Hoofdstuk 5

Toevalsveranderlijken en waarschijnlijkheidsdistributies

Marnix Van Daele

Marnix.VanDaele@UGent.be

Vakgroep Toegepaste Wiskunde en Informatica
Universiteit Gent

Toevalsveranderlijken

Experiment : worp met muntstuk   resultatenruimte $= \{K, M\}$

$n = 2$ onafhankelijke experimenten $\mathrm{P}(K) = \mathrm{P}(M) = \frac{1}{2}$

$$I = \text{aantal keer kop}$$

	munt 1	munt 2	$\mathrm{P}(E_i)$	I
E_1	K	K	$1/4$	2
E_2	K	M	$1/4$	1
E_3	M	K	$1/4$	1
E_4	M	M	$1/4$	0

i	0	1	2
$P(I = i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

kansverdeling van de toevalsveranderlijke I

Een toevalsveranderlijke is een numerieke functie gedefinieerd over de resultatenruimte.

Notaties

Een discrete toevalsveranderlijke is een veranderlijke die hoogstens een aftelbaar aantal waarden kan aannemen. Met aftelbaar wordt bedoeld dat de waarden geassocieerd kunnen worden met de getallen $1, 2, 3, \ldots$.

Een continue toevalsveranderlijke is een veranderlijke die een oneindig groot aantal waarden, corresponderend met de punten op een lijninterval, kan aannemen.

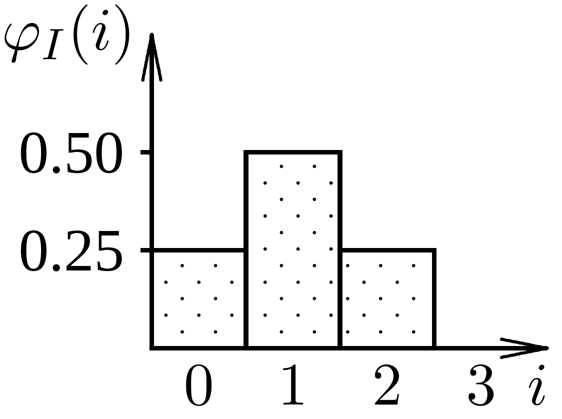
	discreet	continu
veranderlijke	$I, J, K, \ldots$	$X, Y, Z, \ldots$
waarden	$i, j, k, \ldots$	$x, y, z, \ldots$
	$\mathrm{P}(I = i)$	$\mathrm{P}(x \leq X \leq x + \mathrm{d}x)$
	$\mathrm{P}(I \leq w)$	$\mathrm{P}(X \leq w)$

Waarschijnlijkheidsverdelingen

van een discrete toevalsveranderlijke I

$$P(I = i) = \varphi_I(i)$$

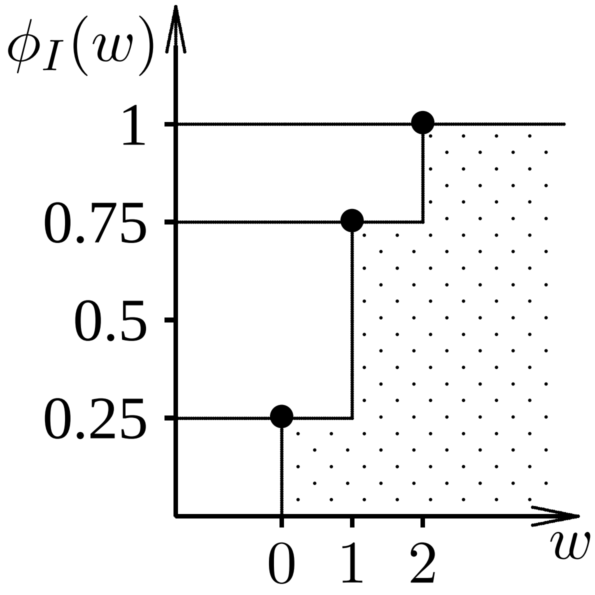
i	0	1	2
$\varphi_I(i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$



$\varphi_I(i)$: differentiële distributiefunctie van de discrete toevalsveranderlijke I

