

Hoofdstuk 3

Fourier-analyse

Marnix Van Daele

Marnix.VanDaele@UGent.be

Vakgroep Toegepaste Wiskunde en Informatica
Universiteit Gent

Spectroscopische experimenten

- Spectroscopisch experiment : molecule exciteren en de elektromagnetische straling onderzoeken die uitgezonden of doorgestuurd wordt.
- Straling bevat bijdragen van elk van de vele oscillatoren in het systeem.
- Het verloop in de tijd van die straling kan een zeer gecompliceerd gedrag vertonen.
- Fluctuaties in de straling zijn zeer snel en dus moeilijk te detecteren.

In plaats van het tijdsverloop wordt **het spectrum** van de spectroscopische golf te onderzocht.

Daartoe : **Fourier-analyse**

Fourier-reeksen : inleiding

Taylorreeks

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \text{ met } a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}.$$

- convergentie in een interval $(-R, R)$
- $y = f(x) \iff a_0, a_1, a_2, \dots$
- afgebroken Taylorreeks is een **lokale** benadering
- extra informatie af te lezen uit Taylorreeks :
 - wat de functiewaarde in $x = 0$ is
 - of er een extremum is in $x = 0$
 - of de functie even of oneven is
 - ...

Fourier-reeksen

- Fourier-reeksen steunen op gelijkaardige principes als Taylorreeksen.
- Twee grote verschillen :
 - benaderingen zijn niet lokaal (d.w.z. in een punt) maar **globaal** (d.w.z. in een interval).
 - de reeks zal niet geschreven worden in termen van machten van x , maar in termen van sinussen en cosinussen.

Periodieke functies

$f(x)$ is **periodiek** als $\text{def}(f) = \mathbb{R}$ en er een positief getal p bestaat waarvoor

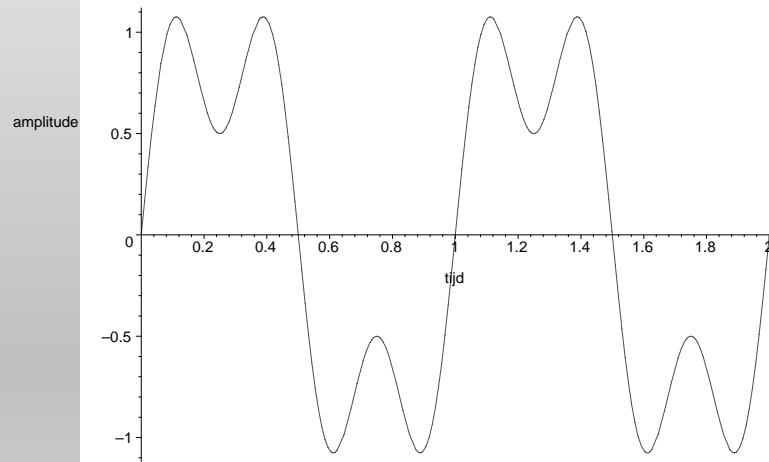
$$f(x + p) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- p : **periode** van $f(x)$
- $2\pi/p$: **frequentie** van $f(x)$
- kleinste p : **fundamentele** periode

$$\text{immers : } f(x + 2p) = f(x + p) = f(x) = \dots$$

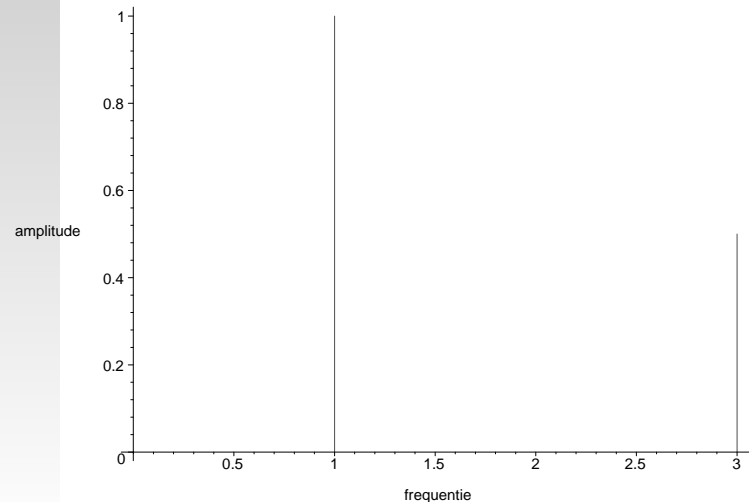
- voorbeelden : sinus en cosinus, constante functie
- Als $f(x)$ en $g(x)$ beide periode p hebben, dan heeft $h(x) = a f(x) + b g(x)$ eveneens periode p .

Voorstelling van functies



$$f(x) = \cos 2\pi x + \frac{1}{2} \cos 6\pi x$$

- in termen van de onafhankelijke veranderlijke



- in termen van de optredende frequenties

Trigonometrische reeksen

- $\cos \frac{\pi n x}{L}$ en $\sin \frac{\pi n x}{L}$ zijn periodieke functies met periode $2L$
- We willen elk willekeurige periodieke functie met periode $2L$ voorstellen als een trigonometrische reeks

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right)$$

Formules van Euler

Bepaling van de Fourier-coëfficiënten

Zij $f(x)$ periodiek met periode $2L$ en zij

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right)$$

Veronderstel dat de reeks convergeert en $f(x)$ als som heeft.

Vraag : wat zijn a_n en b_n ?

Bepaling van a_0

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L f(x) \, dx &= \int_{-L}^L a_0 \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{\pi n x}{L} \, dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin \frac{\pi n x}{L} \, dx \\ &= 2a_0 L + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot 0\end{aligned}$$

Besluit : $a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \, dx$

Bepaling van de coëfficiënten a_m

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{\pi m x}{L} dx$$

$$= a_0 \int_{-L}^L \cos \frac{\pi m x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{\pi n x}{L} \cos \frac{\pi m x}{L} dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin \frac{\pi n x}{L} \cos \frac{\pi m x}{L} dx$$

$$= a_0 \cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n ? + \sum_{n=1}^{\infty} b_n ?$$

de optredende integralen

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \cos \frac{\pi n x}{L} \cos \frac{\pi m x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{\pi (n+m) x}{L} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{\pi (n-m) x}{L} dx \\ &= \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{2} \delta_{nm} 2L \\ \int_{-L}^L \sin \frac{\pi n x}{L} \cos \frac{\pi m x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \sin \frac{\pi (n+m) x}{L} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-L}^L \sin \frac{\pi (n-m) x}{L} dx \\ &= \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{2} 0\end{aligned}$$

Bepaling van de coëfficiënten a_m

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{\pi m x}{L} dx$$

$$= a_0 \int_{-L}^L \cos \frac{\pi m x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{\pi n x}{L} \cos \frac{\pi m x}{L} dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin \frac{\pi n x}{L} \cos \frac{\pi m x}{L} dx$$

$$= a_0 \cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{nm} L + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot 0 = a_m L$$

Bepaling van de coëfficiënten a_m

Besluit :

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{\pi m x}{L} dx \quad \text{voor } m = 1, 2, \dots$$

Bepaling van de coëfficiënten b_m

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{\pi m x}{L} dx$$

$$= a_0 \int_{-L}^L \sin \frac{\pi m x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{\pi n x}{L} \sin \frac{\pi m x}{L} dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin \frac{\pi n x}{L} \sin \frac{\pi m x}{L} dx$$

$$= a_0 \cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n ? + \sum_{n=1}^{\infty} b_n ?$$

de optredende integralen

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \cos \frac{\pi n x}{L} \sin \frac{\pi m x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \sin \frac{\pi (n+m) x}{L} dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-L}^L \sin \frac{\pi (n-m) x}{L} dx \\ &= \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{2} 0 \\ \int_{-L}^L \sin \frac{\pi n x}{L} \sin \frac{\pi m x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{\pi (n-m) x}{L} dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{\pi (n+m) x}{L} dx \\ &= \frac{1}{2} \delta_{mn} 2L + \frac{1}{2} 0\end{aligned}$$

Bepaling van de coëfficiënten b_m

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{\pi m x}{L} dx \\ &= a_0 \int_{-L}^L \sin \frac{\pi m x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{\pi n x}{L} \sin \frac{\pi m x}{L} dx \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin \frac{\pi n x}{L} \sin \frac{\pi m x}{L} dx \\ &= a_0 \cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{nm} L = b_m L \end{aligned}$$

Bepaling van de coëfficiënten b_m

Besluit :

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{\pi m x}{L} dx \quad \text{voor } m = 1, 2, \dots$$

De formules van Euler

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{\pi n x}{L} \, dx \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{\pi n x}{L} \, dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Fourier-reeks

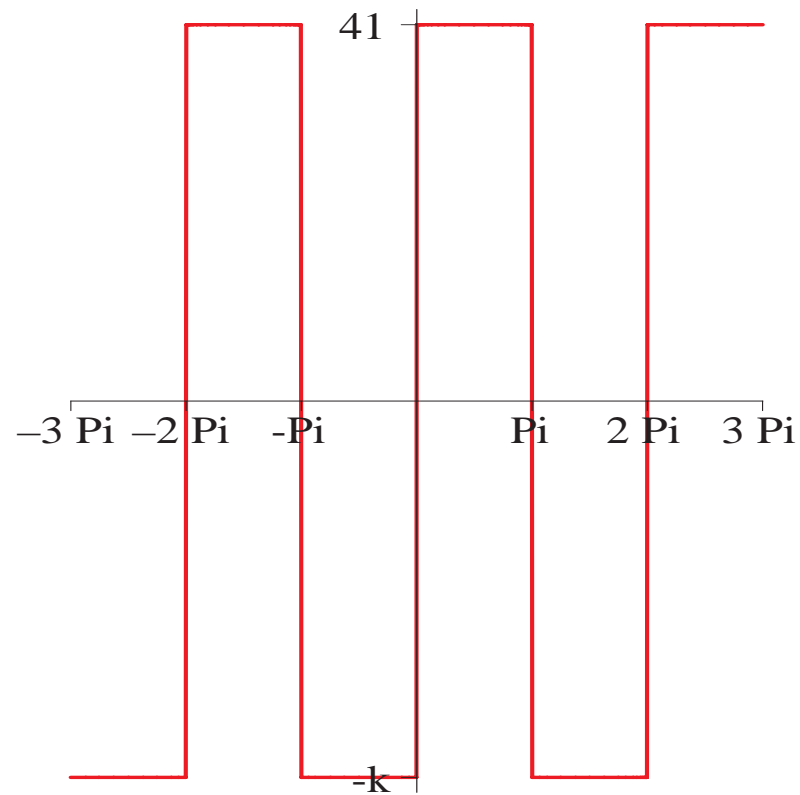
De bekomen getallen worden de **Fourier-coëfficiënten** van $f(x)$ genoemd. De trigonometrische reeks

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right),$$

waarbij de coëfficiënten gegeven worden door de formules van Euler, wordt de **Fourier-reeks van $f(x)$** genoemd, tenminste op voorwaarde dat de coëfficiënten bestaan en de reeks convergeert.

