de oplossing in x.

$$x^i \cdot \frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}x^i} \qquad \xrightarrow{x=e^t} \qquad \frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i}$$

De gevonden oplossingen zullen dan van de vorm x^r zijn. Deze algemene oplossing direct in de DV invullen geeft het volgende resultaat:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \cdot y^{(i)} = x^r \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot r(r-1)\dots(r+1-i) \right) = 0$$

In de veronderstelling dat $x \neq 0$, moet de veelterm in r gelijk zijn aan 0. Merk de gelijkenis op met de karakteristieke vergelijking.

We onderscheiden vier mogelijke gevallen voor Eulervergelijkingen met deze karakteristieke vergelijking.

- Wanneer de karakteristieke vergelijking een reële oplossing r met multipliciteit één geeft, kan één term van y_h geschreven worden als $C_1\,|x|^r$.
- Wanneer de karakteristieke vergelijking een reële oplossing r met multipliciteit p geeft, kunnen p termen van y_h geschreven worden als $|x|^r \cdot \big(C_1 + C_2\,\ln|x| + \ldots + C_p\,\ln^{p-1}|x|\big)$.
- Wanneer de karakteristieke vergelijking een complexe oplossing $a + bi$ met multipliciteit één geeft, zal ook zijn complex geconjugeerde $a - bi$ een oplossing zijn. Hier kan de formule van Euler[†] worden toegepast om twee termen van de oplossing uit te werken tot $|x|^a \cdot (C_1\,\cos(b\ln|x|) + C_2\,\sin(b\ln|x|))$.
- Een complexe oplossing met multipliciteit p zal ook voor zijn complex geconjugeerde multipliciteit p geven. Ook hier wordt de oplossing een combinatie van de vorige gevallen.
  $|x|^a \cdot (C_1\,\cos(b\ln|x|) + C_2\,\sin(b\ln|x|)) + |x|^a \cdot \ln|x| \cdot (C_3\,\cos(b\ln|x|) + C_4\,\sin(b\ln|x|)) + \ldots + |x|^a \cdot \ln^{p-1}|x| \cdot (C_{2p-1}\,\cos(b\ln|x|) + C_{2p}\,\sin(b\ln|x|))$.

Opmerking DV's van de vorm $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (bx+c)^i \cdot y^{(i)} = 0$ zijn op dezelfde manier op te lossen.

[†] $e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

4.6 Variatie van de parameters

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i(x) \cdot y^{(i)} = f(x)}$$

Variatie van de parameters vereist meer rekenwerk dan de vorige methode, maar is veel krachtiger. Deze techniek kan namelijk ook gebruikt worden indien de coëfficiënten van de lineaire differentiaalvergelijking functies van x zijn in plaats van constanten. In dat geval moeten er voor een DV van de n^{de} orde, wel n onafhankelijke oplossingen van de HLDV gekend zijn (bij constante coëfficiënten worden deze gevonden door de karakteristieke vergelijking).

Voor de variatie van de parameters kan het volgende begrip interessant zijn. De *Wronskiaan* of *determinant van Wronski* (vernoemd naar de Pools wiskundige Józef Hoene-Wroński) van n functies $\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n$, wordt gedefinieerd als de volgende determinant:

$$W(\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Merk op dat de Wronskiaan een functie van x is en voor lineair onafhankelijke functies ϕ_i verschilt van nul.

De bedoeling is nu de particuliere oplossing van de DV te vinden. Deze heeft de volgende vorm, waarin $y_1, y_2 \dots y_n$ de gekende, onafhankelijke oplossingen zijn. De functies $B_i(x)$ zullen we bepalen met variatie van de parameters.

$$y_p = \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \cdot y_i$$

We noteren vanaf hier B_i in plaats van $B_i(x)$ voor de overzichtelijkheid. Deze y_p afleiden geeft:

$$y_p' = \sum_{i=1}^{n} B_i' \cdot y_i + \sum_{i=1}^{n} B_i \cdot y_i'$$

We eisen nu dat de eerste term in deze vergelijking nul is, dus $B_1' \cdot y_1 + B_2' \cdot y_2 + \ldots + B_n' \cdot y_n = 0$. Dan geldt:

$$y_p'' = \sum_{i=1}^{n} B_i' \cdot y_i' + \sum_{i=1}^{n} B_i \cdot y_i''$$

Dit proces wordt herhaald door telkens het linkerlid gelijk aan nul te stellen en af te leiden, tot aan $y^{(n)}$:

$$y_p^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} B_i' \cdot y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} B_i \cdot y_i^{(n)}$$