$\Phi_I(w)$: cumulatieve distributiefunctie van de discrete toevalsveranderlijke I

$$\Phi_I(w) = \sum_{i \leq w} \varphi_I(i)$$

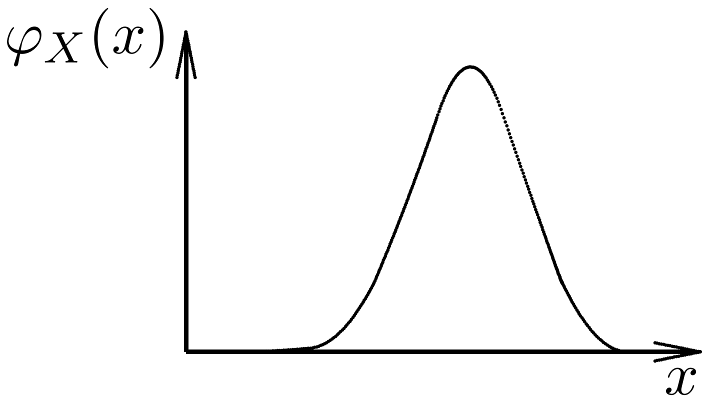


Waarschijnlijkheidsverdelingen

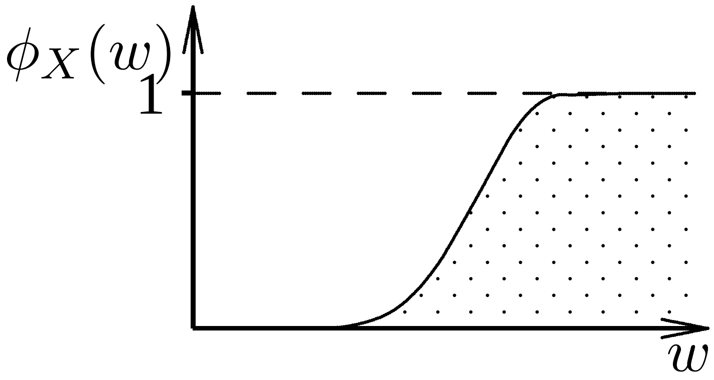
van een continue toevalsveranderlijke X

$$\mathrm{P}(x \leq X \leq x + \mathrm{d}x) = \varphi_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$\varphi_X(x)$: differentiële distributiefunctie of kansdichtheid van de continue toevalsveranderlijke X



$\Phi_X(w)$: cumulatieve distributiefunctie van de continue toevalsveranderlijke X

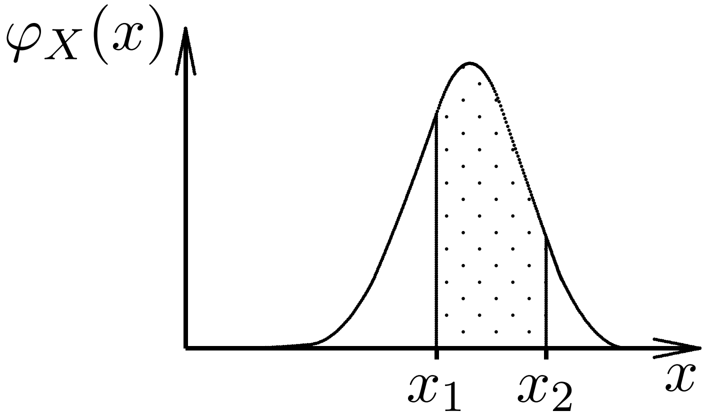


$$\Phi_X(w) = \int_{-\infty}^{w} \varphi_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\varphi_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_X(x)$$

Waarschijnlijkheidsverdelingen

van een continue toevalsveranderlijke X



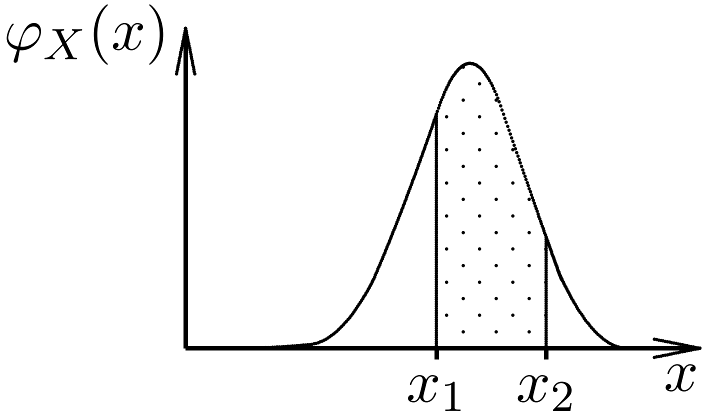
$$\mathrm{P}(x \le X \le x + \mathrm{d}x) = \varphi_X(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\Phi_X(w) = \int_{-\infty}^{w} \varphi_X(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x_1 < X \le x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} \varphi_X(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{-\infty} \varphi_X(x)\ \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{x_2} \varphi_X(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{x_2} \varphi_X(x)\ \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{x_1} \varphi_X(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \Phi_X(x_2) - \Phi_X(x_1) \end{aligned}$$