Vierkante golf in $[-\pi, \pi]$

$$f_1(x) = \begin{cases} -k & \text{als } -\pi < x < 0 \\ +k & \text{als } 0 < x < \pi \end{cases}$$



Vierkante golf in $[-\pi, \pi]$

$$f_1(x) = \begin{cases} -k & \text{als } -\pi < x < 0 \\ +k & \text{als } 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-k) \, dx + \int_0^{\pi} (k) \, dx \right) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-k) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} (k) \cos nx \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k}{n} (-\sin nx) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{k}{n} (\sin nx) \Big|_0^{\pi} \right) = 0$$

Vierkante golf in $[-\pi, \pi]$

$$f_1(x) = \begin{cases} -k & \text{als } -\pi < x < 0 \\ +k & \text{als } 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-k) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} (k) \sin nx \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k}{n} (\cos nx) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{k}{n} (-\cos nx) \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{2k}{n\pi} (1 - (-1)^n) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ even} \\ \frac{4k}{n\pi} & n \text{ oneven} \end{cases} \end{aligned}$$

Vierkante golf in $[-\pi, \pi]$

$$f_1(x) = \begin{cases} -k & \text{als } -\pi < x < 0 \\ +k & \text{als } 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$f_1(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

$$f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{4k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Convergentie

- Is $f(x)$ (stuksgewijs) continu in $[-L, L]$, dan kunnen alle Fourier-coëfficiënten berekend worden.
- Vraag : (voor welke waarden van x) is de bekomen Fourier-reeks convergent ?

Stelling omtrent convergentie

Als een periodieke functie $f(x)$ met periode $2L$ stuksgewijze continu is in het interval $-L \leq x \leq L$ en er bestaat een linkse en een rechtse afgeleide in elk punt in dit interval, dan convergeert de Fourier-reeks van $f(x)$.

De waarde van de Fourier-reeks in x gelijk aan **het gemiddelde van de linker- en rechterlimiet van $f(x)$** .

Besluit : de waarde van de Fourier-reeks in x is gelijk aan $f(x)$, behalve in de punten waar f discontinu is.

Vierkante golf in $[-\pi, \pi]$

$$f_1(x) = \begin{cases} -k & \text{als } -\pi < x < 0 \\ +k & \text{als } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Fourier-reeks :

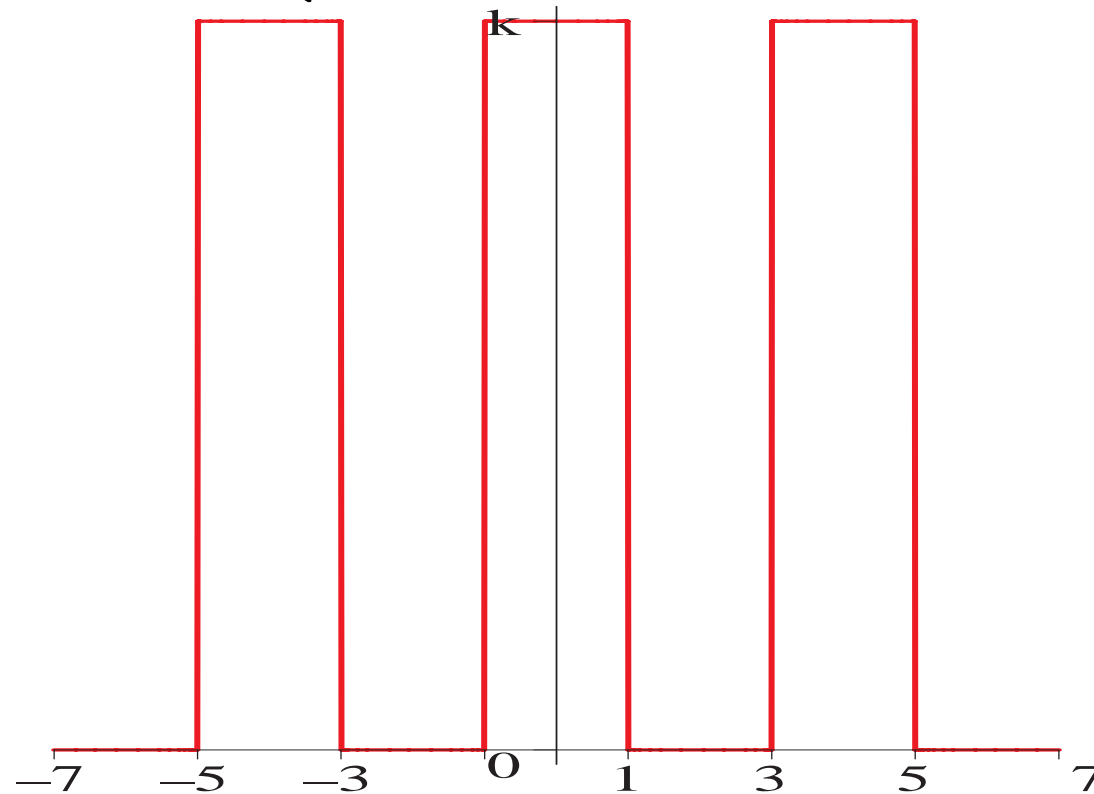
$$\frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

f_1 is discontinu in $x = 0$ maar de Fourier-reeks is er 0, want

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} (-k + k) = 0 \end{aligned}$$

Vierkante golf in $[-2, 2]$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -2 < x < -1 \\ k & \text{als } -1 < x < +1 \\ 0 & \text{als } +1 < x < +2 \end{cases}$$



Vierkante golf in $[-2, 2]$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -2 < x < -1 \\ k & \text{als } -1 < x < +1 \\ 0 & \text{als } +1 < x < +2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) \, dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 k \, dx \\ &= \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Vierkante golf in $[-2, 2]$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -2 < x < -1 \\ k & \text{als } -1 < x < +1 \\ 0 & \text{als } +1 < x < +2 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 k \cos \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= \frac{k}{2} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{2k}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even} \\ \frac{2k}{n\pi} & \text{als } n = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{2k}{n\pi} & \text{als } n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

Vierkante golf in $[-2, 2]$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -2 < x < -1 \\ k & \text{als } -1 < x < +1 \\ 0 & \text{als } +1 < x < +2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 k \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= -\frac{k}{2} \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-1}^1 \\ &= 0 \text{ voor } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Vierkante golf in $[-2, 2]$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -2 < x < -1 \\ k & \text{als } -1 < x < +1 \\ 0 & \text{als } +1 < x < +2 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{k}{2} \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even} \\ \frac{2k}{n\pi} & \text{als } n = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{2k}{n\pi} & \text{als } n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

$$f_2(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} x + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} x - \dots \right)$$

Lineaire combinaties

De Fourier-coëfficiënten van de som $f_1 + f_2$ van twee functies zijn gelijk aan de som van de Fourier-coëfficiënten van de corresponderende functies f_1 en f_2 .

De Fourier-coëfficiënten van $c f$, waarbij c een constante voorstelt, zijn het product van de Fourier-coëfficiënten van f met de constante c .

Vierkante golf in $[-\pi, \pi]$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -\pi < x < 0 \\ 2k & \text{als } 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$f_3(x) = f_1(x) + k$$

met

$$f_1(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

$$f_3(x) = k + \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

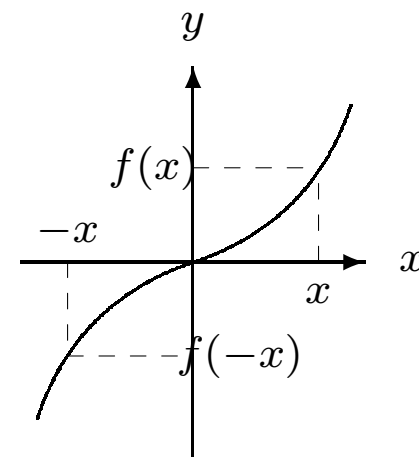
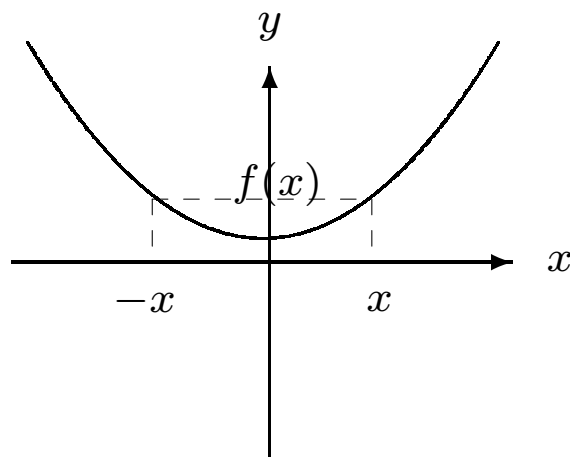
Even en oneven functies

- even functie : $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$
 y -as is een as van symmetrie

$$f \text{ even} \implies \int_{-L}^L f(x) \, dx = 2 \int_0^L f(x) \, dx$$

- oneven functie : $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$
oorsprong is een punt van symmetrie

$$f \text{ oneven} \implies \int_{-L}^L f(x) \, dx = 0$$



Even en oneven functies

Het product van

- even functies is even,
- oneven functies is eveneens even,
- een even functie en een oneven functie is oneven.

Even en oneven functies

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{\pi n x}{L} \, dx \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{\pi n x}{L} \, dx \quad n = 1, 2, \dots$$

In de Fourier-ontwikkeling van een even functie is $b_n = 0$ en van een oneven functie is $a_0 = a_n = 0$.