Wanneer we nu alle rechterleden van bovenstaande vergelijkingen samennemen en ze groeperen naar de B_i's, geldt dat die optellen tot nul (immers, y_i is een oplossing van de DV). Tevens stelden we alle linkerleden gelijk aan nul om deze structuur te kunnen opbouwen. Zodoende moet het linkerlid van de laatste vergelijking voor $y_p^{(n)}$, gelijk zijn aan de functie $f(x)$, het rechterlid van de oorspronkelijke DV.

Via deze vergelijkingen bekomen we het volgende stelsel in $B'_1, B'_2 \dots B'_n$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} B'_i \cdot y_i & = & B'_1 \cdot y_1 + B'_2 \cdot y_2 + \ldots + B'_n \cdot y_n & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} B'_i \cdot y'_i & = & B'_1 \cdot y'_1 + B'_2 \cdot y'_2 + \ldots + B'_n \cdot y'_n & = & 0 \\ \ldots & = & \ldots & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} B'_i \cdot y_i^{(n-1)} & = & B'_1 \cdot y_1^{(n-1)} + B'_2 \cdot y_2^{(n-1)} + \ldots + B'_n \cdot y_n^{(n-1)} & = & f(x) \end{cases}$$

Merk op dat dit kan worden geschreven als een product van matrices, oplosbaar met de methode van Cramer.

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ \ldots \\ B'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ f(x) \end{bmatrix}$$

De methode van Cramer hierop toepassen levert uiteindelijk de oplossingen voor $B'_1, B'_2 \dots B'_n$, waarna deze geïntegreerd kunnen worden. In deze formule staat W voor de Wronskiaan van de gekende oplossingen $(y_1, y_2 \dots y_n)$ en W_i voor de Wronskiaan waarvan de i^{de} kolom is vervangen door $0, 0 \dots f(x)$.

$$B'_i = \frac{W_i(x)}{W(x)} \qquad \Rightarrow \qquad B_i = \int \frac{W_i(x)}{W(x)} \, \mathrm{d}x$$

Hiermee is de oplossing van de DV bepaald. Immers, de homogene vergelijking werd vastgelegd door de n onafhankelijke oplossingen y_i, en we vinden via variatie van de parameters ook een particuliere oplossing. De totale oplossing, met n constanten $C_1, C_2 \dots C_n$, wordt dus:

$$y = y_h + y_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \frac{W_i(x)}{W(x)} \, \mathrm{d}x + C_i \right) \cdot y_i$$

Opmerking Hoewel algemener toepasbaar, is de methode van de variatie van de parameters niet altijd eenvoudig. Daarom wordt de methode van de onbepaalde coëfficiënten verkozen wanneer dit mogelijk is (bij lineaire DV's met constante coëfficiënten); variatie van de parameters is eerder een techniek waarmee computers worden uitgerust.

5 Voorbeelden

Factorisatie

- $y' \cdot (y' + y) = x \cdot (x + y)$
  Factorisatie geeft $(y' + y + x) \cdot (y' - x) = 0$.
- $y' \cdot (2y - e^x) = 2(y')^2 - e^x \cdot y$
  Factorisatie geeft $(y - y') \cdot (e^x + 2y') = 0$.