Opmerking

voor continue toevalsveranderlijken



De kans dat een continue toevalsveranderlijke X een waarde aanneemt in een oneindig klein interval $[x,\, x + \mathrm{d}x]$ is $\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x$.

De kans dat X een welbepaalde waarde x aanneemt daarentegen is steeds 0 (je zou kunnen stellen dat het interval breedte 0 heeft).

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x_1 < X \leq x_2) &= \mathrm{P}(x_1 \leq X \leq x_2) \\ &= \mathrm{P}(x_1 \leq X < x_2) \\ &= \mathrm{P}(x_1 < X < x_2) \end{aligned}$$

De transformatie $Y = a\,X + b$

$$
\begin{aligned}
a > 0\ :\ \Phi_Y(y) = \mathrm{P}(Y \le y) &= \mathrm{P}(a\,X + b \le y) \\
&= \mathrm{P}\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = \Phi_X\left(\frac{y-b}{a}\right)
\end{aligned}
$$

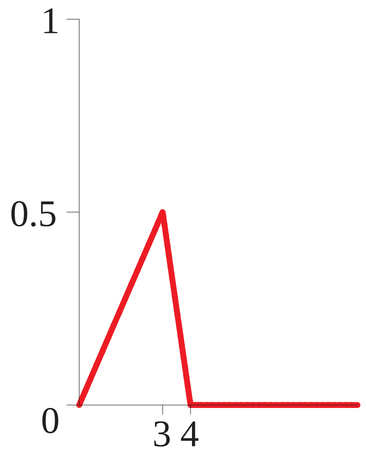
$$
\varphi_Y(y)\,\mathrm{d}y = \varphi_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\,\mathrm{d}\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{a}\,\varphi_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\,\mathrm{d}y
$$

$$
\begin{aligned}
a < 0\ :\ \Phi_Y(y) = \mathrm{P}(Y \le y) &= \mathrm{P}(a\,X + b \le y) \\
&= \mathrm{P}\left(X \ge \frac{y-b}{a}\right) = 1 - \Phi_X\left(\frac{y-b}{a}\right)
\end{aligned}
$$

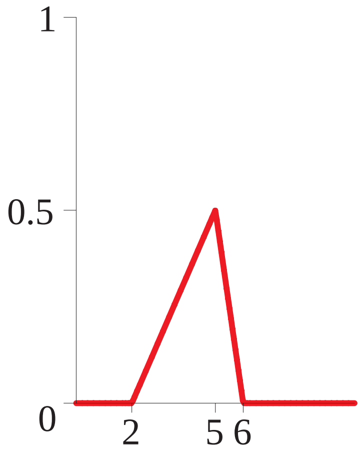
$$
\varphi_Y(y)\,\mathrm{d}y = -\varphi_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\,\mathrm{d}\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{-a}\,\varphi_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\,\mathrm{d}y
$$

$$
\varphi_Y(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{|a|}\,\varphi_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\,\mathrm{d}y
$$