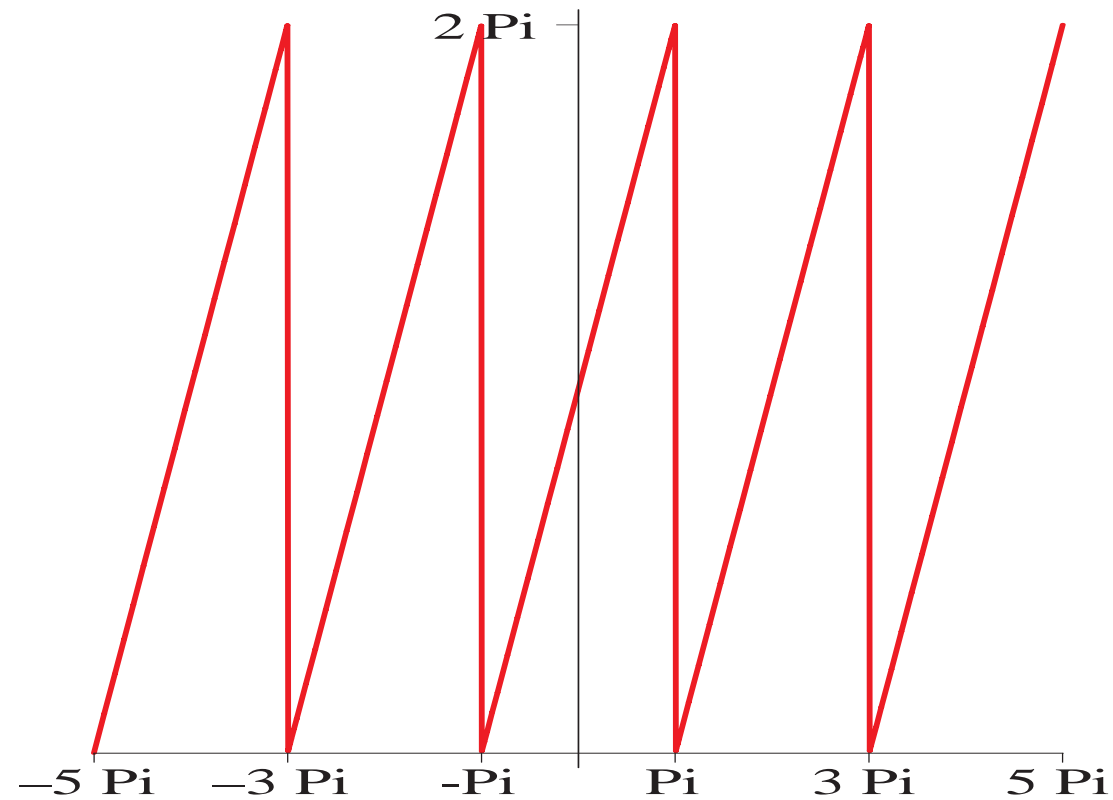
Even en oneven functies

Benamingen :

- De Fourier-reeks van een even functie $f(x)$ is een **cosinusreeks van Fourier**.
- De Fourier-reeks van een oneven functie $f(x)$ is een **sinusreeks van Fourier**.

Zaagtandgolf in $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = x + \pi \quad \text{voor } -\pi < x < \pi$$



Zaagtandgolf in $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = x + \pi \quad \text{voor } -\pi < x < \pi$$

$$f = g_1 + g_2 \quad \text{met } g_1(x) = x \text{ en } g_2(x) = \pi$$

- g_1 is oneven, dus $a_0 = a_n = 0$ en

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g_1 \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{-x \cos nx}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx \, dx \right\} \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \end{aligned}$$

$$g_1(x) = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right)$$

Zaagtandgolf in $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = x + \pi \quad \text{voor } -\pi < x < \pi$$

$$f = g_1 + g_2 \quad \text{met } g_1(x) = x \text{ en } g_2(x) = \pi$$

- $g_2 = \pi$, dus $a_0 = \pi$, $a_n = 0$ en $b_n = 0$

$$f(x) = \pi + 2\left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots\right)$$

Partieelsommen

De N^{de} partiële som van de Fourier-reeks

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right)$$

wordt gedefinieerd als

$$a_0 + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right)$$

Benaderingen van functies

Zij f_N de N^{de} partiële som van de Fourier-reeks van $f(x)$, dan kan f_N beschouwd worden als een **benadering** voor $f(x)$.

Vraag : hoe goed is de benadering van f door f_N binnen de verzameling van functies van de vorm

$$F(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N \left(\alpha_n \cos \frac{\pi n x}{L} + \beta_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right)$$

m.a.w. : bestaat er andere functie $F(x)$ die voor dezelfde vaste N een benadering zou kunnen opleveren waarvoor de fout kleiner is ?

Fout

Wat verstaan we onder de term **fout (error)** E voor dergelijke globale benadering over het interval $[-L, L]$?

Mogelijkheden :

- maximale absolute fout :

$$E = \max_{-L \leq x \leq L} |f(x) - F(x)|$$

- totale kwadratische fout :

$$E = \int_{-L}^L (f(x) - F(x))^2 dx$$

Totale kwadratische fout

$$\begin{aligned} E &= \int_{-L}^L (f(x) - F(x))^2 \, dx \\ &= \int_{-L}^L f(x)^2 \, dx - 2 \int_{-L}^L f(x) F(x) \, dx + \int_{-L}^L F(x)^2 \, dx \end{aligned}$$

Totale kwadratische fout

$$F(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N \left(\alpha_n \cos \frac{\pi n x}{L} + \beta_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right)$$

$$\int_{-L}^L F(x)^2 \, dx = L(2\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_N^2 + \beta_1^2 + \dots + \beta_N^2)$$

$$\int_{-L}^L f(x) F(x) \, dx = L(2\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_N a_N + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_N b_N)$$

Totale kwadratische fout

$$E = \int_{-L}^L f(x)^2 dx - 2L \left[2\alpha_0 a_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) \right] + L \left[2\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right]$$

Kies $\alpha_n = a_n$ en $\beta_n = b_n$:

$$E^* = \int_{-L}^L f(x)^2 dx - L \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

Totale kwadratische fout

$$\begin{aligned} E - E^* &= -2L \left[2\alpha_0 a_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n a_n + \beta_n b_n) \right] \\ &\quad + L \left[2\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right] \\ &\quad + L \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right] \\ &= L \left\{ 2(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{n=1}^N [(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2] \right\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$E - E^* = 0 \iff \alpha_0 = a_0, \alpha_N = a_N, \beta_N = b_N$$

Stelling

De totale kwadratische fout van een functie F , voor vaste N , ten opzichte van een functie f , gedefinieerd in het interval $[-L, L]$ is minimaal als de coëfficiënten van de trigonometrische reeks in F gelijk zijn aan de Fourier-coëfficiënten van f .

Totale kwadratische fout

$$E_N^* = \int_{-L}^L f(x)^2 dx - L \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

$$\begin{aligned} E_{N+1}^* &= \int_{-L}^L f(x)^2 dx - L \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N+1} (a_n^2 + b_n^2) \right] \\ &= E_N^* - L(a_{N+1}^2 + b_{N+1}^2) \\ &\leq E_N^* \end{aligned}$$

Besluit : f_{N+1} is nooit slechter dan f_N

anders gezegd : de fout wordt kleiner naarmate het aantal termen toeneemt

Ongelijkheid van Bessel

$$E_N^* = \int_{-L}^L f(x)^2 dx - L \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

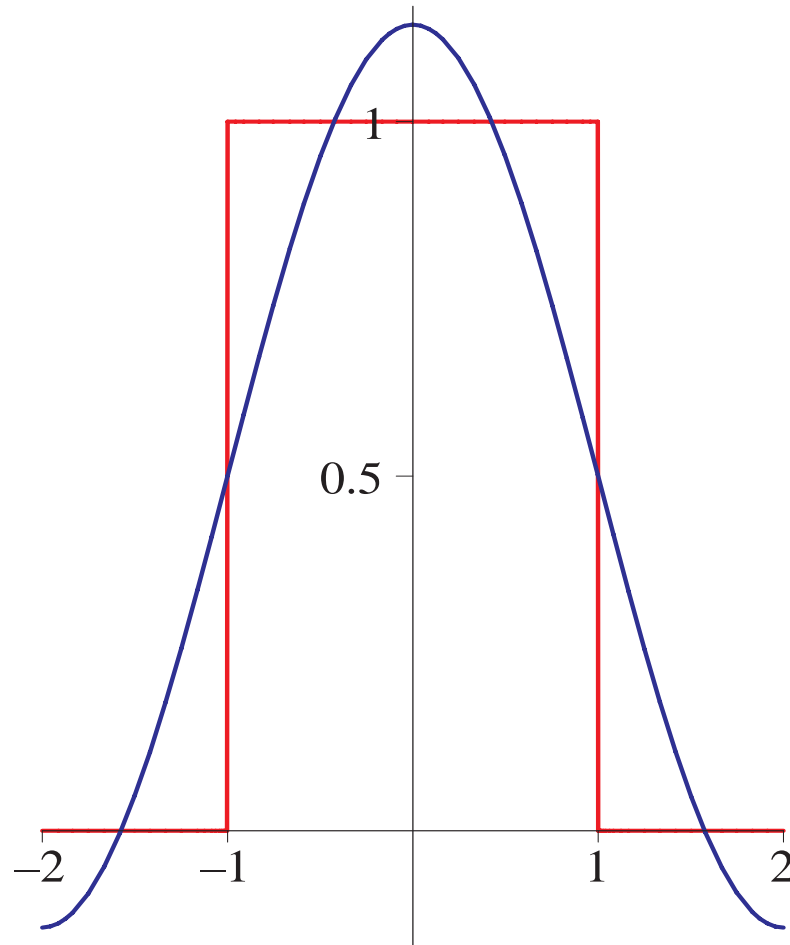
- Vermits $E_N^* \geq 0$ geldt

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx$$

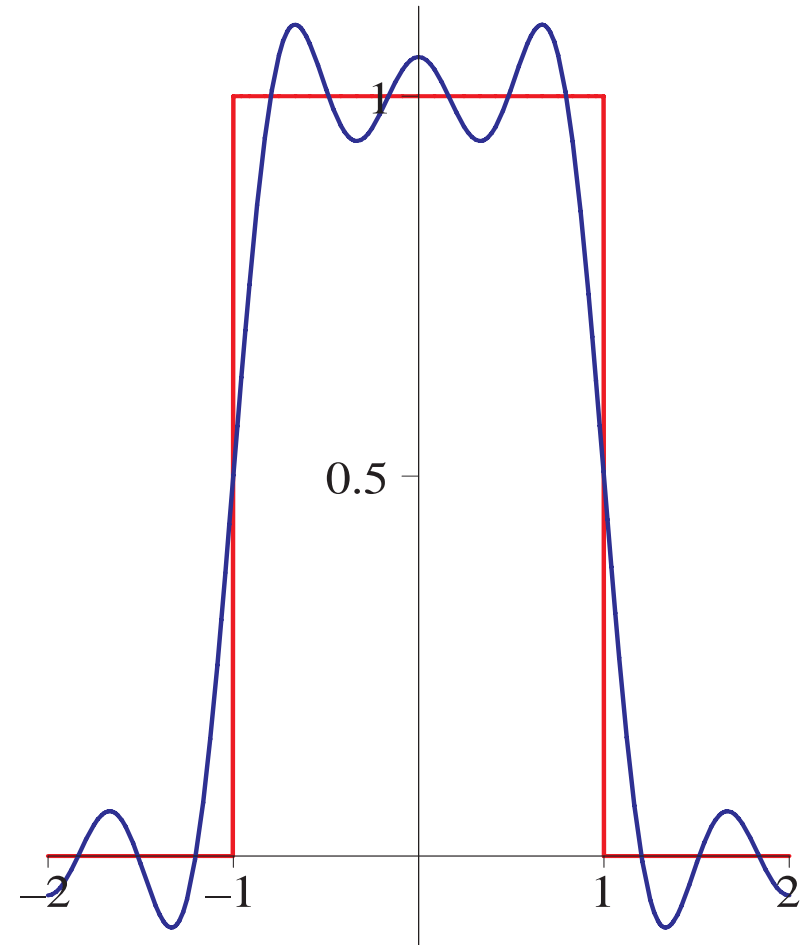
- Bij convergentie geldt $\lim_{N \rightarrow \infty} E_N^* = 0$, zodat