Integratie

- $y'' = \cos 2x$
- $y''' = 3x + 3$
- $y'' = e^{2x}$
- $y'' = x \cdot e^x + \cos x$

Scheiding van veranderlijken

- $y' = x^2 + \sin \dfrac{x}{2}$
- $y' = \dfrac{1}{y}$
- $y' = \dfrac{x}{y - 1}$
- $y' = y$
- $x \cdot y + (1 + x^2) \cdot y' = 0$

Homogene differentiaalvergelijkingen

- $xy' = x + y$
- $2xyy' = x^2 + 3y^2$
- $y' = \dfrac{y}{x + y}$
- $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

Lineaire differentiaalvergelijkingen

- $(x + 2) \cdot y' + y = 2 \qquad \text{met } x \neq -2$
- $y' + 3y = x + e^{-2x}$
- $y' - y = x^2$
- $x^2 \cdot y' + x \cdot y = 1$
- $x \cdot \ln x \cdot y' + y = x \cdot e^x$

Differentiaalvergelijkingen van Bernoulli

- $y' - \dfrac{x^2 y}{2} = y^3 x^2 e^{-x^3}$
- $xy' = y + y^2$
- $y' + y + (\sin x - \cos x) \cdot y^2$

Oplosbaar naar $\boldsymbol{y}$

- $16x^2 + 2(y')^2 \cdot y - (y')^3 \cdot x = 0$
- $x = y \cdot y' - x \cdot (y')^2$
- $y = (y')^5 + (y')^3 + y' + 5$
- $y^2 = 1 + (y')^2$

Oplosbaar naar $\boldsymbol{x}$

- $y = 3y' \cdot x + 6(y')^2 \cdot y^2$
- $y = 2x \cdot y' + y \cdot (y')^2$
- $x = (y')^3 - y' - 1$

Substitutie

- $y' = (x + y + 3)^2$
- $2y \cdot y' = y^2 + x - 1$
- $y' = \csc(x + y) - 1$
- $y \cdot \cos(y^2) \cdot y' = \sin(y^2)$
- $y' = (x^2 + y - 1)^2 - 2x$
- $y' = -2y + y^2 \cdot \cos x$
- $x \cdot y' - y = \sqrt{x \cdot y + x^2}$
- $y' \cdot \cos y = e^{-x} - \sin y$
- $y' + 2x = 2\sqrt{x^2 + y}$

Differentiaalvergelijkingen van Riccati

- $y' = -2 - y + y^2,$ met $y_1 = 2$ als particuliere oplossing
- $y' = \dfrac{2\cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2\cos x},$ met $y_1 = \sin x$ als particuliere oplossing

Exacte differentiaalvergelijkingen

- $(e^x \cdot \sin y - 2y \cdot \sin x) + (e^x \cdot \cos y + 2\cos x) \cdot y' = 0$
- $(9x^2 + y - 1) - (4y - x) \cdot y' = 0$
- $(x - y^2) \cdot y' + (y - x^2) = 0$

Multiplicatoren

- $(3xy + y^2) + (x^2 + xy) \cdot y' = 0$, met $\mu(x) = x$
- $y^2 + 2y \cdot y' = x$, met $\mu(x) = e^x$
- $(\cos y - \ln y \cdot \cos y - \dfrac{1}{y}) \cdot x^2 \cdot y' = 2x \cdot \ln y - 2x$, met $\mu(y) = e^{\sin y}$

Differentiaalvergelijkingen van Clairaut

- $y = x \cdot y' + (y')^2$
- $y = x \cdot y' + \sqrt{(y')^2 + 1}$
- $y = (x + 1) \cdot y' - (y')^2$
- $y = x \cdot y' + \dfrac{a \cdot y'}{\sqrt{(y')^2 + 1}}$ ‡

Differentiaalvergelijkingen van Lagrange

- $y = 2x \cdot y' - (y')^2$
- $y = 2x \cdot y' + \ln \sqrt{y'}$
- $y = x \cdot (1 + y') + (y')^2$

Verlagen van graad

- $x \cdot y'' - y' = x^2 \cdot e^x$
- $y'' \cdot y = (y')^2$
- $(x^2 + 1) \cdot y'' + 2x \cdot y' = \dfrac{2}{x^2 + 1}$
- $y^2 \cdot y'' = y'$
- $y'' - y' = 2y \cdot y'$
- $\sin x \cdot y'' - \cos x \cdot y' + 1 = 0$

Reductie van de orde

- $x^2 \cdot y'' - (x^2 + 2x) \cdot y' + (x + 2) \cdot y = x^3$, met $y = x$ als oplossing
- $x \cdot y'' - (2x + 1) \cdot y' + (x + 1) \cdot y = x^2 \cdot e^x$, met $y = e^x$ als oplossing
- $2x^2 \cdot y'' + x \cdot y' - 3y = 0$, met $y = \dfrac{1}{x}$ als oplossing
- $x^3 \cdot y'' + x \cdot y' - y = 0$, met $y = x$ als oplossing

‡De singuliere oplossing hiervan, $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, is de vergelijking van een astroïde.