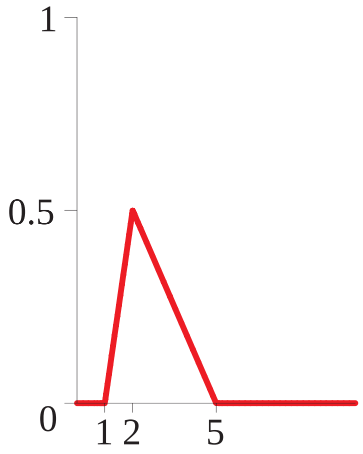
De transformatie $Y = a\,X + b$



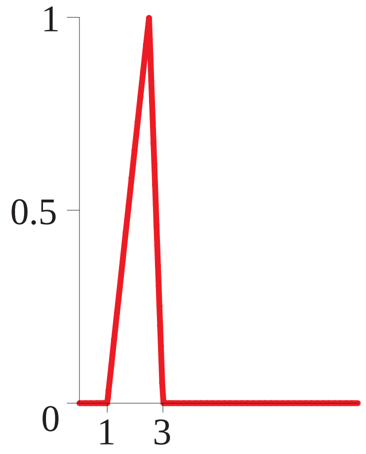
X



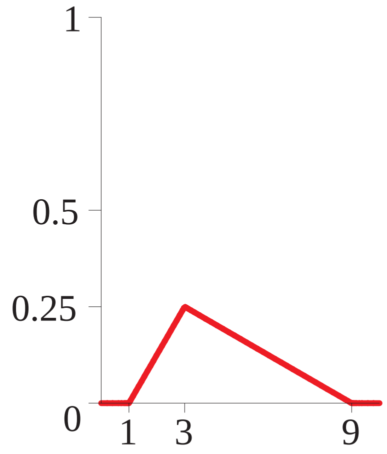
$Y = X + 2$



$Y = 5 - X$



$Y = 1 + X/2$

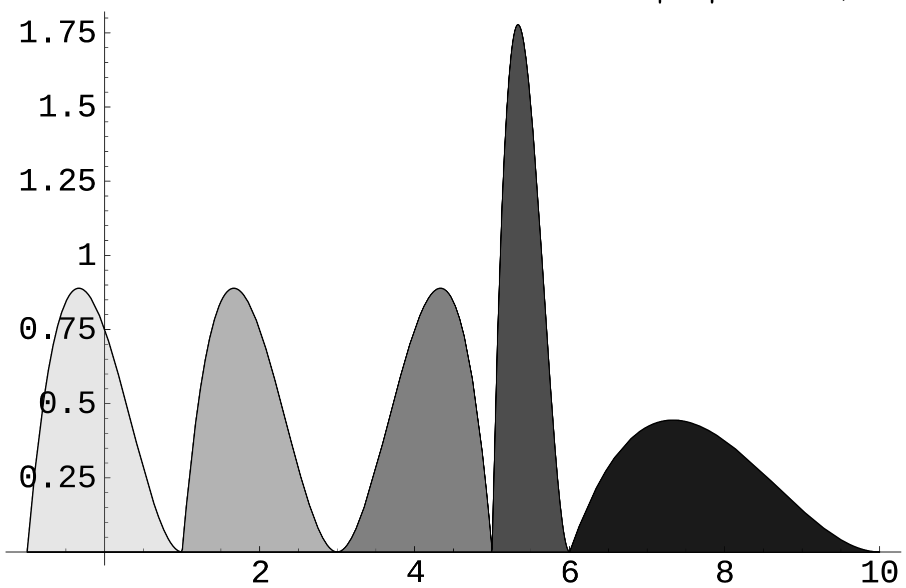


$Y = 9 - 2\,X$

De transformatie $Y = a\,X + b$

$$\varphi_Y(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{|a|}\,\varphi_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\,\mathrm{d}y$$

Concreet betekent de overgang van X op Y dat $\varphi_X(x)$ en $\Phi_X(x)$ worden (i) verschoven, (ii) eventueel gespiegeld (als $a < 0$) en (iii) in de breedte uitgerokken (als $|a| > 1$) of samengedrukt (als $|a| < 1$).



van links naar rechts

X

$Y_1 = X + 2$

$Y_2 = 4 - X$

$Y_3 = \frac{1}{2}\,X + \frac{11}{2}$

$Y_4 = 2\,X + 8$

Karakteristieken

De verwachtingswaarde $\mathrm{E}[f(X)]$ van een functie $f(X)$ van een

- discrete toevalsveranderlijke X wordt gedefinieerd als

$$\mathrm{E}[f(X)] = \sum_i f(x_i)\,\varphi_X(x_i)$$

- continue toevalsveranderlijke X wordt gedefinieerd als

$$\mathrm{E}[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{E}[a\,f(X) + b\,g(X)] = a\,\mathrm{E}[f(X)] + b\,\mathrm{E}[g(X)]$$