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx$$

Vierkante golf in $[-2, 2]$

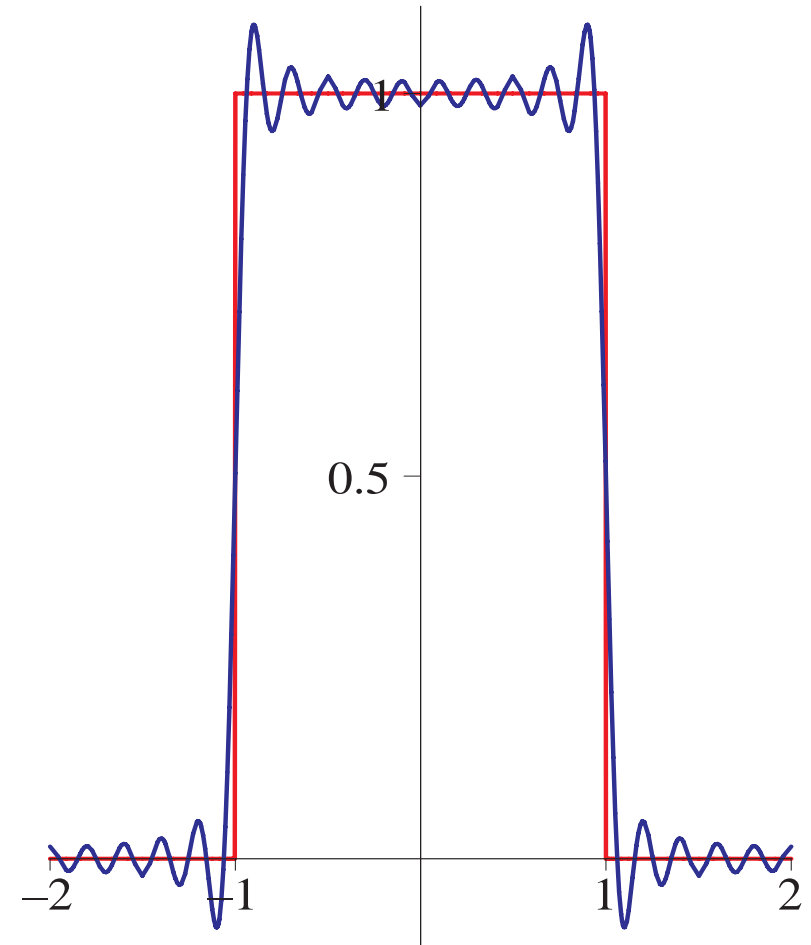
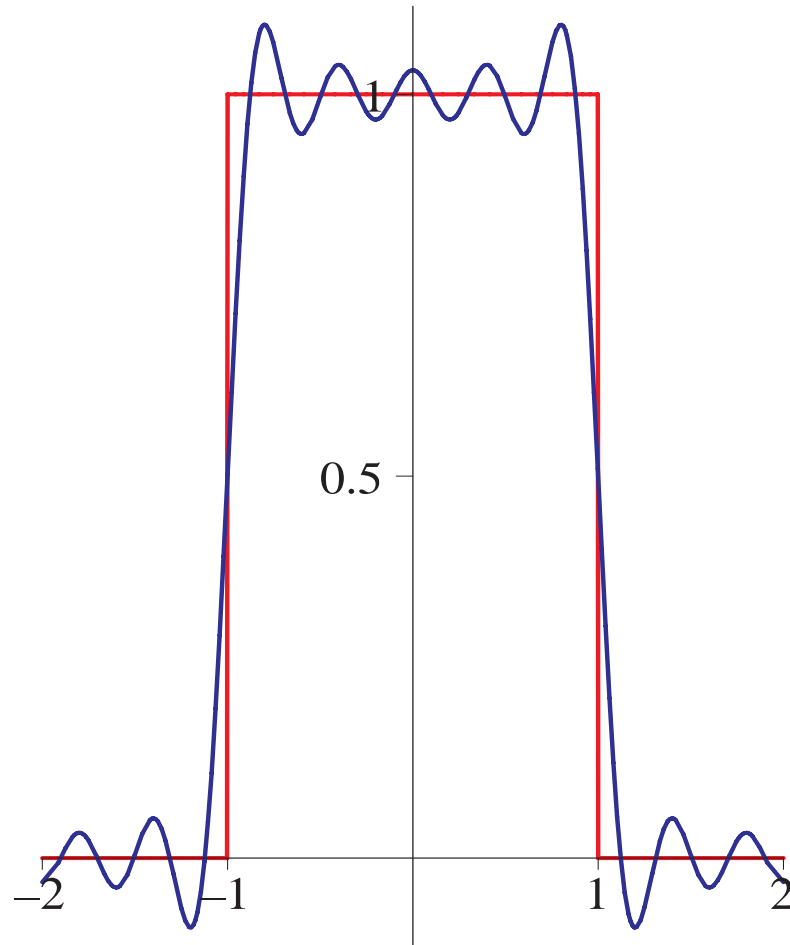


$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2}$$



$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \cos \frac{3\pi x}{2} + \cos \frac{5\pi x}{2} \right)$$

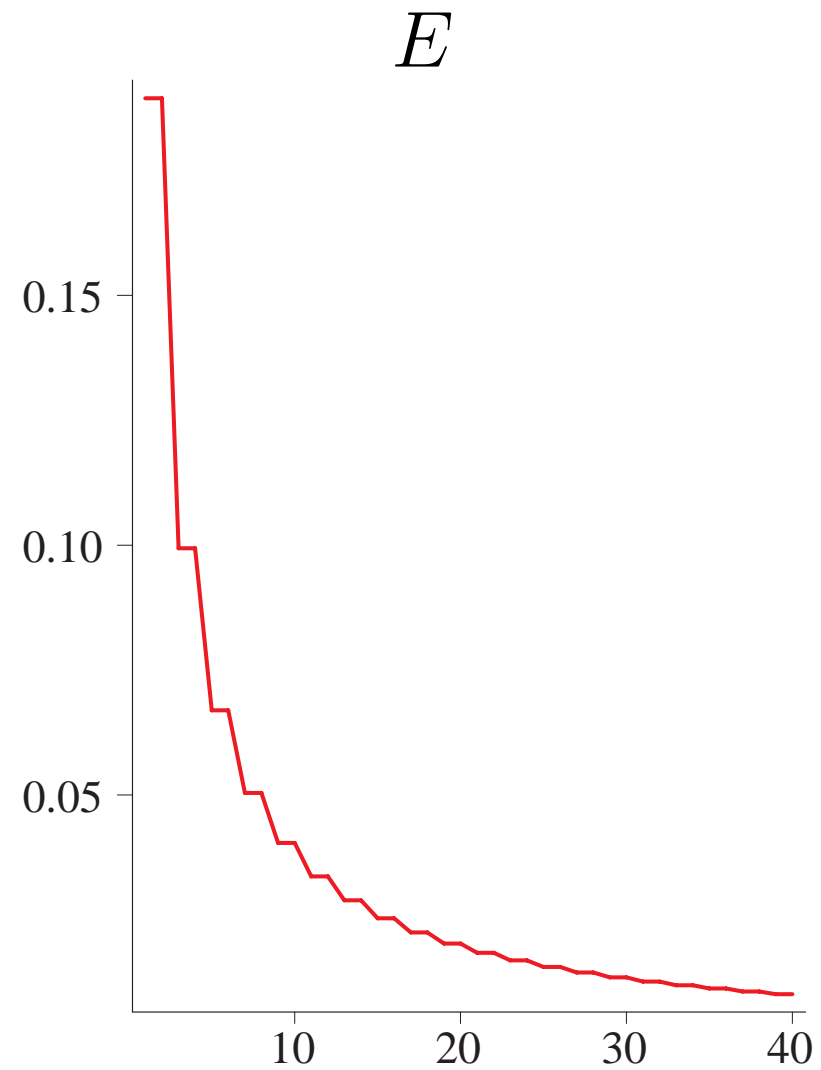
Vierkante golf in $[-2, 2]$



$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \dots + \cos \frac{9\pi x}{2} \right) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \dots + \cos \frac{19\pi x}{2} \right)$$