Equidimensionale vergelijkingen

- $x \cdot y'' = 2y \cdot y'$
- $(1-x) \cdot \left[y \cdot \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right] + x^2 \cdot y^2 = 0$

Homogene lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

- $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
- $y'' - 2y' - 3y = 0$
- $y'' - 4y' + 4y = 0$
- $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 13y'' - 12y' + 4y = 0$
- $y'' + 4y = 0$
- $y^{(4)} + 4y = 0$
- $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 12y'' + 4y' - 13y = 0$

Methode van de onbepaalde coëfficiënten

- $y'' - 2y' - 3y = \cos 2x$
- $y'' + 4y = 2x$
- $y'' + 4y = \sin 2x$
- $9y'' + 6y' + y = x^2 + 1$
- $3y'' + 10y' + 3y = 5e^{-7x}$

Eulervergelijkingen

- $x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' + 2y = 0$
- $x^3 \cdot y''' - x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' - 4y = 0$

Variatie van de parameters

- $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$
- $y'' + y = \csc x$
- $y'' + 4y = \cos 2x \cdot \sin 2x$
- $y'' - y = e^{2x} + \cos x$
- $y'' - 9y = x \cdot e^{3x}$
- $y''' + y' = \sec x$
- $y'' + 4y' + 4y = \cosh x$
- $(x^3 \sin x) \cdot y''' - (3x^2 \sin x + x^3 \cos x) \cdot y'' + (6x \sin x + 2x^2 \cos x) \cdot y' - (6 \sin x + 2x \cos x) \cdot y = x \cdot \sin x$, met $x \cdot \sin x$, x^2 en x als onafhankelijke oplossingen

6 Differentiaalvergelijkingen oplossen met *Wolfram Mathematica*

Het wiskundesoftwarepakket *Wolfram Mathematica* kan worden gebruikt om verschillende soorten DV's op te lossen. Het programma kiest automatisch het juiste algoritme en kan overweg met beginvoorwaarden, extra parameters of stelsels.

De command DSolve om een DV op te lossen gebruikt de volgende syntax:

$$\text{DSolve}\,[DV, y[x], x]$$

De differentiaalvergelijking zelf wordt ingevuld in DV. Gebruik x voor de onafhankelijke variabele, $y[x]$ voor de afhankelijke variabele, $y'[x]$, $y''[x]$, $y'''[x]\ldots$ voor zijn afgeleiden en == als gelijkheidsteken. Ook de standaardfuncties van *Mathematica* mogen gebruikt worden: Cos$[x]$, Sin$[x]$, Sqrt$[x]$, Log$[x{,}a]\ldots$

Randvoorwaarden worden ingevoegd als element in een lijst met de DV:

$$\text{DSolve}\,[\{DV, VW\}, y[x], x]$$

Op dezelfde manier kunnen stelsels met meerdere afhankelijke variabelen worden ingegeven:

$$\text{DSolve}\,[\{DV1, DV2\}, \{y[x], z[x]\}, x]$$

Deze syntax heeft als nadeel dat de gevonden functie $y(x)$ niet te gebruiken is in de rest van het document. Door in de oorspronkelijke syntax y in te vullen in plaats van $y[x]$ (niet in de DV, enkel in de declaratie), kan de functie wel geëxtraheerd worden.

$$\begin{aligned} \text{opl} &= \text{DSolve}\,[DV, y, x]; \\ \text{m} &= \text{opl}[[1]] \end{aligned}$$

Als er meerdere oplossingen voor de DV bestaan, worden ze aangeroepen met opl[[2]] en volgende.