Karakteristieken

discreet	continu
$\mathrm{E}[f(I)] = \sum_i f(i)\varphi_I(i)$	$\mathrm{E}[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x$
$\mathrm{E}[1] = \sum_i \varphi_I(i) = 1$	$\mathrm{E}[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$
$\mu_I = \mathrm{E}[I] = \sum_i i\,\varphi_X(i)$	$\mu_X = \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x$
$\mu_{k,I} = \mathrm{E}[I^k] = \sum_i i^k\,\varphi_X(i)$	$\mu_{k,X} = \mathrm{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\,\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x$

μ_k : moment van de k'de orde

Karakteristieken

discreet | continu

$$\mathrm{E}[f(I)] = \sum_i f(i)\varphi_I(i) \qquad \mathrm{E}[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mu'_{k,I} = \mathrm{E}[(I-\mu_I)^k] \qquad \mu'_{k,X} = \mathrm{E}[(X-\mu_X)^k]$$

$$= \sum_i (i-\mu_I)^k\,\varphi_X(i) \qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^k\,\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x$$

μ'_k : centraal moment van de k'de orde

$$\mu'_{1,I} = \mathrm{E}[I-\mu_I] = \mathrm{E}[I] - \mu_I\,\mathrm{E}[1] = \mu_I - 1\,\mu_I = 0$$

$$\sigma_I^2 = \mu'_{2,I} = \mathrm{E}[(I-\mu_I)^2] \qquad \sigma_X^2 = \mu'_{2,X} = \mathrm{E}[(X-\mu_X)^2]$$

$$\sigma_I^2 = \mathrm{E}[(I-\mu_I)^2] = \mathrm{E}[I^2 - 2\,\mu_I\,I + \mu_I^2]$$

$$= \mathrm{E}[I^2] - 2\,\mu_I\,\mathrm{E}[I] + \mu_I^2\,\mathrm{E}[1] = \mu_{2,I} - \mu_I^2$$

μ, σ^2 en σ

discreet	continu
$\mathrm{E}[f(I)] = \sum_i f(i)\varphi_I(i)$	$\mathrm{E}[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x$
$\mu_I = \sum_i i\,\varphi_X(i)$	$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x$
$\sigma_I^2 = \sum_i i^2\,\varphi_X(i) - \mu_I^2$	$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x - \mu_X^2$
$\sigma_I = \sqrt{\sigma_I^2}$	$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$

De transformatie $Y = a\,X + b$

$$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[a\,X + b] = a\,\mathrm{E}[X] + b$$

$$\mu_{a\,X+b} = a\,\mu_X + b$$

$$\sigma_Y^2 = E[(Y-\mu_Y)^2] = E[(a\,X+b-(a\,\mu_X+b))^2] = a^2\,E[(X-\mu_X)^2]$$

$$\sigma^2_{a\,X+b} = a^2\,\sigma^2_X$$

$$\sigma_{a\,X+b} = |a|\,\sigma_X$$

Karakteristieken

De gemiddelde afwijking van een veranderlijke X is

$$\mathrm{E}[|X - \mu_X|].$$

De modus of dominerende waarde van een discrete veranderlijke X is de waarde waarbij de waarschijnlijkheid het grootst is. Voor een continue veranderlijke is de modus de waarde waarvoor de waarschijnlijkheidsdichtheid het grootst is.

De mediaan van een veranderlijke X is de waarde w waarvoor

$$\Phi_X(w) = 1/2.$$

De momentenfunctie

$$\mathrm{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\,x}\,\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 1\,\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x + t\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2!}\,t^2\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\varphi_X(x)\,\mathrm{d}x + \dots$$

$$= 1 + \mu_1\,t + \frac{\mu_2}{2!}\,t^2 + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\mu_i}{i!} t^i$$

momentenfunctie $M_X(t) = \mathrm{E}[\exp(tX)]$

Stelling : $M_{a\,X+b}(t) = e^{b\,t}\,M_X(a\,t)$

Onafhankelijke veranderlijken

A en B zijn onafhankelijke verschijnselen

$$\iff \mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$$

Stel $A = (X \leq x)$ en $B = (Y \leq y)$

X en Y zijn onafhankelijke toevalsveranderlijken

$$\iff \quad \mathrm{P}((X \leq x) \cdot (Y \leq y)) = \mathrm{P}(X \leq x)\,\mathrm{P}(Y \leq y) \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}$$

$$\iff \quad \Phi_{X,Y}(x,\, y) = \Phi_X(x)\,\Phi_Y(y) \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}$$

afleiding naar x en naar y :