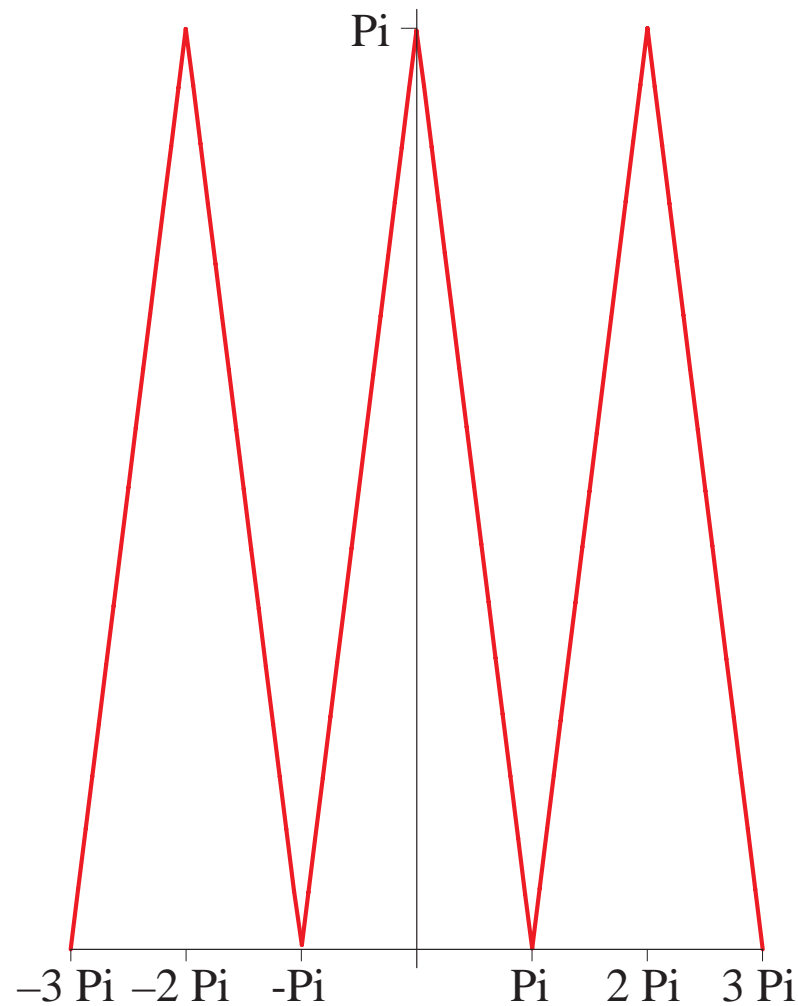
Vierkante golf in $[-2, 2]$

N	E
1	0.189
3	0.099
5	0.067
7	0.050
9	0.040
11	0.034
13	0.029
\vdots	\vdots
39	0.010



Driehoeksfunctie in $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{als } -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x & \text{als } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$



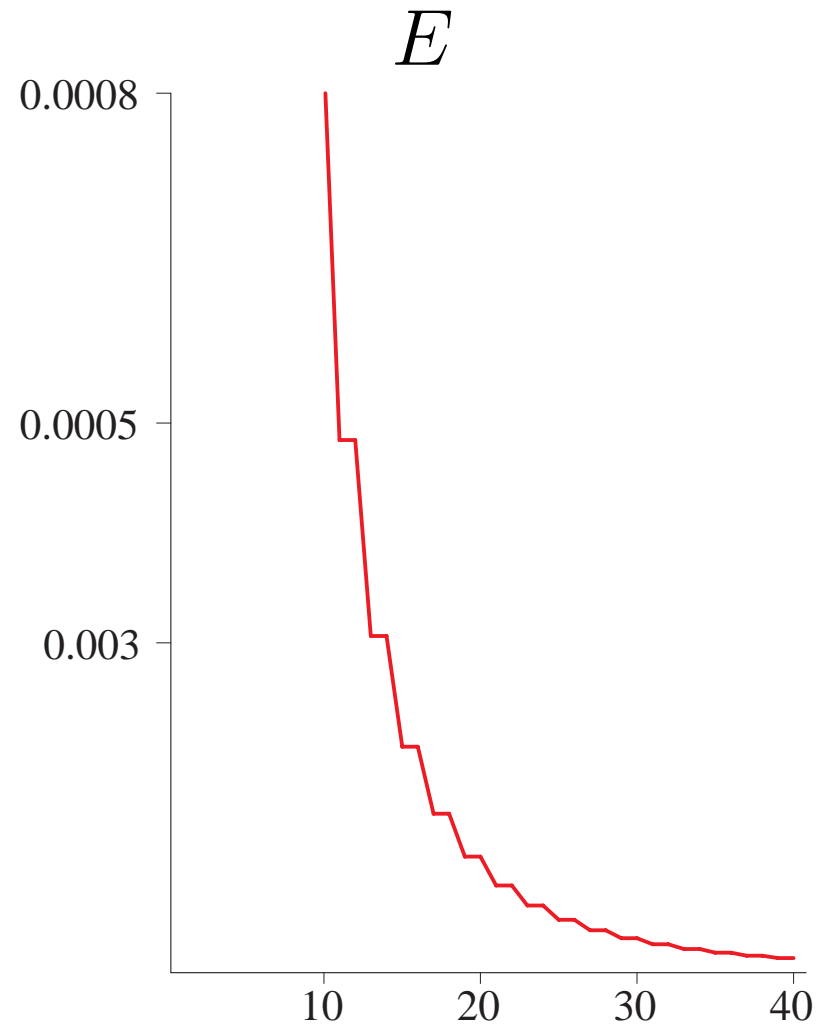
Driehoeksfunctie in $[-\pi, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{als } -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x & \text{als } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

Driehoeksfunctie in $[-\pi, \pi]$

N	E
1	0.07475
3	0.01188
5	0.00373
7	0.00161
9	0.00083
11	0.00048
13	0.00031
\vdots	\vdots
39	0.0001



Niet-periodieke functies

Fourier-reeksen leveren per definitie periodieke functies.

Vraag : wat met niet-periodieke functies ?

Beschouw een niet periodieke functie als de limiet van een periodieke functie waarbij de periode L oneindig groot wordt.

Vierkante golf in $[-L, L]$

$$f_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -L < x < -1 \\ 1 & \text{als } -1 < x < +1 \\ 0 & \text{als } +1 < x < +L \end{cases}$$

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } |x| < 1 \\ 0 & \text{als } |x| > 1 \end{cases}$$

De exponentiële functie

$$f_L(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{als } |x| < L \\ 0 & \text{als } |x| > L \end{cases}$$

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) = e^{-|x|}$$

De Fourier-integraal

Zij f_L periodiek met periode $2L$ en stel $w_n = \frac{n\pi}{L}$:

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) \, dv$$
$$+ \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos w_n x \int_{-L}^L f_L(v) \cos w_n v \, dv \right. \\ \left. + \sin w_n x \int_{-L}^L f_L(v) \sin w_n v \, dv \right]$$
$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \implies \frac{1}{L} = \frac{\Delta w}{\pi}$$

De Fourier-integraal

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) \, dv \\ &+ \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\cos w_n x) \int_{-L}^L f_L(v) \cos w_n v \, dv \right. \\ &\quad \left. + (\sin w_n x) \int_{-L}^L f_L(v) \sin w_n v \, dv \right] \Delta w \end{aligned}$$

De Fourier-integraal

Stel

- $f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f_L(x) dx$ bestaat

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \in \mathbb{R}$

dan $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) dv = 0$

De Fourier-integraal

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) \, dv \\ &+ \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\cos w_n x) \int_{-L}^L f_L(v) \cos w_n v \, dv \right. \\ &\quad \left. + (\sin w_n x) \int_{-L}^L f_L(v) \sin w_n v \, dv \right] \Delta w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, dv \right. \\ &\quad \left. + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv \, dv \right] dw \end{aligned}$$

De Fourier-integraal

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos wx \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, dv}_{A(w)} + \sin wx \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv \, dv}_{B(w)} \right] dw$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw$$

Stelling

Is $f(x)$ een stuksgewijze continue functie in elk eindig deelinterval die in elk punt een linkse en een rechtse afgeleide bezit en die eveneens absoluut integreerbaar is, dan kan deze voorgesteld worden door een Fourier-integraal. In een punt waar de functie discontinu is, zal de waarde van de Fourier-integraal gelijk zijn aan de gemiddelde waarde van de linker- en de rechterlimieten van $f(x)$ in dat punt.

Rechthoekige puls

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } |x| < 1 \\ 0 & \text{als } |x| > 1 \end{cases}$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, dv = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos wv \, dv$$

$$= \left. \frac{\sin wv}{\pi w} \right|_{-1}^1 = \frac{2 \sin w}{\pi w}$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sin wv \, dv = 0$$

Rechthoekige puls

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } |x| < 1 \\ 0 & \text{als } |x| > 1 \end{cases}$$

$$A(w) = \frac{2 \sin w}{\pi w} \quad B(w) = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] \, dw \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} \, dw \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} \, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{als } x = 1 \\ 0 & \text{als } x > 1 \end{cases}$$

Fourier-integraal

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] \, dw$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, dv \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv \, dv$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) [\cos wv \cos wx + \sin wv \sin wx] \, dv \, dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wx - wv) \, dv \right] \, dw \end{aligned}$$

Fourier-integraal

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wx - wv) \, dv \right] \, dw$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(w) \, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \, dw + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(w) \, dw$$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wx - wv) \, dv \quad \text{even}$$

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(wx - wv) \, dv \quad \text{oneven}$$

Fourier-integraal

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \, dw + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(w) \, dw$$

$$\text{met } \begin{cases} F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wx - wv) \, dv & \text{even} \\ G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(wx - wv) \, dv & \text{oneven} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) (\cos(wx - wv) + i \sin(wx - wv)) \, dv \, dw$$

Fourier-integraal

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) (\cos(wx - wv) + i \sin(wx - wv)) \, dv \, dw$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad \text{met } t = wx - wv$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iw(x-v)} \, dv \, dw$$

De Fourier-transformatie

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{i\omega(x-v)} dv d\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i\omega v} dv \right] e^{i\omega x} d\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i\omega v} dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

De Fourier-transformatie

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} \, dw$$

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} \, dx$$

- $\hat{f}(w)$: de Fourier-getransformeerde van $f(x)$

$$\mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(w)$$

- $f(x)$: de inverse Fourier-getransformeerde van $\hat{f}(w)$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(w)) = f(x)$$

Existentiestelling

Is $f(x)$ gedefinieerd voor alle $x \in \mathbb{R}$ en is

- $f(x)$ **stuksgewijze continu** in elk eindig interval.
- $f(x)$ **absoluut integreerbaar** over alle x , m.a.w de integraal

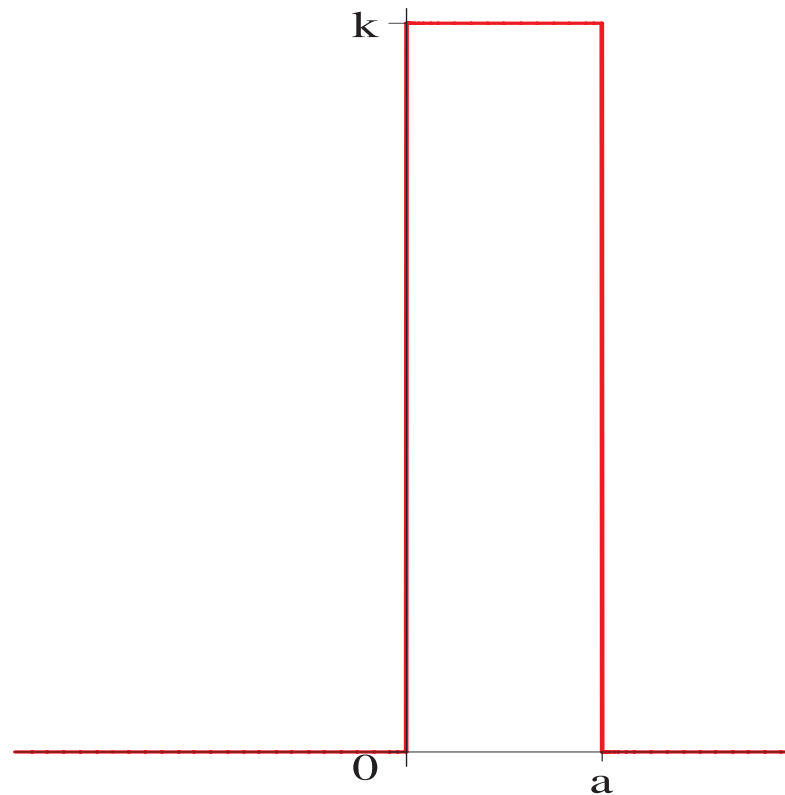
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx$$

bestaat en is eindig,

dan bestaat de Fourier-getransformeerde $\hat{f}(w)$ van $f(x)$.