Op deze manier kunnen latere functiewaarden of afgeleiden nog bepaald worden:

$$\begin{gathered} y[x]\ /.\ \text{m} \\ y'[x]\ /.\ \text{m} \\ y[3]\ /.\ \text{m} \end{gathered}$$

7 Orthogonale krommen

Een orthogonale familie krommen bestaat uit twee groepen krommen, waarvan elke kromme uit de ene groep elke kromme van de andere loodrecht snijdt.

Het vinden van orthogonale krommen komt vaak voor in de wetenschappen: zo staan in de elektrostatica de elektrische veldlijnen altijd loodrecht op de equipotentiaallijnen, in de stromingsleer staan de stroomlijnen loodrecht op de lijnen met constante snelheid...

Het algemene principe om een familie orthogonale krommen te vinden voor een gegeven functie $y_1 = f_1(x, c_1)$, is die $y_2 = f_2(x, c_2)$ te zoeken waarvoor onderstaand verband geldt:

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = \frac{-\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y_2}$$

De raaklijn van de gegeven functie y_1 (het linkerlid) is dan tevens de normaal van de gezochte functie y_2 (het rechterlid), zodat de functies elkaar orthogonaal snijden. Het linkerlid laten we zo staan, in het rechterlid vullen we de gegeven functie in x en c_1 in. Nu moet c_1 nog geëlimineerd worden uit de oorspronkelijke functie en ingevuld in de DV, zodat het resultaat een DV uitsluitend in x en y_2 vormt (onafhankelijk van c_1). Deze DV oplossen geeft de vergelijking $y_2 = f(x, c_2)$ als familie orthogonale krommen; merk op dat c_2 hier de integratieconstante is.

Probeer de techniek uit als oefening op de volgende families:

- $y = c \cdot \sin x$
- $y = c \cdot x^2$
- $y = c \cdot e^x$

8 Toepassingen in fysica e.d.

8.1 Vallende waterdruppel

In een vereenvoudigd model ondergaat een vallend object (beschouwbaar als een puntmassa), zoals een waterdruppel, twee inwerkende krachten: de zwaartekracht, gericht volgens de valrichting, en een tegenwerkende wrijvingskracht, evenredig met de valsnelheid. De som van deze krachten is volgens de tweede wet van Newton gelijk aan het product van massa en versnelling van de druppel. In een vergelijking wordt dit:

$$\vec{F_g} + \vec{F_w} = m \cdot \vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot g - k \cdot v = m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

De oplossing van deze vergelijking, met de randvoorwaarde $v(0) = 0$, wordt dan:

$$v(t) = \frac{m \cdot g}{k} \cdot \left(1 - e^{\frac{-k \cdot t}{m}}\right)$$

Merk op dat de snelheid van de druppel (voor $t \to \infty$) dus nadert tot $\dfrac{m \cdot g}{k}$.

8.2 Afkoelingswet van Newton

Newtons afkoelingswet stelt dat de temperatuursverandering van een object recht evenredig is met het verschil tussen de (variabele) temperatuur $T(t)$ van het object zelf en de (constante) temperatuur R van de omgeving. In functie van de tijd geeft dit:

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = k \cdot (T(t) - R)$$

Aangezien we een afkoeling beschouwen, geldt dat $T(t) \geq R$. Deze DV valt eenvoudig op te lossen tot:

$$T(t) = C \cdot e^{-kt} + R$$

Om C te bepalen vullen we $t = 0$ in, zodat $C = T(0) - R$. De constante k dient bepaald te worden uit meetresultaten of gegevens om de oplossing volledig vast te leggen.

$$T(t) = (T(0) - R) \cdot e^{\pm kt} + R$$

Zoals te verwachten is, nadert de temperatuur van het object (voor $t \to \infty$) dus tot R.