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Phi_{X,Y}(x,\, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_X(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Phi_Y(y) = \varphi_X(x)\,\varphi_Y(y)$$

$$\iff \quad \varphi_{X,Y}(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \varphi_X(x)\,\varphi_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{P}\left((x \leq X \leq x + \mathrm{d}x) \cdot (y \leq Y \leq y + \mathrm{d}y)\right) = \varphi_{X,Y}(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Onafhankelijke verschijnselen

Stelling Zijn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ twee aan twee onafhankelijk dan geldt voor $Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\, X_i$ dat

$$M_Y(t) = e^{a_0\, t} \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i\, t)$$

Onafhankelijke verschijnselen

Als $Z = a\,X + b\,Y$, dan is

$$\mu_Z = \mathrm{E}[a\,X + b\,Y] = a\,\mathrm{E}[X] + b\,\mathrm{E}[Y] = a\,\mu_X + b\,\mu_Y$$

$$\begin{aligned}
\sigma_Z^2 &= \mathrm{E}[(Z - \mu_Z)^2] \\
&= \mathrm{E}[(a\,X + b\,Y - (a\,\mu_X + b\,\mu_Y))^2] \\
&= \mathrm{E}[(a\,(X - \mu_X) + b\,(Y - \mu_Y))^2] \\
&= a^2\,\mathrm{E}[(X - \mu_X)^2] + 2\,a\,b\,\mathrm{E}[(X - \mu_X)\,(Y - \mu_Y)] \\
&\quad +b^2\,\mathrm{E}[(Y - \mu_Y)^2] \\
&= a^2\,\sigma_X^2 + 2\,a\,b\,\sigma_{XY} + b^2\,\sigma_Y^2
\end{aligned}$$

de covariantie van X en Y : $\sigma_{XY} = \mathrm{E}[(X - \mu_X)\,(Y - \mu_Y)]$

Opmerking : $\sigma_{XX} = \mathrm{E}[(X - \mu_X)\,(X - \mu_X)] = \sigma_X^2$

Onafhankelijkheid – covariantie

Stelling : Als X en Y onafhankelijk zijn, dan is $\sigma_{XY} = 0$.

Bewijs :

$$
\begin{aligned}
\sigma_{XY} &= \mathrm{E}[(X-\mu_X)\,(Y-\mu_Y)] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_X)\,(y-\mu_Y)\,\varphi_{X,Y}(x,\,y)\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_X)\,(y-\mu_Y)\,\varphi_X(x)\,\varphi_Y(y)\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_X)\,\varphi_X(x)\;\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(y-\mu_Y)\,\varphi_Y(y)\;\mathrm{d}y\right) \\
&= \mu'_{X,1}\,\mu'_{Y,1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Lineaire combinaties

Zij $Z = \sum_{i=1}^{n} a_i \, X_i$ waarbij $\mu_{X_i} = \mu_i$ en $\sigma_{X_i} = \sigma_i$ en $\sigma_{X_i X_j} = \sigma_{ij}$.

$$
\begin{aligned}
\mu_Z &= \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu_i \\
\sigma_Z^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_i \, a_j \, \sigma_{ij}
\end{aligned}
$$

Indien alle veranderlijken 2 aan 2 onafhankelijk zijn, vereenvoudigt deze betrekking tot

$$
\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, \sigma_i^2
$$

Correlatie

De correlatiecoëfficiënt $\rho_{XY} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\,\sigma_Y}$ drukt uit in hoeverre er een lineair verband bestaat tussen X en Y.

$$Y = a\,X + b \Longrightarrow \begin{cases} \mu_Y = a\,\mu_X + b \\ \sigma_Y = |a|\,\sigma_X \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} &= \mathrm{E}[(X - \mu_X)\,(Y - \mu_Y)] \\ &= \mathrm{E}[(X - \mu_X)\,((a\,X + b) - (a\,\mu_X + b))] \\ &= a\,\mathrm{E}[(X - \mu_X)^2] = a\,\sigma_X^2 \end{aligned}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\,\sigma_Y} = \frac{a\,\sigma_X^2}{\sigma_X\,(|a|\,\sigma_X)} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

$\rho_{XY} = 0 \Longleftrightarrow X$ en Y zijn ongecorreleerd