De constante functie

$$f_1(x) = \begin{cases} k & \text{als } 0 < x < a \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$



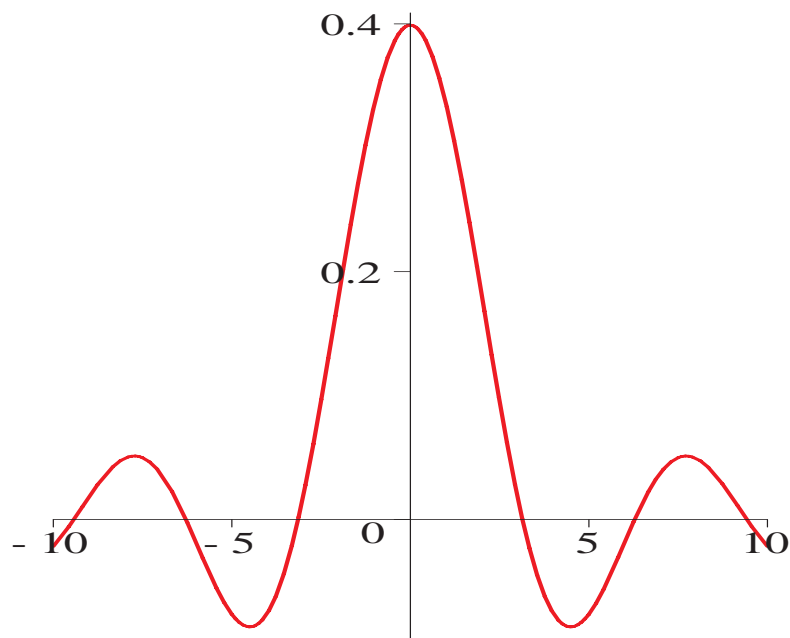
De constante functie

$$f_1(x) = \begin{cases} k & \text{als } 0 < x < a \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

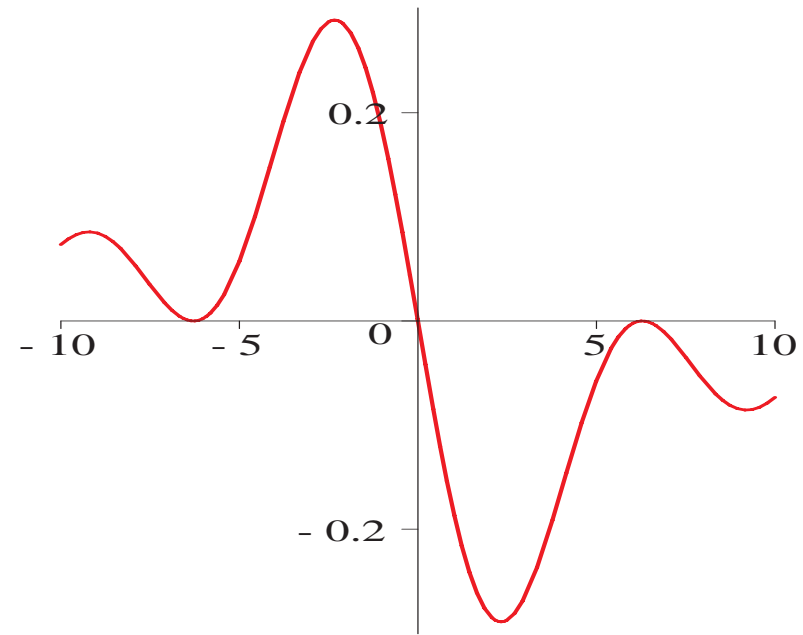
$$\begin{aligned} \hat{f}_1(w) = \mathcal{F}(f_1(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-iwx} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a k e^{-iwx} \, dx \\ &= \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-iwx}}{-iw} \right|_0^a \\ &= \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-iwa} - 1}{-iw} \right) \\ &= \frac{k(1 - e^{-iaw})}{iw\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

De constante functie : $a = 1$

$$f_1(x) = \begin{cases} k & 0 < x < a \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad \mathcal{F}(f_1(x)) = \frac{k(1 - e^{-iaw})}{iw\sqrt{2\pi}}$$



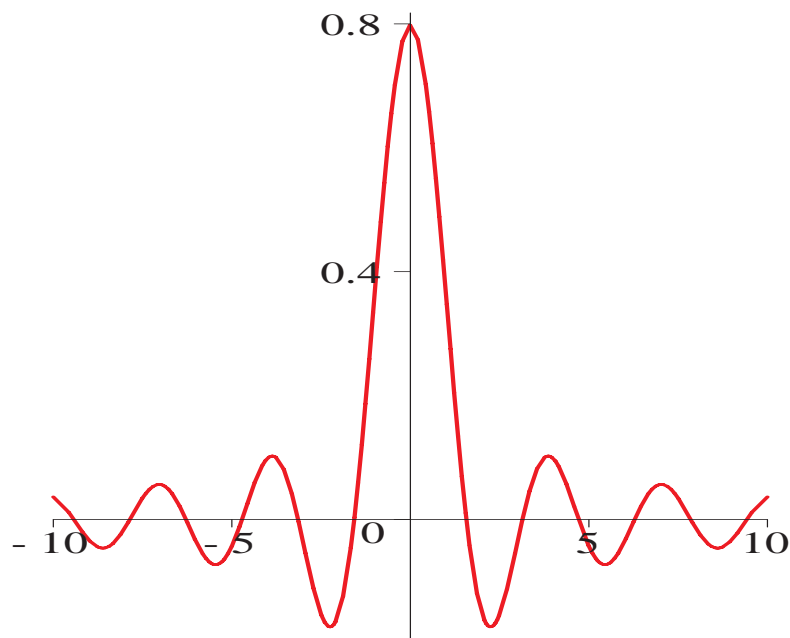
reëel deel



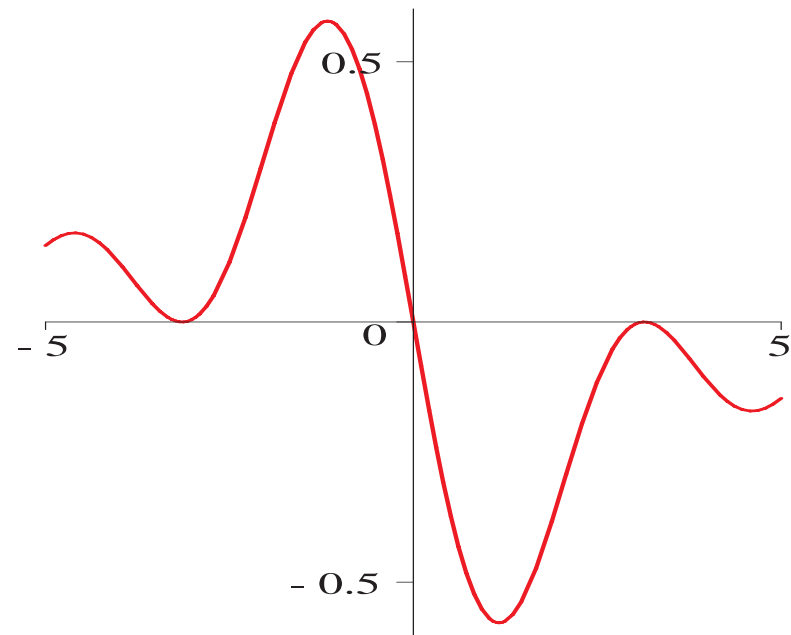
imaginair deel

De constante functie : $a = 2$

$$f_1(x) = \begin{cases} k & 0 < x < a \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad \mathcal{F}(f_1(x)) = \frac{k(1 - e^{-iaw})}{iw\sqrt{2\pi}}$$