8.3 Economische elasticiteit

Als $K(q)$ de kostenfunctie bij de productie van q producten voorstelt, wordt in de economie de elasticiteit $E(q)$ van de kosten gedefinieerd als:

$$E(q) = \frac{\text{marginale kostprijs}}{\text{gemiddelde kostprijs}} = \frac{K'(q)}{\left(\frac{K(q)}{q}\right)} = \frac{K'(q) \cdot q}{K(q)}$$

8.4 Afbraak van medicijnen bij constante toevoer

Wanneer een patiënt door middel van een infuus per uur een constante hoeveelheid pijnstiller wordt toegediend, breekt het lichaam dit medicijn af met een snelheid die recht evenredig is met de aanwezige hoeveelheid. Noemen we die aanwezige hoeveelheid $M(t)$, de constante toevoer a en de afbraaksnelheid v (met $0 < v < 1$, de relatieve hoeveelheid afgebroken stof per tijdseenheid), dan schrijven we volgende lineaire DV.

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = a - v \cdot M$$

Wanneer we deze oplossen en $t = 0$ invullen verkrijgen we:

$$M(t) = \frac{a}{v} \cdot \left(1 - e^{-vt}\right)$$

De hoeveelheid medicijn zal dus op lange termijn (voor $t \to \infty$) evolueren naar $\dfrac{a}{v}$.

8.5 Weerstand en zelfinductie in een stroomcircuit

De stroom $I(t)$ in een circuit met weerstand R en zelfinductie L, aangedreven door een elektromagnetische krachtbron $U(t)$, voldoet aan volgende differentiaalvergelijking:

$$U(t) = I(t) \cdot R + L \cdot \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$

De oplossing hiervan, met de beginvoorwaarde $I = 0$ op $t = 0$, wordt:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} \cdot \left(1 - e^{\frac{-R\cdot t}{L}}\right)$$

8.6 Groeimodel van Malthus

Het groeimodel van Malthus beschouwt een onbegrensde groei, bijvoorbeeld een bacteriecultuur of radioactief verval. Hoewel eenvoudig vormt het de basis voor geavanceerdere groeimodellen, zoals dat van Verhulst. Het groeimodel van Malthus stelt dat de groeisnelheid recht evenredig verloopt met de populatiegrootte $N(t)$. De evenredigheidsfactor k is hier dan de intrinsieke groeisnelheid: de groeisnelheid wanneer er geen externe hindernissen zijn. Dit geeft als differentiaalvergelijking:

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = k \cdot N(t)$$

Deze DV is eenvoudig op te lossen tot:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$$

De constante C staat hier voor de beginpopulatie, op het tijdstip $t = 0$, dus schrijven we die als N_0.

8.7 Groeimodel van Verhulst

Het logistische groeimodel van Verhulst is een uitbreiding van het groeimodel van Malthus en gaat ervan uit dat de omgeving zorgt voor een rem op het groeiproces; deze groei is dus niet onbegrensd. Deze differentiaalvergelijking is lastiger.

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = k \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{M}\right)$$

M is in deze uitdrukking het verzadigingspunt: de maximale draagkracht voor de populatie. Vergelijk deze vergelijking met het groeimodel van Malthus, waar $M = \infty$ kan gesteld worden. De oplossing hiervan geeft:

$$N(t) = \frac{C \cdot e^{kt} \cdot M}{1 + C \cdot e^{kt}}$$

Nu kan C nog bepaald worden d.m.v. de beginpopulatie N_0. Vul $t = 0$ in en we vinden $C = \dfrac{N_0}{M - N_0}$.

8.8 Mengproblemen

Het mengprobleem beschouwt een tank met vloeistof waarin een bepaalde concentratie “vervuiling” opgelost zit, zoals zout, en waarbij er vloeistof uit de tank loopt en eventueel wordt aangevuld. Een mengmechanisme verzekert op elk ogenblik een homogene samenstelling in de tank. Het probleem bestaat er nu in te bepalen hoeveel “vervuiling” er nog in te tank zit op een bepaald tijdstip t. Eerst hebben we enkele notaties nodig.

- $y(t)$: de hoeveelheid “vervuiling” van de vloeistof in de tank op tijdstip t
- $V(t)$: het totale volume vloeistof op tijdstip t

- V_0: het beginvolume vloeistof in te tank
- R: het debiet van de instromende vloeistof
- S: het debiet van de uitstromende vloeistof
- a: de concentratie "vervuiling" van de instromende vloeistof, mag ook 0 zijn

De algemene differentiaalvergelijking is lastig op te lossen, maar gelukkig worden meestal speciale gevallen beschouwd, zoals $a = 0$ of $R = S$.

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = R \cdot a - \frac{S \cdot y(t)}{V(t)} = R \cdot a - \frac{S \cdot y(t)}{V_0 + (R - S) \cdot t}$$

8.9 Afstand, snelheid en versnelling

Een eenparig versnelde beweging is een beweging waarbij de versnelling $a(t)$ constant blijft; bij een eenparige beweging is deze versnelling 0. Aangezien de snelheid $v(t)$ de afgeleide is van de afstandsfunctie $s(t)$, en $a(t)$ de afgeleide van $v(t)$, kan $s(t)$ als volgt worden gevonden.

$$s''(t) = a$$

Deze vergelijking oplossen geeft eenvoudigerwijs $s(t) = \frac{ax^2}{2} + C_1\, x + C_2$. Randvoorwaarden als $s(0) = s_0$ en $v(t) = v_0$ leggen de oplossing eenduidig vast.

$$s(t) = \frac{ax^2}{2} + v_0 x + s_0$$

8.10 Harmonische trilling

8.10.1 Vrij

Een voorwerp opgehangen aan een veer zal bij uitrekking een tegenwerkende veerkracht ondervinden. Men kan aantonen dat deze veerkracht gelijk is aan $-k \cdot s(t)$, waarbij k de veerconstante voorstelt en $s(t)$ de uitrekking van de veer t.o.v. de evenwichtstoestand. Wanneer we de wrijving door de luchtweerstand verwaarlozen, geldt volgens de tweede wet van Newton:

$$m \cdot a(t) = -k \cdot s(t) \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot s''(t) + k \cdot s(t) = 0$$

Deze homogene lineaire DV oplossen geeft volgende oplossing voor $s(t)$.

$$s(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

De randvoorwaarden $v(0) = 0$ en de beginuitrekking $s(0) = A$ (de amplitude) geeft uiteindelijk:

$$s(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

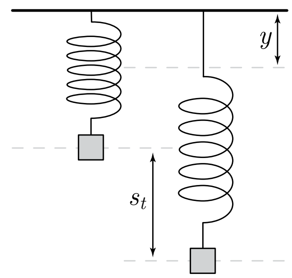
8.10.2 Gedempt

Voor realistischere resultaten moeten we wel een dempingsfactor meerekenen, een tegenwerkende kracht die recht evenredig is met de snelheid. De differentiaalvergelijking in dit geval blijft een HLDV:

$$m \cdot a(t) = -k \cdot s(t) - b \cdot v(t) \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot s''(t) + b \cdot s'(t) + k \cdot s(t) = 0$$

8.10.3 Gedwongen

Bij een gedwongen harmonische trilling wordt de bovenkant van de veer meebewogen volgens een bepaalde functie $y(t)$. Om de uitwijking s van de veer zelf te verkrijgen, moeten we daarom y aftrekken van de "zichtbare" totale uitwijking s_t; zie onderstaande figuur. In dit geval wordt de differentiaalvergelijking een niet-homogene LDV.



$$m \cdot a(t) = -k \cdot (s(t) - y(t)) - b \cdot v(t) \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot s''(t) + b \cdot s'(t) + k \cdot s(t) = k \cdot y(t)$$

8.11 Zelfinductie, weerstand en capaciteit

In een elektrisch circuit geldt het volgende verband.

$$L \cdot \frac{\mathrm{d}^2 Q(t)}{\mathrm{d}t^2} + R \cdot \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{Q(t)}{C} = E(t)$$

- L: zelfinductie, gemeten in henry (H)
- $Q(t)$: lading op tijdstip t, gemeten in coulomb (Q)
- R: weerstand, gemeten in ohm (Ω)
- C: capaciteit van bijv. een condensator, gemeten in farad (F) of vaker microfarad (mF)
- $E(t)$: elektrische bewegingskracht op tijdstip t, gemeten in volt (V)

Wat hier ook handig kan zijn, is de eigenschap dat de stroomsterkte $I(t) = \dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}$, gemeten in ampère ($A$).