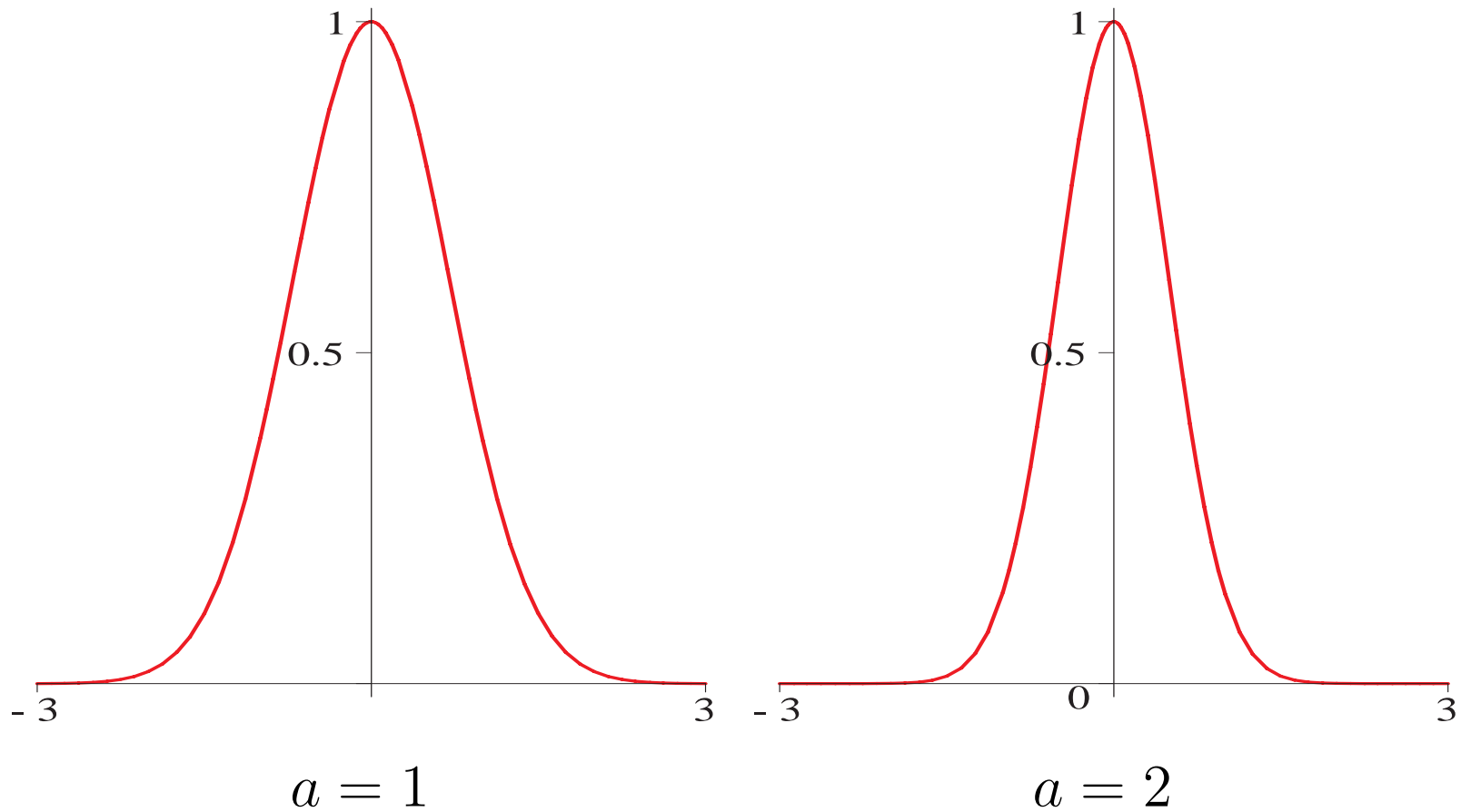
reëel deel



imaginair deel

De Gaussiaan

$$f_2(x) = e^{-ax^2} \quad \text{met } a > 0$$

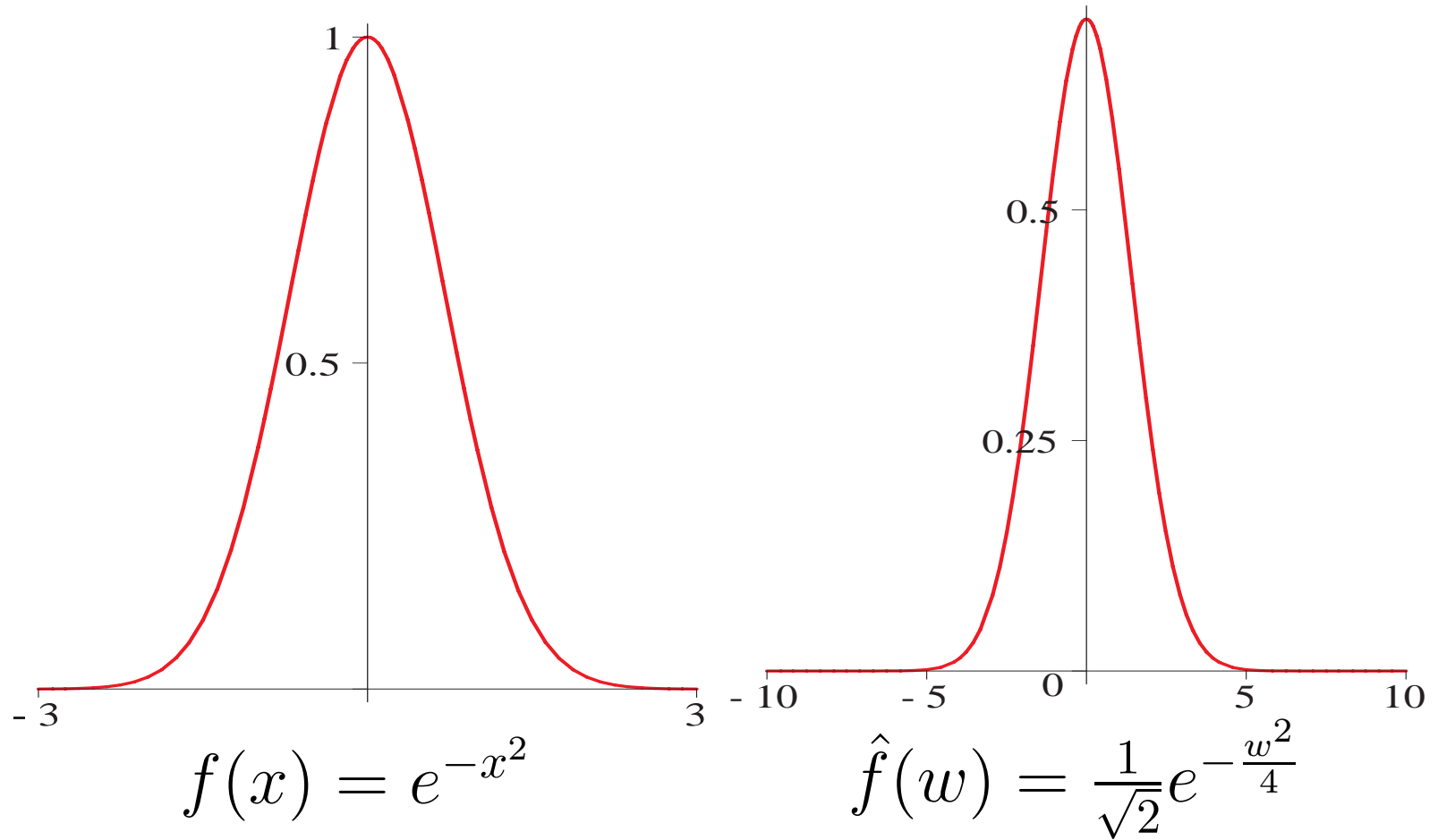


De Gaussiaan

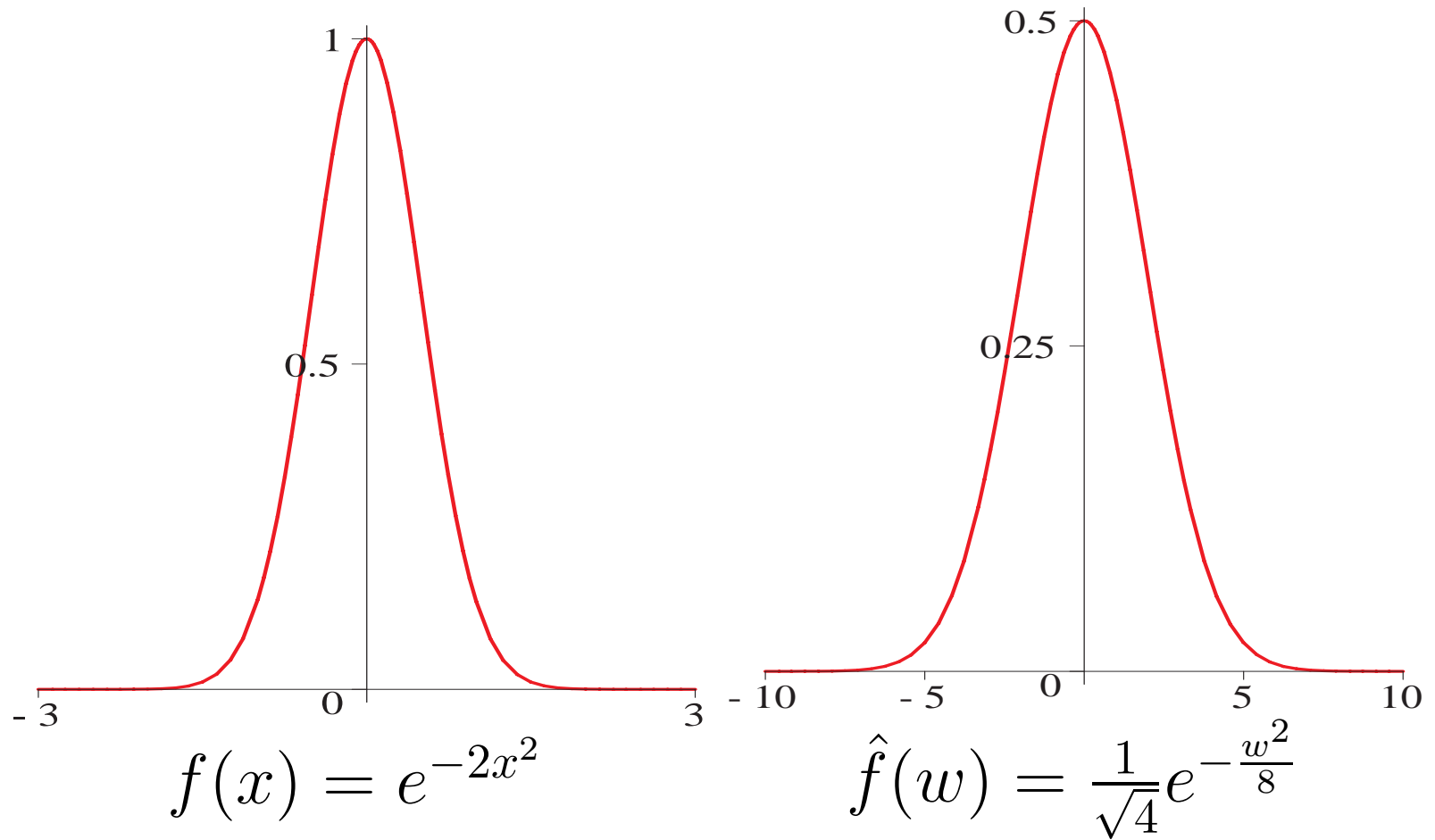
$$f_2(x) = e^{-ax^2} \quad \text{met } a > 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-ax^2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - iwx} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}})^2 + (\frac{iw}{2\sqrt{a}})^2} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a}x + \frac{iw}{2\sqrt{a}})^2} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}} \text{ want } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} \, dv = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

De Gaussiaan : $a = 1$



De Gaussiaan : $a = 2$



Eigenschappen

- De Fourier-getransformeerde van een reële functie is over het algemeen een complexe functie. De Fourier-getransformeerde van een complexe functie $f(x)$ is over het algemeen een complexe functie.
- Definities : zijn x en $y \in \mathbb{R}$, dan
$$\begin{cases} f \text{ is even als } f(x + iy) = f(-x - iy) \\ f \text{ is oneven als } f(x + iy) = -f(-x - iy) \end{cases}$$
De Fourier-getransformeerde van een even functie is even en de Fourier-getransformeerde van een oneven functie is oneven.
- De pieken in de Fourier-getransformeerde worden smaller als $f(x)$ breder wordt.

Eigenschaften

- Is $g(x) = f(x - b)$, dan is $\mathcal{F}(g(x)) = e^{-i\omega b} \mathcal{F}(f(x))$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - b) e^{-i\omega x} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega(y+b)} \, dy \\ &= e^{-i\omega b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} \, dy \\ &= e^{-i\omega b} \mathcal{F}(f(x))\end{aligned}$$

Stelling

De waarde van de Fourier-getransformeerde $\hat{f}(w)$ in $w = 0$ is, op een factor $\sqrt{2\pi}$ na, gelijk aan de oppervlakte onder de functie $f(x)$.

$$\begin{aligned}\hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} \, dx \\ \implies \hat{f}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i0x} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx\end{aligned}$$

Toepassing : als je $\hat{f}(w)$ wijzigt maar dan wel op zo'n manier dat $\hat{f}(0)$ ongewijzigd blijft, dan verandert ook de oppervlakte onder de curve $f(x)$ niet.

Stelling

De Fourier-transformatie is een **lineaire** operatie : als $f(x)$ en $g(x)$ twee functies zijn waarvan de Fourier-getransformeerden bestaan en als a en b constanten zijn, dan geldt dat

$$\mathcal{F}(af(x) + bg(x)) = a\mathcal{F}(f(x)) + b\mathcal{F}(g(x)).$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(af(x) + bg(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (af(x) + bg(x))e^{-i\omega x} \, dx \\ &= a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} \, dx \\ &\quad + b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x} \, dx \\ &= a\mathcal{F}(f(x)) + b\mathcal{F}(g(x))\end{aligned}$$

Stelling

Stel dat $f(x)$ een continue functie is waarvoor $f(x) \rightarrow 0$ als $|x| \rightarrow \infty$, en stel bovendien dat $f'(x)$ absoluut integreerbaar is over \mathbb{R} , dan geldt dat

$$\mathcal{F}(f'(x)) = iw\mathcal{F}(f(x)).$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f'(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iwx} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ [f(x)e^{-iwx}]_{-\infty}^{\infty} - (-iw) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} \, dx \right\} \\ &= 0 + iw\mathcal{F}(f(x))\end{aligned}$$

$$\text{Gevolg : } \mathcal{F}(f''(x)) = -w^2\mathcal{F}(f(x))$$

Voorbeeld

$$f_3(x) = x e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x e^{-x^2}) &= \mathcal{F}\left(-\frac{1}{2} \frac{d e^{-x^2}}{d x}\right) \\ &= -\frac{1}{2} (i w) \mathcal{F}(e^{-x^2}) \\ &= -\frac{1}{2} (i w) \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}} \\ &= -\frac{i w}{2 \sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}}\end{aligned}$$

Convolutie

De convolutie $f \otimes g$ van twee functies f en g is

$$\begin{aligned} h(x) = (f \otimes g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x - p) \, dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - p)g(p) \, dp \end{aligned}$$

Hierin is

- f de input
- g een gewichtsfunctie
- h de output

Voorbeeld

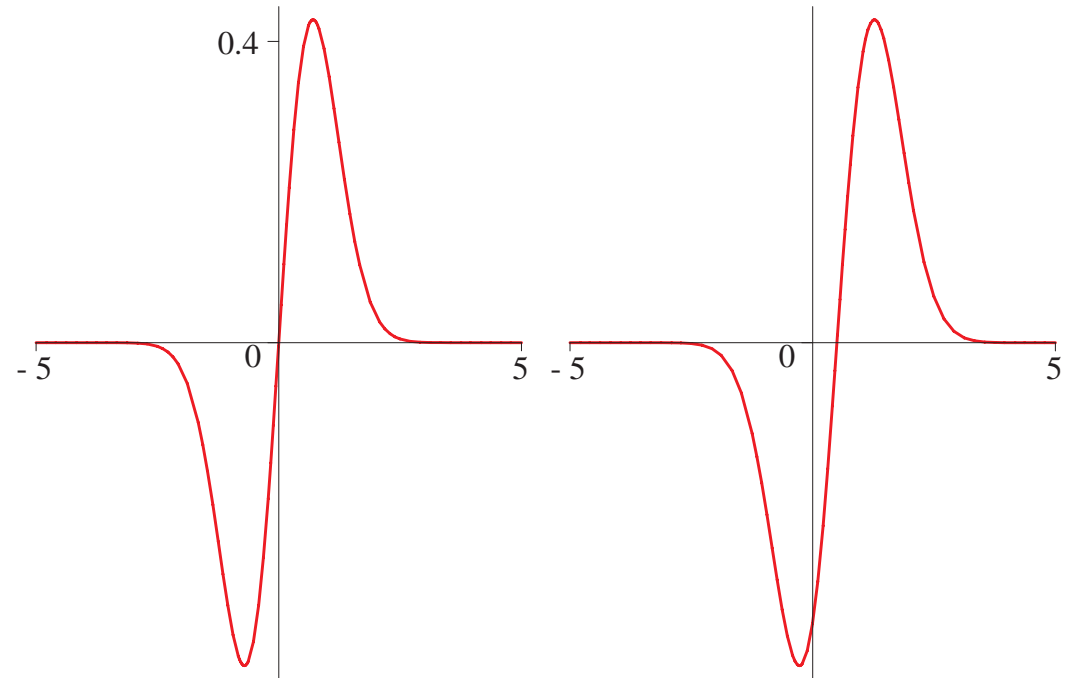
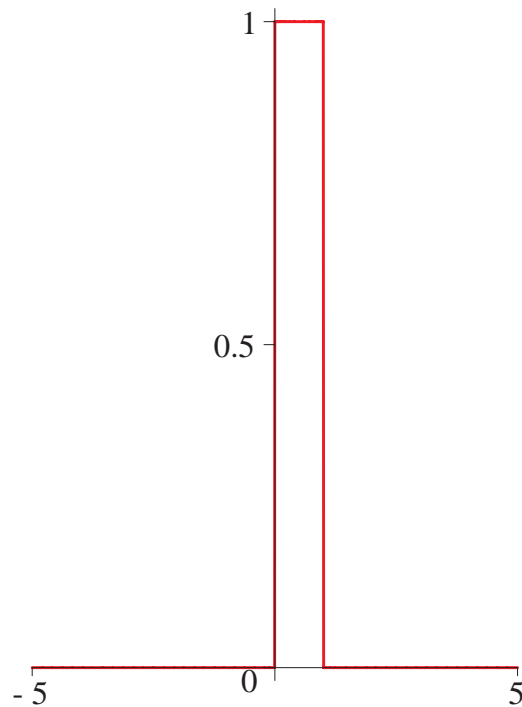
$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad f_3(x) = x e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned} (f_1 \otimes f_3)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(p) f_3(x-p) \, dp \\ &= \int_0^1 (x-p) \exp(-(x-p)^2) \, dp \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \exp(-(x-p)^2) d(x-p)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\exp(-(x-p)^2)) \Big|_{p=0}^{p=1} \\ &= \frac{1}{2} (\exp(-(x-1)^2) - \exp(-x^2)) \end{aligned}$$

Voorbeeld

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

$$f_3(x) = x e^{-x^2}$$



Convolutiestelling

Zijn $f(x)$ en $g(x)$ stuksgewijs continu en absoluut-integreerbaar over \mathbb{R} , dan is

$$\mathcal{F}(f \otimes g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((f \otimes g)(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)e^{-i\omega x} \, dp \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)e^{-i\omega x} \, dx \, dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(q)e^{-i\omega(p+q)} \, dq \, dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-i\omega p} \, dp \int_{-\infty}^{\infty} g(q)e^{-i\omega q} \, dq \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g) \end{aligned}$$

Voorbeeld

$$(f_1 \otimes f_3)(x) = \frac{1}{2}(\exp(-(x-1)^2) - \exp(-x^2))$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}((f_1 \otimes f_3)(w)) &= \frac{1}{2}(\mathcal{F}(\exp(-(x-1)^2)) - \mathcal{F}(\exp(-x^2))) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}} e^{-iw} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{4}w^2\right) (\exp(-iw) - 1) \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{1 - \exp(-iw)}{iw\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\frac{1}{4}w^2)}{2\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f_1(x)) \mathcal{F}(f_3(x))\end{aligned}$$

Opmerking

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f \otimes g)(x)) &= \mathcal{F}^{-1}(\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f(x))\mathcal{F}(g(x))) \\ (f \otimes g)(x) &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(x))\mathcal{F}(g(x))) \\ &= \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx}\,dw \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx}\,dw\end{aligned}$$

Discrete Fourier-transformatie

Computeralgoritme vereist een **discrete versie** van de Fourier-transformatie.

Discrete Fourier Transform of DFT

- input $X = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]^T$
- output $Y = \text{DFT}(X) = [y_0, y_1, \dots, y_{n-1}]^T$

$$y_m = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \omega_n^{mk}, \quad m = 0, \dots, n-1$$

$$\omega_n = \cos \frac{2\pi}{n} - i \sin \frac{2\pi}{n} = e^{-2\pi i/n}$$

$$\omega_n^n = 1$$

DFT met $n = 4$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{met } \omega = e^{\frac{-i2\pi}{4}} = -i$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \omega^{-6} \\ 1 & \omega^{-3} & \omega^{-6} & \omega^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\omega^{-1} = \omega^* = i$$

DFT

$$Y = F X \quad \text{en} \quad X = \frac{1}{n} F^* Y$$

met F een complexe, symmetrische, Vandermonde-matrix

$$y_m = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \omega_n^{mk}, \quad m = 0, \dots, n-1$$

$$x_k = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} y_m \omega_n^{-mk}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Toepassingen van DFT

Signaalverwerking

- herkennen van periodes of cycli
- digitale filtering (wegwerken ruis, eliminatie ongewenste periodiciteiten, ...)

Implementatie

Het succes van de DFT is er echter maar gekomen nadat er een heel efficiënte, m.a.w. snelle, implementatie ($\mathcal{O}(n \log n)$) mogelijk werd.

Fast Fourier Transform, afgekort tot FFT

Cooley en Tukey, 1965

Wegwerken van ruis

